

## Estudo do número de Ramsey $R(3, 10)$ : análise de grafos de ordem 40

### Study of Ramsey's number $R(3, 10)$ : analysis of graphs on 40 vertices

### Estudio del número de Ramsey $R(3, 10)$ : análisis de gráficas de orden 40

Daniel Coswig Zitzke<sup>1</sup>

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), *Campus*  
Alvorada, Alvorada, RS, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0001-5292-4051>,  <http://lattes.cnpq.br/0861288350052587>

Danielle Santos Azevedo<sup>2</sup>

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), *Campus*  
Alvorada, Alvorada, RS, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0003-2008-6086>,  <http://lattes.cnpq.br/8278999457848707>

Jonas Francisco de Medeiros<sup>3</sup>

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), *Campus*  
Alvorada, Alvorada, RS, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-3662-5243>,  <http://lattes.cnpq.br/6585146522852623>

Lenon Saturnino Bernardino<sup>4</sup>

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), *Campus*  
Alvorada, Alvorada, RS, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-6064-0929>,  <http://lattes.cnpq.br/4419028665533338>

**Resumo:** O número de Ramsey  $R(k, l)$  é o menor número inteiro  $n$  tal que não exista  $(k, l, n, e)$ - grafo, sendo que um  $(k, l, n, e)$ - grafo denota um grafo  $G$  com  $n$  vértices e  $e$  arestas e com  $C(G) < k$  e  $I(G) < l$ , onde  $C(G)$  denota o maior clique em  $G$  e  $I(G)$  denota o maior conjunto independente em  $G$ . A teoria de grafos deu origem a vastas pesquisas, pois por mais simples que seja a definição, calcular os números de Ramsey é uma tarefa árdua e poucos são conhecidos. Exoo (1989), Goedgebeur e Radziszowski (2013) mostraram que

<sup>1</sup>**Currículo sucinto:** Estudante do Curso Técnico de Produção em Áudio e Vídeo Integrado ao Ensino Médio no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, *Campus* Alvorada. **Contribuição de autoria:** Curadoria de Dados, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação. **Contato:** daniel.zitzke@aluno.alvorada.ifrs.edu.br.

<sup>2</sup>**Currículo sucinto:** Licenciada, mestre e doutora em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul e docente no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, *Campus* Alvorada. **Contribuição de autoria:** Administração do Projeto, Conceituação, Curadoria de Dados, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação, Metodologia. **Contato:** danielle.azevedo@alvorada.ifrs.edu.br.

<sup>3</sup>**Currículo sucinto:** Licenciado em Matemática pela Universidade de Coimbra, graduado em Matemática pela Universidade do Vale do Rio dos Sinos, mestre em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul e docente no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, *Campus* Alvorada. **Contribuição de autoria:** Administração do Projeto, Conceituação, Curadoria de Dados, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação, Metodologia. **Contato:** jonas.medeiros@alvorada.ifrs.edu.br.

<sup>4</sup>**Currículo sucinto:** Estudante do Curso Técnico de Produção em Áudio e Vídeo Integrado ao Ensino Médio no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, *Campus* Alvorada. **Contribuição de autoria:** Curadoria de Dados, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação. **Contato:** lenon.bernardino@gmail.com.



$40 \leq R(3, 10) \leq 42$ . Assim, neste artigo, vamos expor proposições que serão úteis no cálculo deste número de Ramsey. Baseado nas ideias de Grinstead e Roberts (1982) e Cariolaro (2007), serão exibidas propriedades e características para um grafo bicolorido de ordem 40, tal que  $G$  seja livre de triângulos, isto é,  $C(G) < 3$ , e não possua conjunto independente de ordem 10, ou seja,  $I(G) < 10$ . Mostraremos, por exemplo, que dado  $G = (V, E)$  um grafo de ordem 40, tal que  $C(G) < 3$  e  $I(G) < 10$ , então, para todo vértice  $v \in V$ , tem-se que  $4 \leq \deg(v) \leq 9$ . Por fim, ressaltamos que os resultados inéditos obtidos pelos autores, em um projeto de pesquisa desenvolvido no IFRS, *Campus Alvorada*, encontram-se na Seção 4.

**Palavras-chave:** teoria de grafos; grafos bicoloridos; números de Ramsey; clique; conjunto independente.

**Abstract:** The Ramsey number  $R(k, l)$  is the smallest integer  $n$  such that there is no  $(k, l, n, e)$ -graph, where a  $(k, l, n, e)$ -graph denotes a graph  $G$  with  $n$  vertices and  $e$  edges and with  $C(G) < k$  e  $I(G) < l$ , where  $C(G)$  denotes the largest clique in  $G$  and  $I(G)$  denotes the largest independent set in  $G$ . The graph theory gave rise to extensive research, because no matter how simple the definition is, calculating the Ramsey numbers is an arduous task and few are known. Exoo (1989), Goedgebeur and Radziszowski (2013) showed that  $40 \leq R(3, 10) \leq 42$ . Thus, in this article, we will expose propositions that will be useful in the calculation of this Ramsey number. Based on the ideas of Grinstead and Roberts (1982) and Cariolaro (2007), properties and characteristics will be displayed for a bicolored graph of order 40, such that  $G$  is free of triangles, that is,  $C(G) < 3$ , and does not have an independent set of order 10, that is,  $I(G) < 10$ . We will show, for example, that given  $G = (V, E)$  a graph of order 40, such that  $C(G) < 3$  and  $I(G) < 10$ , then, for every vertex  $v \in V$ , we have that  $4 \leq \deg(v) \leq 9$ . Finally, we emphasize that the unpublished results obtained by the authors, in a research project developed at IFRS, *Campus Alvorada*, are found in Section 4.

**Keywords:** graph theory; bicolor graphs; Ramsey numbers; clique; independent set.

**Resumen:** El número de Ramsey  $R(k, l)$  es el entero más pequeño  $n$  tal que no hay  $(k, l, n, e)$ -grafo, donde un  $(k, l, n, e)$ -grafo denota un grafo  $G$  con  $n$  vértices y  $e$  aristas y con  $C(G) < k$  e  $I(G) < l$ , en que  $C(G)$  denota el clic más grande en  $G$  y  $I(G)$  denota el conjunto independiente más grande en  $G$ . La teoría de grafos dio origen a una extensa investigación, pues por más simple que sea la definición, calcular los números de Ramsey es una tarea ardua y que pocos conocen. Exoo (1989), Goedgebeur e Radziszowski (2013) mostraron que  $40 \leq R(3, 10) \leq 42$ . Así, en este artículo expondremos proposiciones que serán de utilidad en el cálculo de este número de Ramsey. Basado en las ideas de Grinstead e Roberts (1982) e Cariolaro (2007), se mostrarán las propiedades e características para un grafo  $G$  bicolor de orden 40, tal que  $G$  está libre de triángulos, esto es,  $C(G) < 3$ , y no tiene un conjunto independiente de orden 10, es decir,  $I(G) < 10$ . Mostraremos, por ejemplo, que dado  $G = (V, E)$  un grafo de orden 40 y con  $C(G) < 3$  y  $I(G) < 10$ , entonces, para todo vértice  $v \in V$ , tenemos que  $4 \leq \deg(v) \leq 9$ . Finalmente, destacamos que los resultados inéditos obtenidos por los autores, en un proyecto de investigación desarrollado en IFRS, *Campus Alvorada*,



se encuentran en la Sección 4.

**Palabras clave:** teoría de grafos; grafos bicolores; números de Ramsey; clic; conjunto independente.

**Data de submissão:** 19 de dezembro de 2022.

**Data de aprovação:** 30 de junho de 2023.

## 1 Introdução

Frank Ramsey, em 1930, publicou um questionamento em que indagava qual era o número mínimo de pessoas que deveriam estar em uma festa a fim de que se garantisse que haviam 3 pessoas que se conheciam mutuamente ou 3 pessoas que não se conheciam mutuamente. Esse problema expandiu-se em grande escala e, juntamente com a teoria de grafos, definiu-se o famoso estudo dos números de Ramsey. A partir de um projeto de pesquisa, intitulado de “Estudo dos números de Ramsey em grafos multipartidos”, desenvolvido no Instituto Federal do Rio Grande do Sul (IFRS), dois professores pesquisadores junto a três alunos do ensino médio buscaram estudar os números de Ramsey e encontrar novos resultados para essa teoria. Além de inserir os alunos bolsistas no eixo técnico-científico, por meio da pesquisa, foi possível estudar conceitos novos de matemática e mostrar o vasto campo de pesquisa que existe na área de ciências exatas. Os projetos de pesquisa desenvolvidos junto aos alunos de ensino médio mostram que professores e alunos podem compreender melhor a matemática e aprofundar juntos os seus estudos, fazendo do projeto de pesquisa um espaço de formação contínua.

Inicialmente, realizou-se uma revisão metodológica de artigos já publicados, a fim de conceituar os principais tópicos da teoria estudada. O livro introdutório de Diestel (2000) foi o livro para que pudéssemos compreender a teoria de grafos e, com Sanches (2013), revisamos o estudo dos números de Ramsey. Apenas poucos números de Ramsey já foram determinados na matemática. Por não haver algum padrão específico descoberto para o cálculo dos números de Ramsey e por dificuldades computacionais, grande parte dos números de Ramsey ainda se encontram indeterminados, apesar de limitados por alguns estudos já realizados. O objetivo que norteou o trabalho aqui apresentado foi a busca pela determinação do número de Ramsey  $R(3, 10)$ . A partir de cálculos e discussões entre os pesquisadores do grupo, analisamos situações e realizamos uma análise diante dos possíveis valores para o número de Ramsey  $R(3, 10)$ . Apesar de ainda não termos descoberto o verdadeiro valor, encontramos propriedades para um grafo bicolorido de ordem 40 que podem ser úteis na descoberta desse número. O presente artigo contextualiza o leitor a partir de conceitos



básicos da teoria de grafos e dos números de Ramsey e, após, apresenta os resultados novos descobertos e, por fim, convida o leitor a se aventurar na busca pela determinação de algum número de Ramsey ainda não descoberto.

Em Azevedo *et al.* (2022), os autores já demonstraram, para o caso do método da bicoloração baseada em resíduos de grau  $n$  módulo  $m$ , que todo grafo de ordem 41 possui um subgrafo monocromático  $K_3$  azul ou uma cópia de  $K_{10}$  vermelha. Neste trabalho, os autores avançam apresentando um estudo voltado diretamente para a interpretação de noções e particularidades dos grafos de ordem 40 que contribuem na busca pela demonstração do número de Ramsey  $R(3, 10)$ . Os resultados aqui apresentados detalham particularidades do grafo de ordem 40 ainda não publicados, os quais podem ser implementados computacionalmente em outros estudos para a demonstração ou nada delimitação de limites para este número de Ramsey.

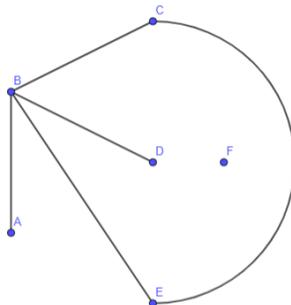
## 2 Noções Básicas

### 2.1 Teoria de Grafos

Para contextualizar a área do estudo realizado, vamos, primeiramente, apresentar algumas definições e resultados sobre a teoria de grafos. Para complementação do estudo, sugerimos as referências Diestel (2000), Sanches (2013) e Sanches (2016).

**Definição 2.1.** Um **grafo**  $G$  é um par  $G = (V, E)$ , tal que  $E \subset [V]^2$ , onde o conjunto  $V$  são os vértices, o conjunto  $E$  são as arestas do grafo  $G$  e  $[V]^2$  denota o conjunto de todos os subconjuntos de 2 elementos de  $V$ . Além disso, a **ordem** de um grafo  $G$  corresponde ao seu número de vértices, a qual será denotada por  $|G|$ . E mais, a notação  $\|G\|$  será utilizada para indicar o número de arestas de um grafo  $G$ .

Figura 1 – Exemplo de grafo  $G$ , onde  $|G| = 6$  e  $\|G\| = 5$



Fonte: Elaboração dos autores.



Um resultado importante da teoria de grafos é sobre a quantidade de vértices de grau ímpar em um grafo qualquer (Diestel, 2000).

**Proposição 2.2.** *O número de vértices de grau ímpar em um grafo é sempre par.*

A fim de definirmos os números de Ramsey, principal objeto desse estudo, é importante compreender o que significa um conjunto independente em um grafo e um clique. Para isso, precisamos compreender as seguintes definições:

**Definição 2.3.** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo. Dizemos que  $G$  é **completo**, se para todo par de vértices distintos  $v_1, v_2 \in V$ , temos  $v_1v_2 \in E$ .*

Denotaremos um grafo completo de ordem  $n$  por  $K_n$ .

**Definição 2.4.** *Dois vértices  $u$  e  $v$  são ditos **adjacentes**, quando  $uv \in E$ , ou seja, uma aresta que liga o vértice  $u$  com o vértice  $v$ .*

**Definição 2.5.** *O conjunto dos **vizinhos** de um vértice  $v$  em um grafo  $G$  é formado por todos os vértices adjacentes a ele e será denotado por  $N(v)$ . E, o **grau** de  $v$  é exatamente o número de vizinhos de  $v$ , denotado por  $deg(v)$ .*

Ao utilizarmos a notação  $N[v]$ , estaremos considerando os vizinhos de um vértice  $v$  e o próprio vértice  $v$ , isto é,  $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ .

**Definição 2.6.** *Um grafo **regular** é um grafo onde cada vértice tem o mesmo número de adjacências, isto é, cada vértice tem o mesmo grau. Quando todos os vértices têm grau  $k$ , dizemos que o grafo é  $k$ -regular.*

Agora, podemos definir o que é um conjunto independente e um clique em  $G$ .

**Definição 2.7.** *Um **conjunto independente** (CI) em um grafo  $G = (V, E)$  é um subconjunto de vértices de  $V$  no qual não existam dois vértices adjacentes.*

Utilizaremos a notação  $k - CI$  para indicar um conjunto independente de ordem  $k$ .

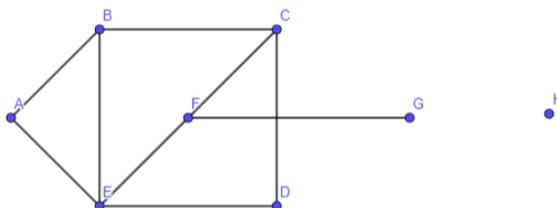
**Definição 2.8.** *Dado um grafo  $G = (V, E)$ , definimos um **clique** como um subconjunto de  $V$  que induz um subgrafo completo, ou seja, um subconjunto de vértices no qual todos os vértices são adjacentes entre si.*



Utilizaremos a notação  $I(G)$  para denotar o tamanho do maior conjunto independente de  $G$  e  $C(G)$  para denotar o tamanho do maior clique em  $G$ .

Vejam a seguir, na Figura 2, essas definições aplicadas.

Figura 2 – Exemplo de grafo  $G$ , onde  $C(G) = 3$  e  $I(G) = 4$



Fonte: Elaboração dos autores.

Interessante observar que o assunto de grafos, apesar de ser estudado amplamente em nível de graduação, pode ser contextualizado e debatido com alunos de ensino médio. De fácil compreensão e com muitas aplicações, esse assunto pode ser explorado de diversas formas, como, por exemplo, exercícios lógicos, otimização de percurso, geometria e problemas de ligação ou coloração.

### 3 Números de Ramsey

Em Grinstead e Roberts (1982), temos uma definição para os números de Ramsey análoga à proposta por Ramsey (1930), onde troca-se a bicoloração pela concepção de conjuntos independentes e cliques. Pela conveniência dos cálculos realizados, utilizaremos a definição de Grinstead e Roberts (1982):

**Definição 3.1.** Se  $G$  é um grafo com  $C(G) < k$  e  $I(G) < l$ , e  $G$  tem  $n$  vértices e  $e$  arestas, então  $G$  será denominado de um  $(k, l, n, e)$ -grafo.

**Definição 3.2.** Dados números naturais  $k, l \geq 2$ , o **número de Ramsey**  $R(k, l)$  é o menor número inteiro  $n$  tal que não exista  $(k, l, n, e)$ -grafo.

Decorre diretamente da definição que  $R(k, l) = R(l, k)$  e  $R(2, l) = l$ .

Um grafo  $G$  de ordem  $R(k, l) - 1$  que não contém  $k$  vértices mutuamente adjacentes, nem  $l$  vértices mutuamente desconectados é chamado  $R(k, l)$ -crítico.

Pelo fato de não ter se descoberto um padrão entre os números de Ramsey ou uma relação direta entre um número  $R(k, l)$  e os valores de  $k$  e  $l$ , calcular um número de Ramsey requer um



estudo aprofundado sobre grafos. Além disso, grande parte dos números de Ramsey conhecidos foram descobertos utilizando variadas técnicas e também programas computacionais. Os resultados de  $R(s, t)$  para  $s, t \leq 10$  foram compilados a partir de Radziszowski (2021), onde se encontram os números de Ramsey atualizados e as referências para cada uma das demonstrações dos valores já descobertos (Tabela 1).

Tabela 1 – Números de Ramsey  $R(s, t)$  já determinados

| R(s, t) | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
|---------|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1       |   | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 2       | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
| 3       | 1 | 3  | 6  | 9  | 14 | 18 | 23 | 28 | 36 |    |
| 4       | 1 | 4  | 9  | 18 | 25 |    |    |    |    |    |
| 5       | 1 | 5  | 14 | 25 |    |    |    |    |    |    |
| 6       | 1 | 6  | 18 |    |    |    |    |    |    |    |
| 7       | 1 | 7  | 23 |    |    |    |    |    |    |    |
| 8       | 1 | 8  | 28 |    |    |    |    |    |    |    |
| 9       | 1 | 9  | 36 |    |    |    |    |    |    |    |
| 10      | 1 | 10 |    |    |    |    |    |    |    |    |

Fonte: Elaboração dos autores a partir de Radziszowski (2021).

Como se pode notar na Tabela 1, poucos números de Ramsey são determinados. Para os demais valores, pesquisadores obtiveram limitações, as quais auxiliam numa futura busca por esses valores.

Apresentamos a seguir duas proposições com exemplos de limitações generalizadas para números de Ramsey.

**Proposição 3.3.** (Greenwood; Gleason, 1955) O número de Ramsey  $R(s, t)$  é limitado superiormente por  $R(s, t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$ .

**Proposição 3.4.** (Spencer, 1975) Se  $4 \binom{k}{2} \binom{n}{k-2} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$ , então  $R(k, k) \geq n$ .

Notoriamente, esses são apenas dois resultados limitadores, porém muitos outros podem ser encontrados em periódicos. Apenas apresentamos esses, para que o leitor tenha conhecimento da existência de limitadores para os números de Ramsey.



**Definição 3.5.** O número  $e(k, l, n)$  é o número mínimo de arestas em qualquer  $(k, l, n, e)$ -grafo.

Alguns valores já foram determinados para  $e(k, l, n)$  e serão utilizados neste artigo. A Tabela 2 apresenta os valores de  $e(3, 9, n)$ , de acordo com Goedgebeur e Radziszowski (2013).

Tabela 2. Valores de  $e(3, 9, n)$

| $n$ | $e(3, 9, n)$ |
|-----|--------------|
| 27  | 61           |
| 28  | 68           |
| 29  | 77           |
| 30  | 86           |
| 31  | 95           |
| 32  | 104          |
| 33  | 118          |
| 34  | 129          |
| 35  | 140          |
| 36  | $\infty$     |

Fonte: Elaboração dos autores a partir de Goedgebeur e Radziszowski (2013).

Embasados nos artigos de Cariolaro (2007) e de Greenwood e Gleason (1955), definimos como objetivo da pesquisa o estudo aprofundado do número  $R(3, 10)$  e sua possível determinação, partindo pela caracterização de grafos de ordem 40. Os resultados obtidos são apresentados na próxima seção.

#### 4 Novos resultados

O número de Ramsey  $R(3, 10)$  ainda não foi descoberto, porém se conhece um pequeno intervalo de limitação para esse valor. Em Exoo (1989), provou-se que  $R(3, 10) \geq 40$  e, em Goedgebeur e Radziszowski (2013), encontrou-se um novo limite superior, determinando que  $R(3, 10) \leq 42$ . Assim, partimos de que  $40 \leq R(3, 10) \leq 42$ .

Determinamos, então, como o objetivo desta pesquisa o estudo de propriedades e características de um grafo  $G$  de ordem 40, tal que  $G$  seja livre de triângulos, isto é,  $C(G) < 3$ , e não possua conjunto independente de ordem 10, ou seja,  $I(G) < 10$ . A finalidade desse estudo é que, a partir desses resultados, possa se provar que não existe  $G$  que satisfaça essas propriedades e por-



tanto, teríamos  $R(3, 10) = 40$ , ou, caso exista um contraexemplo que satisfaça essas características, teríamos que  $R(3, 10) > 40$ .

Uma das ideias mais promissoras na tentativa de obter resultados para  $R(k, l)$  é a de selecionar um vértice preferido  $v$ . Dado um  $(k, l, n, e)$ -grafo  $G$ , e um vértice  $v$  em  $G$ , nós podemos separar  $G$  em três subgrafos: o subgrafo  $N[v]$  composto pelos vizinhos de  $v$  e por ele mesmo, o subgrafo  $H = G - N[v]$  composto pelos vértices restantes e o subgrafo  $W = \cup(N(v_i) - v)$ , onde  $v_i$  é um vizinho de  $v$  e  $W \subset H$ .

**Teorema 4.1.** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo de ordem 40, tal que  $C(G) < 3$  e  $I(G) < 10$ . Então, para todo vértice  $v \in V$ , tem-se que  $4 \leq \deg(v) \leq 9$ .*

**Demonstração.** Inicialmente, é fácil ver que, dado um vértice qualquer  $v$ , o conjunto  $N(v)$  é um conjunto independente, dado que não existe  $K_3 \in G$ . Portanto, decorre diretamente que  $\deg(v) < 10$ , dado que  $I(G) < 10$ .

Por fim, se  $\deg(v) < 4$ , temos que  $|G - N[v]| \geq 36$ . Segundo Radziszowski (2021), temos que  $R(3, 9) = 36$ . Nesse contexto, existiria um conjunto  $S$  pertencente a  $G - N[v]$  que é 9-CI. E, portanto, existiria  $S \cup \{v\} \in G$ , o qual é 10-CI, gerando um absurdo. Logo,  $4 \leq \deg(v) \leq 9$ .  $\square$

**Proposição 4.1.** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo nas mesmas condições do Teorema 4.1, e  $u$  e  $v$  dois vértices não adjacentes. Então,  $|N[u, v]| > 12$ .*

**Demonstração.** Vamos provar por absurdo que  $|N[u, v]| > 12$ . Assim, suponhamos que  $|N[u, v]| \leq 12$ . Portanto,  $|G - N[u, v]| \geq 28 = R(3, 8)$ . Então, existe  $S \subseteq G - N[u, v]$  8-CI. O que implica na existência de um 10-CI em  $G$ , dado por  $S \cup \{u, v\}$ , o que é um absurdo por hipótese.  $\square$

Para estudarmos os casos possíveis de composição das arestas de  $G$ , usaremos a definição exposta acima do conjunto  $H = G - N[v]$ . Decorre diretamente da definição e do Teorema 4.1 que:

**Proposição 4.2.** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo de ordem 40, tal que  $C(G) < 3$  e  $I(G) < 10$ . Então,  $30 \leq |H| \leq 35$ .*

**Proposição 4.3.** *Nas mesmas hipóteses do Teorema 4.1, temos que  $\deg(h) \leq 8$ , para todo vértice  $h$  em  $H$ .*

**Demonstração.** De fato, se  $\deg(h) = 9$  em  $H$ , então  $N[h] \cup v$  é um 10-CI, o que não ocorre. Logo,  $\deg(h) \leq 8$ , para todo vértice  $h$  em  $H$ .  $\square$



Vamos, agora, organizar cada caso possível de  $H$  e elencar os principais resultados para cada caso. Para isso, definimos o conjunto  $W$  da seguinte forma:

**Definição 4.4.** *Dado um vértice preferido (fixo)  $v \in V$  e denotando por  $v_i$  os vértices vizinhos de  $v$ , define-se o conjunto  $W$  como  $W = (\cup_i N(v_i)) - \{v\}$ .*

Denotaremos por  $w_i$  os elementos de  $W$ .

**Teorema 4.2.** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo de ordem 40, tal que  $C(G) < 3$  e  $I(G) < 10$ . Se  $|H| = 30$ , então  $H = W$ .*

**Demonstração.** Se  $|H| = 30$ , então temos que  $\deg(v) = 9$ . Note que o conjunto  $N(v)$  é 9-CI. Caso existisse vértice  $h \in H$  tal que  $h \notin W$ , então  $N(v) \cup \{h\}$  seria um conjunto 10-CI, o que implicaria em um absurdo, pois  $I(G) < 10$ . Assim, tem-se que  $H = W$  e, portanto, decorre o resultado esperado. □

**Teorema 4.3.** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo de ordem 40, tal que  $C(G) < 3$  e  $I(G) < 10$ . Se  $|H| = 31$ , então  $29 \leq |W| \leq 31$ .*

**Demonstração.** Como  $|H| = 31$ , temos que  $\deg(v) = 8$ . Suponhamos que  $|W| \leq 28$ . Então,  $|H - W| \geq 3 = R(3, 2)$ . Como  $G$  é livre de triângulos, temos que existe  $S \subseteq H - W$  um 2-CI. E, assim,  $S \cup N(v)$  seria um 10-CI, o que é um absurdo. Logo,  $29 \leq |W| \leq 31$ . □

**Teorema 4.4.** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo de ordem 40, tal que  $C(G) < 3$  e  $I(G) < 10$ . Se  $|H| = 32$ , então  $27 \leq |W| \leq 32$ .*

**Demonstração.** Observe que, neste caso,  $\deg(v) = 7$ . Suponha que  $|W| \leq 26$ , assim,  $|H - W| \geq 6$ . Desse modo, existe  $S \subseteq H - W$  um 3-CI. Portanto,  $S \cup N(v)$  é um 10-CI, o que não pode acontecer. Logo, temos a demonstração concluída. □

**Teorema 4.5.** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo de ordem 40, tal que  $C(G) < 3$  e  $I(G) < 10$ . Se  $|H| = 33$ , então*

(i)  $25 \leq |W| \leq 33$ ;

(ii) *os vértices de  $H$  satisfazem a seguinte condição:  $3s + 2l + t \leq 28$ , onde  $s, l, t$  representam a quantidade de vértices em  $H$  de grau 5, 6 e 7 respectivamente.*



**Demonstração.** (i) Como  $|H| = 33$ , temos que  $\deg(v) = 6$ . Suponhamos que  $|W| \leq 24$ . Então,  $|H - W| \geq 9 = R(3, 4)$ . Portanto, existe  $S \subseteq H - W$  um 4-CI, o que implica na existência de um 10-CI em  $G$  dado por  $S \cup N(v)$ . Como isso não ocorre, por hipótese, temos que  $25 \leq |W| \leq 33$ .

(ii) Primeiramente, observe que  $5 \leq \deg(h) \leq 8$ , para todo vértice  $h$  em  $H$ . De fato, se  $\deg(h) = 4$  para algum  $h \in H$ , então  $|H - N[h]| \geq 28 = R(3, 8)$ . Portanto, existe  $S \subseteq H - N[h]$  um 8-CI. E, conseqüentemente,  $S \cup \{h, v\}$  é um 10-CI, o que é um absurdo.

Logo,  $5 \leq \deg(h) \leq 8$ .

Como  $H$  tem 33 vértices, é evidente que  $s + l + t + r = 33$ , onde  $s, l, t, r$  representam a quantidade de vértices em  $H$  de grau 5, 6, 7 e 8, respectivamente.

Agora, como  $e(3, 9, 33) = 118$ , segundo a Tabela 2, temos que o número de arestas em  $H$  precisa ser maior ou igual a 118, ou seja,

$$\frac{5s + 6l + 7t + 8r}{2} \geq 118$$

Usando que  $r = 33 - s - l - t$  na desigualdade acima, temos que

$$\begin{aligned} 118 &\leq \frac{5s + 6l + 7t + 8(33 - s - l - t)}{2} \\ &= \frac{5s + 6l + 7t + 264 - 8s - 8l - 8t}{2} \\ &= \frac{-3s - 2l - t + 264}{2} \end{aligned}$$

O que resulta em

$$-3s - 2l - t + 264 \geq 236$$

$$-3s - 2l - t \geq -28$$

$$3s + 2l + t \leq 28$$

**Teorema 4.6.** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo de ordem 40, tal que  $C(G) < 3$  e  $I(G) < 10$ . Se  $|H| = 34$ , então*

(i)  $21 \leq |W| \leq 34$ ;



(ii) os vértices de  $H$  satisfazem a seguinte condição:  $2l + t \leq 14$ , onde  $l, t$  representam a quantidade de vértices em  $H$  de grau 6 e 7 respectivamente.

**Demonstração.** (i) Como  $|H| = 34$ , temos que  $\deg(v) = 5$ . Suponhamos que  $|W| \leq 20$ . Então,  $|H - W| \geq 14 = R(3, 5)$ . Portanto, existe  $S \subseteq H - W$  um 5-CI, o que implica na existência de um 10-CI em  $G$  dado por  $S \cup N(v)$ . Como isso não ocorre, por hipótese, temos que  $21 \leq |W| \leq 34$ .

(ii) Primeiramente, observe que  $6 \leq \deg(h) \leq 8$ , para todo vértice  $h$  em  $H$ . De fato, se  $\deg(h) \leq 5$  para algum  $h \in H$ , então  $|H - N[h]| \geq 28 = R(3, 8)$ . Portanto, existe  $S \subseteq H - N[h]$  um 8-CI. E, conseqüentemente,  $S \cup \{h, v\}$  é um 10-CI, o que é um absurdo.

Logo,  $6 \leq \deg(h) \leq 8$ .

Como  $H$  tem 33 vértices, é evidente que  $l + t + r = 34$ , onde  $l, t, r$  representam a quantidade de vértices em  $H$  de grau 6, 7 e 8, respectivamente.

Agora, como  $e(3, 9, 34) = 129$ , como se pode constatar na Tabela 2, temos que,

$$\frac{6l + 7t + 8r}{2} \geq 129$$

Fazendo os cálculos apropriados, chegamos em

$$2l + t \leq 14$$

**Teorema 4.7.** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo de ordem 40, tal que  $C(G) < 3$  e  $I(G) < 10$ . Se  $|H| = 35$ , então*

(i)  $H$  é  $R(3, 9)$ -crítico;

(ii)  $H$  é 8-regular.

(iii)  $5 \leq \deg(v_i) \leq 7$ , onde  $v_i, 1 \leq i \leq 4$  são os vizinhos de  $v$ .

(iv)  $20 \leq |W| \leq 24$ .

**Demonstração.** (i) A ordem de  $H$  é  $35 = R(3, 9) - 1$  e sabemos que  $H$  não possui triângulos, pois  $H \subseteq G$  e  $G$  é livre de triângulos.



Agora, só resta mostrar que  $H$  não possui 9-CI. Suponhamos, por absurdo, que  $H$  contenha um conjunto  $S$  9-CI. Então,  $S \cup v$  é um 10-CI, o que é um absurdo. Logo,  $H$  não possui 9-CI e, juntando tudo o que foi feito até aqui, temos que  $H$  é  $R(3, 9)$ -crítico.

(ii) Inicialmente, vamos mostrar que  $\deg(h) = 7$  ou  $\deg(h) = 8$ , para todo vértice  $h$  em  $H$ .  
Suponha que

$$\deg(h) \leq 6$$

Então,  $|H - N[h]| \geq 28 = R(3, 8)$ . Logo, existe  $S \subseteq H - N[h]$  um 8-CI. Assim,  $S \cup h$  é um 9-CI. O que é um absurdo, pois  $H$  é  $R(3, 9)$ -crítico. Portanto,  $\deg(h) = 7$  ou  $\deg(h) = 8$ , para todo vértice  $h$  em  $H$ .

Agora, vamos analisar o número mínimo e máximo de arestas entre os vértices em  $H$ .

O número mínimo poderia ocorrer no caso de todos os vértices terem grau 7, que será

$$\frac{35 \cdot 7}{2} = 122,5$$

Como esse número não é inteiro, o valor mínimo será 123, que ocorre quando temos 34 vértices de grau 7 e um vértice de grau 8.

O número máximo ocorre se todos os vértices tem grau 8, que será

$$\frac{35 \cdot 8}{2} = 140$$

Porém, como  $e(3, 9, 35) = 140$  (veja Tabela 2), então só existe a possibilidade de termos o número máximo de arestas, o que implica que todos os vértices em  $H$  tem grau 8, ou seja,  $H$  é 8-regular.

(iii) Observe que como  $|H| = 35$ , temos que  $\deg(v) = 4$ .

Se  $\deg(v_i) = 9$ , então  $|N(v_i) - v| = 8$  e, portanto,  $[N(v_i) - v] \cup \{v_j, v_k\}$  para  $i \neq j \neq k$  é um 10-CI, uma vez que  $N(v_i) \subseteq H$  e todos os vértices de  $H$  podem ter no máximo uma aresta com algum vértice de  $N(v)$ .

Se  $\deg(v_i) = 8$ , então  $|N(v_i) - \{v\}| = 7$  e, portanto,  $[N(v_i) - \{v\}] \cup \{v_j, v_k, v_l\}$  para  $i \neq j \neq k \neq l$  é um 10-CI, por um argumento análogo ao dado anteriormente.



Suponha agora que  $\deg(v_i) = 4$ , para algum  $i$ . Seja  $i \neq j$  e suponha que  $\deg(v_j) \leq 7$ . Então,  $|N[v_i, v_j]| \leq 12$ . E, pela Proposição 2.4, sabemos que isso não é possível. Logo,  $\deg(v_j) = 8$ , mas isso também não é possível pelo o que vimos acima. Portanto, não podemos ter  $\deg(v_i) = 4$ .

(iv) Com tudo que fizemos até aqui, temos os únicos casos possíveis

(1)  $\deg(v_1) = 5, \deg(v_2) = 7, \deg(v_3) = 7, \deg(v_4) = 7$ ;

(2)  $\deg(v_1) = 6, \deg(v_2) = 6, \deg(v_3) = 6, \deg(v_4) = 6$ ;

(3)  $\deg(v_1) = 6, \deg(v_2) = 7, \deg(v_3) = 7, \deg(v_4) = 7$ ;

(4)  $\deg(v_1) = 6, \deg(v_2) = 6, \deg(v_3) = 6, \deg(v_4) = 7$ ;

(5)  $\deg(v_1) = 6, \deg(v_2) = 6, \deg(v_3) = 7, \deg(v_4) = 7$ ;

(6)  $\deg(v_1) = 7, \deg(v_2) = 7, \deg(v_3) = 7, \deg(v_4) = 7$ .

Agora, observando o que acontece com  $W$  em cada caso, respectivamente, conclui-se que  $20 \leq |W| \leq 24$ . □

## 5 Considerações finais

De acordo com o que apresentamos na seção anterior, fica discriminado o formato de um grafo  $G$  livre de triângulos e de  $10 - CI$ . A proposta que fica em aberto é, a partir desses casos, mostrar que todas situações levam a uma contradição e, portanto, teríamos  $R(3, 10) = 40$  ou mostrar que existe um contraexemplo que satisfaça essas condições, não apresentando  $K_3$  nem um conjunto  $10 - CI$ , o que implicaria que  $R(3, 10) > 40$ .

Os estudos aqui apresentados podem ajudar e motivar pesquisadores a encontrar a solução para esse problema de Ramsey que perdura por muitos anos. Acreditamos que o desenvolvimento a seguir necessita de computação avançada, porém estes resultados apresentados são extremamente importantes para otimização na simulação computacional. Ao descrever características do grafo, é possível diminuir significativamente o tempo de simulação computacional para a varredura de todas possibilidades, caracterizando com maiores particularidades os grafos analisados.

Além disso, inúmeros números de Ramsey (inclusive com suas variações) continuam indeterminados e possíveis descobertas ou melhores limitações são de grande importância para o avanço dos



estudos na área.

Por fim, gostaríamos que este nosso artigo também fosse considerado como motivador para que professores desenvolvam pesquisas junto aos seus alunos. Foi enriquecedor ver a aprendizagem e crescimento quanto às capacidades matemáticas de alunos de 15 e 16 anos do ensino médio.

## Referências

AZEVEDO, D. S.; MEDEIROS, J. F. de; ZITZKE, D. C.; PEREIRA, R. R.; BERNARDINO, L. S. Análise de um método de coloração no estudo do número de Ramsey  $R(3,10)$ . **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 8, n. 1, p. e3001, 2022. DOI: <https://doi.org/10.35819/remat2022v8i1id4985>.

CARIOLARO, D. On the Ramsey number  $R(3,6)$ . **Australasian Journal of Combinatorics**, v. 37, p. 301-304, 2007. Disponível em: [https://ajc.maths.uq.edu.au/pdf/37/ajc\\_v37\\_p301.pdf](https://ajc.maths.uq.edu.au/pdf/37/ajc_v37_p301.pdf). Acesso em: 17 out. 2023.

DIESTEL, R. **Graph Theory**. 2. ed. eletronic edition. New York: Springer-Verlag, 2000.

EXOO, G. On Two Classical Ramsey Numbers of the Form  $R(3,n)$ . **SIAM Journal on Discrete Mathematics**, v. 2, n. 4, p. 488-490, 1989. DOI: <https://doi.org/10.1137/0402043>.

GOEDGEBEUR, J.; RADZISZOWSKI, S. P. New Computational Upper Bounds for Ramsey Numbers  $R(3,k)$ . **Electronic Journal of Combinatorics**, v. 20, n. 1, 2013. DOI: <https://doi.org/10.37236/2824>.

GREENWOOD, R. E.; GLEASON, A. M. Combinatorial Relations and Chromatic Graphs. **Canadian Journal of Mathematics**, v. 7, p. 1-7, 1955. DOI: <https://doi.org/10.4153/CJM-1955-001-4>.

GRINSTEAD, C. M.; ROBERTS, S. M. On the Ramsey numbers  $R(3,8)$  and  $R(3,9)$ . **Journal of Combinatorial Theory**, v. 33, p. 27-51, 1982.

Radziszowski, S. Small Ramsey Numbers. **The Electronic Journal of Combinatorics**. 1994. Revisão de 2021. DOI: <https://doi.org/10.37236/21>.

RAMSEY, F. P. On a Problem of Formal Logic. **Proceedings of the London Mathematical Society**, v. 2, n. 30, p. 264-286, 1930. DOI: <https://doi.org/10.1112/plms/s2-30.1.264>.

SANCHES, J. **Ferramentas probabilísticas aplicadas a problemas de coloração em grafos**. Orientador: Carlos Hoppen. 2016. 151 f. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, dez. 2016. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/153219>. Acesso em: 19 out. 2023.

SANCHES, J. **Números de Ramsey em grafos multipartidos**. Orientador: Emerson Luiz do Monte Carmelo. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.



---

SPENCER, J. H. Ramsey's Theorem: A New Lower Bound. **Journal of Combinatorial Theory**, Série A, v. 18, n. 1, p. 108-115, 1975. DOI: [https://doi.org/10.1016/0097-3165\(75\)90071-0](https://doi.org/10.1016/0097-3165(75)90071-0).

