O ensino de Geometria Fractal na Educação Básica: uma revisão sistemática de literatura

Teaching of Fractal Geometry in Basic Education: a systematic review

La enseñanza de la Geometría Fractal en la Educación Básica: una revisión sistemática de la literatura

Ângela Vieira Leonel Mossulin[1]
Centro Universitário Internacional (UNINTER), Curitiba, PR, Brasil
https://orcid.org/0000-0002-6532-0801, http://lattes.cnpq.br/7323386653212944

Luciano Frontino de Medeiros[2]
Centro Universitário Internacional (UNINTER), Curitiba, PR, Brasil
https://orcid.org/0000-0002-5947-9322, http://lattes.cnpq.br/9300962438570183

Resumo: A Geometria Fractal é uma área da Matemática que estuda as propriedades de figuras complexas que possuem grande apelo estético. Visando obter um panorama das pesquisas quanto ao ensino da Matemática envolvendo a Geometria Fractal, no âmbito da Educação Básica, apresenta-se aqui uma revisão sistemática de literatura referente ao tema, o qual se insere no contexto de um projeto de dissertação de mestrado profissional de um dos autores. As bases utilizadas foram o Portal de Periódicos da CAPES, Google Acadêmico e Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, dentro do intervalo de 2018 a 2021, obtendo-se um resultado preliminar de 862 estudos sobre o tema, dos quais 58 foram considerados relevantes. De acordo com os critérios de inclusão, permitindo teses, dissertações e artigos no âmbito da Educação Básica, obteve-se 13 estudos relevantes para os objetivos da revisão. Para a subsequente análise, estabeleceu-se a questão norteadora: "Como se dá o ensino da Geometria Fractal no Ensino Fundamental II, Ensino Médio e Educação de Jovens e Adultos?", sendo propostas 8 questões complementares que permitiram consolidar uma série de informações. Foram identificadas ainda algumas lacunas de pesquisa e aplicação promissoras para a Educação Matemática, com possibilidade de gerar conhecimentos significativos a partir do uso e aplicação da Geometria Fractal, de maneira efetiva em sala de aula.

Palavras-chave: Educação Matemática; Ensino de Matemática; Pesquisa em Matemática; Geometria Fractal.

Abstract: Fractal Geometry is an area of Mathematics that studies the properties of complex figures that have great aesthetic appeal and, therefore, have the potential to arouse the interest of students. Aiming to obtain an overview of research on the teaching of Mathematics involving Fractal Geometry, within the scope of Basic Education, a systematic review of the literature on the subject is presented here. The bases used were the CAPES Periodicals Portal, Google Scholar and the Brazilian Digital Library of Theses and Dissertations (BDTD/IBICT), within the range from 2018 to 2021, obtaining a preliminary result of 862 studies on the subject, of which 58 were considered relevant. According to the inclusion criteria, allowing theses, dissertations and articles within the scope of Basic Education, 13 studies were obtained that were relevant to the objectives of the review. For the subsequent analysis, the guiding question was established: "How is the teaching of Fractal Geometry in Elementary School II, High School and Youth and Adult Education?", being proposed 8 complementary questions that allowed consolidating a series of information. Some promising

[1] **Currículo sucinto**: Mestre em Educação e Novas Tecnologias pela UNINTER. Especialista em Ensino de Matemática e licenciada em Matemática e Ciências pela Universidade Paranaense (UNIPAR). Docente da Rede Estadual de Educação em Toledo, PR. **Contribuição de autoria**: Administração do Projeto, Análise Formal, Conceituação, Curadoria de Dados, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação, Metodologia, Recursos, Validação e Visualização. **Contato**: angela.mossulin@escola.pr.gov.br.

[2] **Currículo sucinto**: Doutor em Engenharia e Gestão do Conhecimento pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Mestre em Informática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR). Licenciado em Matemática pelo Centro Universitário Internacional (UNINTER). Professor permanente do Programa de Pós-Graduação em Educação e Novas Tecnologias do Centro Universitário Internacional. **Contribuição de autoria**: Administração do Projeto, Análise Formal, Conceituação, Escrita – Revisão e Edição, Metodologia, Validação. **Contato**: luciano.me@uninter.com.

research and application gaps for Mathematics Education were identified, with the possibility of generating significant knowledge from the use and application of Fractal Geometry, effectively in the classroom.

Keywords: Math Education; Math Teaching; Mathematics Research; Fractal Geometry.

Resumen: La Geometría Fractal es un área de las Matemáticas que estudia las propiedades de las figuras complejas que tienen un gran atractivo estético y, por tanto, tienen el potencial de despertar el interés de los estudiantes. Con el objetivo de obtener un panorama de las investigaciones sobre la enseñanza de las Matemáticas involucrando la Geometría Fractal, en el ámbito de la Educación Básica, se presenta aquí una revisión sistemática de la literatura sobre el tema. Las bases utilizadas fueron el Portal de Periódicos de la CAPES, Google Scholar y la Biblioteca Digital Brasileña de Tesis y Disertaciones (BDTD/IBICT), en el intervalo de 2018 a 2021, obteniendo un resultado preliminar de 862 estudios sobre el tema, de los cuales 58 fueron considerados importante. De acuerdo con los criterios de inclusión, admitiendo tesis, disertaciones y artículos en el ámbito de la Educación Básica, se obtuvieron 13 estudios pertinentes a los objetivos de la revisión. Para el análisis posterior se estableció la pregunta orientadora: “¿Cómo es la enseñanza de la Geometría Fractal en la Enseñanza Básica II, Secundaria y Educación de Jóvenes y Adultos?”, proponiéndose 8 preguntas complementarias que permitieron consolidar una serie de información. Se identificaron algunos vacíos prometedores de investigación y aplicación para la Educación Matemática, con la posibilidad de generar conocimiento significativo a partir del uso y aplicación de la Geometría Fractal, de manera efectiva en el aula.

Palabras clave: Educación Matemática; Enseñanza de las Matemáticas; Investigación Matemática; Geometría Fractal.

Data de submissão: 18 de outubro de 2022.

Data de aprovação: 6 de abril de 2023.

1. Introdução

A Geometria Fractal faz parte das geometrias não-euclidianas, que embora bem antes de ser reconhecida formalmente e os seus resultados apresentados ao mundo, já existia registros de que alguns povos da antiguidade, como os egípcios e os hindus, nos quais pode-se identificar o uso de estruturas fractais. Por muito tempo, essas diferentes formas matemáticas, foram denominadas de “monstros matemáticos”, pelo fato de a Geometria Euclidiana se mostrar insuficiente em descrevê-las. Isso por que, segundo o precursor da Geometria Fractal,

> Alguma razão para a geometria não descrever o formato das nuvens, das montanhas, das árvores ou a sinuosidade dos rios? Nuvens não são esferas, montanhas não são troncos de cones, árvores não são hexágonos e muito menos os rios desenham espirais (MANDELBROT, 1983, p. 1).

O nome “fractal” vem do latim *fractus* e significa “fragmentar, quebrar”, criado pelo matemático francês Benoit B. Mandelbrot em meados de 1975, registrados em seu livro “*The Fractal Geometry on Nature*” de 1982, quando seus estudos foram divulgados a partir dos denominados “fractais clássicos”, tais como o conjunto de Cantor, a curva de Hilbert, curva de Koch, o triângulo de Sierpinski, a esponja de Menger, os conjuntos de Julia e o próprio conjunto de Mandelbrot.

Antigamente, a matemática se preocupava principalmente com conjuntos e funções em que os métodos do cálculo clássico poderiam ser aplicados. Aqueles conjuntos ou funções que não eram suaves ou regulares tendiam a ser ignorados e denominados como “patológicos”, não sendo dignos de estudo, ainda que fossem considerados como curiosidades individuais e apenas raramente eram pensados como uma classe para a qual uma teoria geral poderia ser aplicável. Atualmente, os conjuntos irregulares fornecem uma representação mais vantajosa de certos fenômenos da natureza do que as figuras da geometria clássica. A geometria fractal fornece uma estrutura geral para o estudo de tais conjuntos irregulares (FALCONER, 2003, p. xvii).

A Geometria Fractal, que surgiu atrelada à recente Geometria do Caos[1], se diferencia das demais geometrias não-euclidianas principalmente pelo potencial de representar a natureza com perfeição e riqueza de detalhes.

> Na constituição de nosso mundo, da natureza em geral, por mares e oceanos, separando os continentes e ilhas, com suas costas, suas montanhas e rios, rochas, plantas e animais, e acimas as nuvens etc., temos componentes com suas formas nas quais dominam a irregularidade e o caos; tentar simplificá-las, empregando formas usuais da clássica geometria euclidiana, como triângulo, círculos, esferas, cones, etc., seria absurdamente inadequado. A geometria dos fractais pode fornecer aproximações para essas formas (BARBOSA, 2005, p. 10-11).

Quanto ao ensino de Geometria Fractal fora do contexto brasileiro, uma busca preliminar no Portal de Periódicos da CAPES, considerando trabalhos desde o ano de 1984, permitiu identificar 92 trabalhos, a partir dos termos "*fractal geometry*" E "*mathematics*" E ("*learning*" OR "*teaching*"). Ainda que fosse necessário um processo de busca em maior escala, com mais bases de dados, um resultado como esse não se reflete em uma quantidade significativa.

No contexto educacional brasileiro, o ensino de Geometria Fractal se formaliza a partir do ano 2000. Portanto, no quadro atual de professores ativos, muitos destes não tiveram contato com esse conteúdo em sua formação na graduação. Ainda que exista uma lacuna na formação dos docentes de matemática, alguns estados do Brasil já inseriram a geometria fractal em seus componentes curriculares, conforme relatam Pereira e Borges (2017),

> A temática fractal é extremamente nova no cenário educacional brasileiro, sendo trazida à tona significativamente apenas na última década (anos 2000), especialmente em nosso Estado, o Paraná. Em 2008, ela foi considerada na formulação do documento Diretrizes Curriculares Estaduais do Paraná – DCE (PARANÁ, 2008) como um tópico das Geometrias não Euclidianas, inserida ainda no conteúdo estruturante Geometrias (PEREIRA; BORGES, 2017, p. 564).

De acordo com Barbosa (2005), aprender Geometria Fractal é importante para os alunos, pois desperta a existência do senso estético e permite uma sensação de surpresa diante da ordem encontrada na desordem. Além disso, Murari (2012) ressalta o aparecimento de metodologias, relacionadas ao ensino de Geometria, que colocam a ênfase nos alunos, incentivando situações de investigação. As aulas precisam abordar situações que envolvam atividades de resolução de problemas, e novas propostas devem acentuar o valor das atividades na apropriação do saber. O autor ainda afirma que, em Geometria, os estudantes devem ser

[1] A Geometria do Caos é um ramo da matemática que estuda os objetos geométricos complexos e irregulares que surgem em sistemas dinâmicos caóticos. Ela permite que se identifiquem padrões e ordem em sistemas aparentemente aleatórios ou imprevisíveis (BARBOSA, 2005).

estimulados a explorar ideias geométricas usando materiais manipuláveis, que proporcionem condições para a descoberta sobre as relações geométricas existentes no universo.

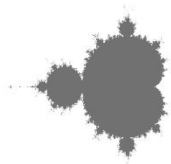
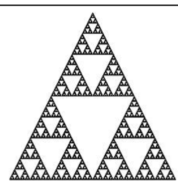
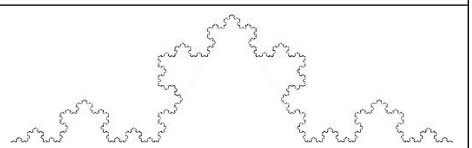
Com este quadro preliminar em mente, esta revisão sistemática objetiva descrever as pesquisas que contemplam o ensino da Geometria Fractal como objeto de estudo para os níveis finais da Educação Básica, entre os anos de 2018 a 2021, de forma a proporcionar um panorama da pesquisa neste período mais recente, visando evidenciar possíveis lacunas para abordagens inovadoras envolvendo fractais no contexto do desenvolvimento de uma dissertação de mestrado profissional.

2. O Conceito de Fractal e Tipos de Fractais

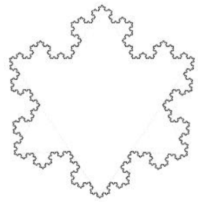
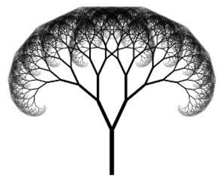
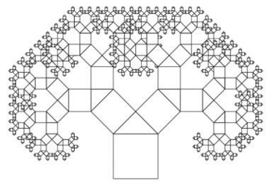
Um fractal refere-se a uma estrutura em que um padrão aparece repetidamente, a partir de uma grande escala até escalas menores, com o surgimento recorrente dos padrões iniciais ou semelhantes. Ainda que os fractais comecem com equações, eles são mais bem considerados como figuras geométricas. Existe uma diversidade de formas na natureza que apresentam comportamento quase fractal, desde flocos de neve, árvores, galáxias e ramificações de vasos sanguíneos (ROONEY, 2012). No Quadro 1, estão descritos alguns exemplos de fractais de interesse deste trabalho.

As formas fractais permitem a adoção de uma geometria na qual é possível conceber dimensões fracionárias, estando entre as dimensões inteiras presentes nos objetos da geometria euclidiana.

Quadro 1 – Tipos de fractais

Nome	Descrição	Fractal
Fractal de Mandelbrot	Gerado a partir da iteração de uma função quadrática com valores próximos de zero. Do fractal de Mandelbrot podem ser derivados os fractais denominados conjuntos de Julia.	
Triângulo de Sierpinski	Obtido removendo repetidamente (de forma invertida) triângulos equiláteros de um triângulo equilátero inicial, de comprimento de lado unitário.	
Curva de Koch	Em cada estágio, o terço médio de cada intervalo é substituído pelos outros dois lados formando um triângulo equilátero.	

MOSSULIN, Ângela Vieira Leonel; MEDEIROS, Luciano Frontino de. O ensino de Geometria Fractal na Educação Básica: uma revisão sistemática de literatura. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 2, p. e2004, 20 de setembro de 2023. https://doi.org/10.35819/remat2023v9i2id6397.

Nome	Descrição	Fractal
Floco de Neve (Koch)	Ciclo fechado, formado a partir da união de três curvas de Koch.	
Conjunto de Cantor	Fractal unidimensional construído a partir da remoção repetida do terço médio dos intervalos.	
Árvore bifurcada	O ramo inicial se divide em dois ramos, separados por ângulos iguais em relação ao ramo inicial, repetido de forma sucessiva para cada ramo criado.	
Árvore de Pitágoras	A construção tem por base as triplas pitagóricas, sendo geradas a partir de uma tripla específica, aumentando por um valor fixo predeterminado indefinidamente.	

Fonte: Elaborado pelos autores com base em Mandelbrot (1983), Falconer (2003), Taylor (2007) e Teia (2016).

3. Dimensão Fractal

O conceito de dimensão fractal desempenha um papel chave no entendimento sobre a inadequabilidade da geometria euclidiana para explicar as formas dos objetos do mundo real. Duas características qualitativas caracterizam as estruturas fractais: a autossimilaridade e a falta de suavidade. Quanto à autossimilaridade, uma estrutura fractal quando é magnificada tem a aparência de ser a mesma, não importa a escala. Com relação à falta de suavidade, os fractais sempre parecem irregulares ou desconectados (RASBAND, 2015, p. 72).

A partir dessa caracterização, a ideia de conferir uma dimensão a um objeto fractal, assim como as dimensões inteiras dos objetos da geometria euclidiana, permite estabelecer parâmetros de comparação entre estruturas clássicas e os fractais. Dessa forma, a dimensão fractal pode oferecer uma abordagem sistemática de medição de padrões irregulares (SARI; RAHARJO; NOVAMIZANTI, 2020). Uma das maneiras de medir a dimensão fractal é a dimensão de capacidade, também conhecida como dimensão de Hausdorff (ou ainda Hausdorff-Besicovitch). A dimensão Hausdorff é tomada como o limite da razão entre os logaritmos da quantidade de artefatos pelo tamanho do artefato, à medida que estes diminuem de tamanho (RASBAND, 2015, p. 73). O método computacional denominado *box counting* é um dos mais populares para o cálculo da dimensão fractal na perspectiva da dimensão de capacidade (SARI; RAHARJO; NOVAMIZANTI, 2020).

Portanto, uma estrutura fractal geralmente irá possuir uma dimensão não inteira. Enquanto um ponto geométrico tem dimensão zero, uma linha tem dimensão 1 e um plano tem dimensão 2, pode-se pensar em uma curva de linha, preenchendo densamente uma região plana, tendo uma dimensão entre 1 e 2 (OBERGUGGENBERGER; OSTERMANN, 2018). Por exemplo, uma região plana tem uma capacidade inerente de conter linhas que se desdobram em sua superfície. A medida dessa capacidade pode fornecer *insights* sobre a estrutura subjacente de um fractal, bem como permitir quantificar a comparação entre objetos distintos. Por exemplo, pode-se calcular a dimensão fractal de uma região geográfica recortada, como uma ilha (JIANG; BRANDT, 2016) ou mesmo determinar a estrutura do sistema arterial de um rim (GIL-GARCÍA; GIMENO-DOMÍNGUEZ; MURILLO-FERROLL, 1992).

4. Procedimentos Metodológicos

Uma Revisão Sistemática de Literatura (RSL) consiste em uma modalidade de pesquisa que segue protocolos bem específicos, buscando o entendimento e evidenciar alguma lógica de um corpus documental e focada no caráter de reprodutibilidade das pesquisas de uma comunidade (GALVÃO; RICARTE, 2019). Para esta RSL, adotou-se um protocolo composto dos seguintes elementos: i) pergunta norteadora; ii) questões de pesquisa; iii) elaboração das *strings* de busca; iv) critérios de inclusão e exclusão; v) escopo para a prospecção dos documentos; vi) detalhamento dos resultados; e vii) análise posterior.

> Uma revisão sistemática, assim como outros tipos de estudo de revisão, é uma forma de pesquisa que utiliza como fonte de dados à literatura sobre determinado tema. Esse tipo de investigação disponibiliza um resumo das evidências relacionadas a uma estratégia de intervenção específica, mediante a aplicação de métodos explícitos e sistematizados de busca, apreciação crítica e síntese da informação selecionada. As revisões sistemáticas são particularmente úteis para integrar as informações de um conjunto de estudos realizados separadamente sobre determinada terapêutica/ intervenção, que podem apresentar resultados conflitantes e/ou coincidentes, bem como identificar temas que necessitam de evidência, auxiliando na orientação para investigações futuras. (SAMPAIO; MANCINI, 2007, p. 84).

No que tange ao processo de revisão, iniciou-se a investigação pelo título, secundado pelo resumo dos trabalhos e, em seguida, passando-se ao exame detalhado daqueles trabalhos que se enquadram com a pesquisa. Outro ponto a ressaltar é quanto à delimitação do período em que os trabalhos foram publicados, havendo a possibilidade na RSL de se coletar os dados sobre temas de maior destaque e relevância quanto a ferramentas ou tecnologias surgidas nos últimos quatro anos.

O processo de construção da RSL teve como objetivo inicial o rastreio dos estudos sobre o ensino da Geometria Fractal. Para a obtenção das buscas, utilizou-se as palavras-chave "geometria fractal" E ("ensino médio" OU "ensino fundamental" OU "educação de jovens e adultos"). Priorizando-se o âmbito do *stricto sensu* e a prospecção de trabalhos em língua portuguesa, as bases escolhidas para o processo sistemático de busca foram o Portal de Periódicos da CAPES, Google Acadêmico e na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD/IBICT).

As pesquisas foram delimitadas nos anos de 2018 até 2021. Iniciou-se a busca a partir do Portal de Periódicos da CAPES, com o retorno de 25 estudos, cuja relevância para o trabalho priorizou apenas cinco deles. No que tange ao ensino da Geometria Fractal, constatou-se apenas um estudo, incluso nos resultados.

Entretanto, no Google Acadêmico, em uma busca preliminar, identificaram-se 832 trabalhos. Vários dos estudos estavam duplicados e, portanto, somente 50 documentos foram considerados pertinentes. Já sobre o ensino da Geometria Fractal, identificou-se 11 artigos que foram incluídos também nos resultados.

Na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD/IBICT), foram encontrados cinco estudos, dos quais apenas três se alinharam aos critérios desta proposta. Destes, apenas um foi relevante para a pesquisa. No Quadro 2, encontra-se o resumo das buscas efetuadas nas bases de dados então consideradas.

Quadro 2 – Resultado geral da busca da RSL

Site/Repositório	Trabalhos encontrados sobre todos os temas	Trabalhos analisados somente o resumo	Trabalhos incluídos, analisados na íntegra
BDTD/IBICT	05	03	01
CAPES	25	05	01
Google Acadêmico	832	50	11
Total	**862**	**58**	**13**

Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Dessa forma, a RSL, estruturando-se a partir da leitura dos resumos dos trabalhos em questão, resultou em 13 estudos que foram analisados na íntegra. No Quadro 3, é apresentada a parte do protocolo a que se referem os critérios utilizados para inclusão e exclusão dos estudos previamente selecionados.

Quadro 3 – Critérios de exclusão e de inclusão

Critérios de Inclusão	Critérios de Exclusão
1. Trabalhos completos sobre o tema desta pesquisa 2. Teses, dissertações e artigos sobre os temas 3. Geometria fractal - Ensino 4. Geometria fractal - Ensino Fundamental ou Médio ou EJA 5. Ensino Fundamental, ou Médio, ou EJA 6. Trabalhos em português	1. Trabalhos duplicados 2. Trabalhos em outras línguas 3. Trabalhos resumidos 4. Trabalhos excluídos por não indicar, no título, resumo ou palavras-chave, a relação com a abordagem de fractais na educação básica

Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

No Quadro 4, estão detalhados os trabalhos selecionados ao final dos critérios de inclusão e exclusão, adotando-se uma codificação para cada um no formato "E*n*", em que *n* é o número sequencial do estudo presente no quadro. Detalha-se, além do título, o assunto e o tipo do trabalho "(D-dissertação,T-tese e A-artigo)", nome dos autores, o ano de publicação e o repositório de origem.

Quadro 4 – Referências e resultado geral da busca da RSL

ID	Assunto	Título	Tipo	Ano	Autores	Site/ Repositório
E1	Fractal (GeoGebra, compasso e cartão fractal) para alunos do Ensino Fundamental e Médio	A geometria fractal para o ensino de diversos tópicos de Matemática no Ensino Médio	D	2022	Souza, S. P. de	Google Acadêmico
E2	Fractal (Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski, Floco de Neve de Koch, Árvore Fractal)	Uma Proposta de Abordagem da Geometria Fractal na Educação Básica	D	2019	Lisboa, M. C.	BDTD
E3	Árvore Simétrica de Pitágoras, Triângulo de Sierpinski e a Ilha de Koch (Floco de Neve)	Geometria Fractal: Abordando Conceitos a partir de Construções com o Software GeoGebra	A	2019	Aguilar, V. L.; Silva, R. C. da; Romanini, E.	Google Acadêmico
E4	Fractal (cartão fractal, Sierpinski, curva de Koch) para alunos do 1º ano do Ensino Médio	O Uso da Geometria Fractal como Ferramenta no Ensino de Progressões Geométricas e Logaritmos	D	2019	Vieira, D. C.	Google Acadêmico
E5	Árvore pitagórica a partir de imagens e GeoGebra	Teorema de Pitágoras e o Fractal Árvore Pitagórica: Um Experimento no Ensino Fundamental	A	2018	Leivas, J. C. P.; Bettin, A. D. H.	Google Acadêmico
E6	O Jogo do Caos e Fractais com Múltiplos no Triângulo de Pascal	Fractais: Possibilidades Pedagógicas na Escola Básica	A	2019	Suleiman, A. R.	Google Acadêmico
E7	Fractais clássicos, PA e PG, GeoGebra, Oficina e questionário diagnóstico	Uma Proposta de Atividades para o Estudo de Progressões Geométricas utilizando Fractais e o Software GeoGebra	D	2018	Valmorbida, J. M.	Google Acadêmico
E8	Cálculo de área, perímetro, volume, conjunto de Cantor, Tapete de Sierpinski e da esponja de Menger	A Geometria do Conjunto de Cantor, do Tapete de Sierpinski e da Esponja de Menger	D	2020	Oliveira, M. A. T. de	Google Acadêmico
E9	Degraus Fractais e Esponja de Menger	Geometria Fractal e Atividades para o Ensino de Matemática: Degraus Fractais e Esponja de Menger	D	2021	Silva, M. V. O. L. da	Google Acadêmico

E10	Fractal livre, fractal cantor com palitos e fractal Koch e lã	O Espaço de Hausdorff e a Dimensão Fractal: Estudo e Abordagens no Ensino Fundamental	D	2021	Eleutério, A. P.	Google Acadêmico
E11	Proposta de atividades com origami esponja de Menger	A Geometria Fractal no Processo de Ensino-Aprendizagem: Avaliação de Probabilidade Geométrica	D	2021	Able, S. L. R.	Google Acadêmico
E12	Construção da árvore pitagórica concreta no GeoGebra	O Fractal Árvore Pitagórica e Diferentes Representações: Uma Investigação com Alunos do Ensino Médio	A	2018	Rezende, V. *et al*.	Capes
E13	Proposta para trabalhar Árvores Bifurcadas e o Triângulo de Sierpinski com GeoGebra	Construção de Fractais Geométricos com o GeoGebra: Árvores Bifurcadas e o Triângulo de Sierpinski	A	2021	Wanderley, L. R. *et al*.	Google Acadêmico

Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

5. Detalhamento e Análise dos Estudos Selecionados

No estabelecimento de uma base para a análise nesta RSL, elaborou-se a seguinte pergunta norteadora de pesquisa: Como se dá o ensino da Geometria Fractal no ensino regular, considerando Ensino Fundamental II, Ensino Médio e Educação de Jovens e Adultos?

Como complemento à pergunta enunciada anteriormente, propõe-se as questões de pesquisa enumeradas no Quadro 5, codificadas propriamente como "Q*n*", com *n* sendo a numeração sequencial.

Quadro 5 – Questões de pesquisa

ID	Questão
Q1	Quais os principais objetivos do estudo analisado?
Q2	Como foram desenvolvidas as atividades presentes no estudo?
Q3	Quais os resultados obtidos?
Q4	Quais teorias pedagógicas são utilizadas?
Q5	Quais conhecimentos matemáticos são explorados no estudo?
Q6	Qual o público-alvo do estudo?
Q7	Que métodos foram adotados no estudo para a promoção do tema junto aos alunos?
Q8	Quais técnicas/tecnologias foram utilizadas na promoção do tema junto aos alunos?

Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

As questões Q7 e Q8 foram derivadas a partir da descrição obtida em Q2, para obtenção de um melhor detalhamento de métodos, técnicas e tecnologias utilizadas nos estudos. No Quadro 6, é apresentado, conforme a questão Q1, um mapeamento relacionado com os objetivos pretendidos nos estudos.

Quadro 6 – Principais objetivos do estudo analisado

Q1: Quais os principais objetivos dos estudos analisados?		
Cód.	**Autor**	**Objetivos**
E1	Souza, S. P. de	Utilizar a Geometria Fractal como motivadora no ensino de áreas e perímetros de figuras geométricas euclidianas; contribuir para um ensino mais prazeroso e dinâmico da Matemática aliado ao uso das tecnologias. Fixar os conceitos de logaritmo, progressão aritmética e geométrica, através de alguns fractais clássicos e outros não tão clássicos e provocar nossos alunos com algo desconhecido, “os monstros matemáticos”, mas, com a preocupação de utilizar conhecimentos matemáticos acessíveis ao Ensino Fundamental e Médio.
E2	Lisboa, M. C.	Incluir a nova geometria (Geometria Fractal) no Ensino Médio como ferramenta para auxiliar o ensino de conteúdos matemáticos, tendo em vista a possibilidade dessa ação potencializar a aprendizagem da matemática, tornando-a mais significativa para os alunos.
E3	Aguilar, V. L.; Silva, R. C. da; Romanini, E.	Apresentar uma proposta para educadores de contextualização de conceitos abordados em sala de aula, a partir da Geometria Fractal com o objetivo de fornecer um aprendizado significativo para alunos do Ensino Básico.
E4	Vieira, D. C.	Fornecer embasamento teórico e uma sequência didática que abrange diversos níveis de domínio dos conteúdos, para que professores possam trabalhar a geometria fractal como agente motivador no ensino e aprofundamento de conceitos estudados em sala de aula, abrindo também a possibilidade para a abordagem de temas como limites e convergência de sequências, ainda que de forma intuitiva.
E5	Leivas, J. C. P.; Bettin, A. D.	Utilizar noções de geometria euclidiana para alunos de um nono ano do Ensino Fundamental, a fim de perceberem a necessidade de reconhecerem alguns aspectos de geometria fractal, no intuito de compreenderem melhor o mundo em que vivem.
E6	Suleiman, A. R.	Proporcionar uma reflexão sobre as características gerais dos fractais, uma revisão bibliográfica, identificar pesquisas atuais e suas aplicações.
E7	Valmorbida, J. M.	Apresentar uma proposta de atividades para o ensino das Progressões Geométricas, por meio da construção de Fractais no Software GeoGebra.
E8	Oliveira, M. A. T. de	Exibir as propriedades do conjunto de Cantor, exploramos conteúdos presentes no Currículo Nacional do Ensino Básico de Matemática.
E9	Silva, M. V. O. L. da	Elaborar atividades didáticas a serem aplicadas em aulas de Matemática do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio.
E10	Eleutério, A. P.	Estudar a principal característica de um fractal: sua dimensão. Apontar formas de representar uma das grandezas para descrever um elemento deste tipo. Demonstrar como o cálculo dimensional consiste em uma ferramenta de caracterização de um fractal.
E11	Able, S. L. R.	Elaborar uma sequência de ensino para o Ensino Médio, destinada ao ensino-aprendizagem e avaliação de Probabilidade Geométrica, por meio de resultados gerados da Geometria Fractal, buscando identificar os principais elementos que deveriam compor a mesma.
E12	Rezende, V. *et al*.	Apresentar possibilidades para as aulas de matemática relacionadas ao uso de diferentes registros de representação semiótica aliados à Geometria dos Fractais.
E13	Wanderley, L. R. *et al*.	Apresentar dois objetos de destaque da Geometria Fractal: as Árvores Bifurcadas e o triângulo de Sierpinski.

Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Na questão Q1, foi possível identificar nos trabalhos E1, E2, E3, E4, E5, E9 a proposta da utilização da Geometria Fractal como agente motivador no ensino de áreas e perímetros, aliado ao uso das tecnologias. Em E6, os autores fazem uma reflexão sobre características gerais dos fractais e seu nível de aplicação em contextos tecnológicos. No estudo E7, apresenta-se uma proposta de atividades para o ensino das progressões geométricas, por meio da construção de fractais no software GeoGebra. Em E8, exibe-se as propriedades do conjunto de Cantor, além de apresentar o próprio fractal. Em E13, são apresentados dois objetos de destaque da Geometria Fractal: as árvores bifurcadas e o triângulo de Sierpinski. De maneira mais aprofundada quanto ao conteúdo, no estudo E10 é apresentada uma proposta de estudo da dimensão de um fractal; em E11, um trabalho com probabilidade geométrica por meio da Geometria Fractal; e, por fim, em E12, relata-se um estudo sobre o uso de diferentes registros de representação semiótica aliados à Geometria Fractal.

Assim como no Quadro 6, o Quadro 7 traz a descrição metodológica relacionada ao desenvolvimento das atividades (Q2). A coluna do autor é colocada para melhor referência ao estudo desenvolvido.

Quadro 7 – Descrição metodológica citada no estudo

Q2: Como foram desenvolvidas as atividades presentes nos estudos?		
ID	**Autor**	**Descrição das Metodologias**
E1	Souza, S. P. de	Oficinas com materiais manipuláveis aplicadas ao 7º ano e Ensino médio; construção de fractais: flor da vida; tetraedro fractal com palitos e mini-marshmallows. Desenvolvimento de atividades com o diagrama de fatores através da representação de desenhos a decomposição em fatores primos. Atividade com cartão fractal “triângulo de Sierpinski” e o cartão fractal “degraus centrais”.
E2	Lisboa, M. C.	Proposta de oficina teórico/prática não implementada que ocorreram em seis momentos: 1º momento, apresentar a sequência do triângulo de Sierpinski; 2º momento, apresentar o conceito de sequência por meio da curva do floco de neve de Koch; 3º momento, propõe apresentar a sequência, por meio de imagem, de seis números quadrados perfeitos; 4º momento, introdução às ideias de soma dos termos de uma sequência por meio de uma sequência de subdivisão proporcional de um quadrado unilateral; 5º momento, a soma dos termos de uma progressão geométrica através da árvore pitagórica. E 6º momento, a representação de probabilidades por meio do desenho da árvore de probabilidades.
E3	Aguilar, V. L.; Silva, R. C. da; Romanini, E.	Proposta de oficinas teórico/práticas não implementadas, utilizando o software GeoGebra, visando as construções clássicas relacionadas às árvore de Pitágoras, ao triângulo de Sierpinski e à ilha de Koch (Floco de Neve).
E4	Vieira, D. C.	Foi realizada uma oficina de recorte de cartões fractais; porém, num primeiro momento, houve a exposição de slides de fractais como o triângulo de Sierpinski, curva de Koch, esponja de Menger, conjunto de Julia e algumas estruturas fractais presentes na natureza. Em seguida, foram apresentados alguns tutoriais com as propriedades desses fractais, principalmente a respeito da autossimilaridade e o conceito de limite. E por fim a construção do cartão fractal degraus centrais e o cartão fractal triângulo de Sierpinski.
E5	Leivas, J. C. P.; Bettin, A. D. H.	Oficina teórica e prática com alunos do nono ano do Ensino Fundamental. Nessa proposta, realizaram atividades de classificação de figuras geométricas e de elementos da natureza, as quais permitiram agrupá-los por propriedades ou características em duas geometrias e, com exploração do recurso da fotografia, foi possível, por exemplo, identificar a característica de autossemelhança dos objetos fractais e no segundo momento no software GeoGebra a construção da árvore pitagórica.
E6	Suleiman, A. R.	Proposta não implementada de atividade envolvendo o jogo do caos e também estruturas fractais com valores múltiplos no triângulo de Pascal.

E7	Valmorbida, J. M.	Desenvolvimento de oficinas teóricas e práticas, no contraturno, com 16 alunos do 1º ano do Ensino Médio organizado em 8 encontros com o objetivo de trabalhar com o software GeoGebra para desenvolver exercícios da construção de fractais no GeoGebra: conjunto de Cantor, triângulo de Sierpinski, curva de Koch e esponja de Menger, concluindo com um questionário para avaliação dos conteúdos abordados.
E8	Oliveira, M. A. T. de	Proposta: uma oficina para construir o passo a passo de fractais clássicos. Seja através de uma reta, de um triângulo ou um quadrado, que fazem parte da geometria euclidiana estudada no ensino médio. E quando a figura já apresenta um padrão de construção, possibilita uma análise matemática de todas as relações conhecidas nos fractais.
E9	Silva, M. V. O. L. da	Desenvolvimento de oficina com alunos do Ensino Fundamental e Ensino Médio utilizando materiais manipuláveis, dobraduras para construir degraus tridimensionais da estrutura cúbica da esponja de Menger.
E10	Eleutério, A. P.	Desenvolveram-se três oficinas, com duração de 30 minutos, sendo elas: i) a Oficina 1, com a representação do meio ambiente e as formas fractais clássicas: conjunto de Cantor, curva de Koch; ii) a Oficina 2, com a construção de um fractal aleatório; e iii) a Oficina 3, com o cálculo da dimensão fractal. Nas oficinas foram os materiais pedagógicos e recursos didáticos específicos trazidos pelo pesquisador, tendo como base, tesouras, estiletes, colas, canudinhos, fios de lã.
E11	Able, S. L. R.	Proposta de oficina não implementada utilizando questões do ENEM e sua respectiva solução utilizando materiais manipuláveis, como desenhos com compasso e origami.
E12	Rezende, V. *et al*.	As tarefas foram desenvolvidas com quinze alunos do 3º ano do Ensino Médio, durante 7 aulas de matemática, em que foram desenvolvidas cinco tarefas: i) a construção da árvore pitagórica com régua e compasso; ii) a descrição dos passos de construção da árvore pitagórica; iii) cálculo de área e perímetro dos quadrados formados em cada etapa da árvore pitagórica; iv) construção da árvore pitagórica com o GeoGebra; e v) construção da árvore pitagórica com material manipulável.
E13	Wanderley, L. R. *et al*.	Proposta de oficinas não implementadas para construção de fractais no software GeoGebra.

Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

No Quadro 8, contendo os resultados obtidos que puderam ser identificados nos estudos, não estão listados os trabalhos E2**,** E3**,** E6, E11 e E13, pois configuram-se como propostas de trabalho não implementadas e não se aplicam ao objetivo da questão.

Quadro 8 – Principais metodologias e ferramentas citadas no estudo

Q3: Quais os resultados obtidos? Foram identificadas outras propostas e soluções?		
ID	**Autor**	**Descrição das Metodologias e Ferramentas**
E1	Souza, S. P. de	Utilizou a Geometria Fractal como motivadora no ensino de áreas e perímetros de figuras geométricas euclidianas e não euclidianas, os resultados apontam que a atividade possibilitou ao aluno contemplar o belo e descobrir a harmonia existente nestas figuras sem deixar de formalizar o seu conhecimento.
E4	Vieira, D. C.	Foi possível perceber uma participação significativa por parte dos alunos quando comparamos com aulas tradicionais, no desenvolvimento das atividades propostas.
E5	Leivas, J. C. P.; Bettin, A. D. H.	Os resultados da pesquisa mostraram a eficiência, tanto da Teoria de Van Hiele, quanto do software GeoGebra, na compreensão de propriedades das duas geometrias; em particular, sobre o teorema de Pitágoras, a fim de melhor compreenderem o mundo em que vivem.
E7	Valmorbida, J. M.	Observou-se o aprendizado significativo dos conceitos, sendo possível, porque a ferramenta tecnológica esteve aliada aos conteúdos, despertando o interesse e impulsionando os alunos ao estudo.
E8	Oliveira, M. A. T. de	Utilizou uma linguagem acessível aos alunos do Ensino Básico e apresentou atividades envolvendo outros fractais, obtidos de forma semelhante ao conjunto de Cantor, bem como o tapete de Sierpinski e a esponja de Menger.

E9	Silva, M. V. O. L. da	Durante as oficinas, observou-se que o sucesso na compreensão, construção e análise dos modelos fractais permitiu que surgisse nos alunos, de forma gradativa, a confiança em seus próprios conhecimentos matemáticos.
E10	Eleutério, A. P.	Para o desenvolvimento desta proposta, constatou-se que é necessário maior tempo de intervenção junto ao conceito de dimensão e apropriação algébrica para estabelecer relações na tabela. Outro elemento que dificultou o entendimento do cálculo da dimensão fractal neste nível de ensino foi o fato de os alunos não conhecerem ainda funções logarítmicas.
E12	Rezende, V. *et al*.	As análises dos registros mostraram que a implementação das tarefas possibilitou aos alunos: o estudo de diversos elementos matemáticos tais como: áreas e perímetros de quadrados e triângulos, teorema de Pitágoras, ângulos, congruência de triângulos, frações, potências, números decimais entre outros; as construções figurais da Árvore Pitagórica por meio de diferentes representações e a visualização das principais características de um fractal, bem como a compreensão de seu processo de construção.

Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Analisando-se os resultados obtidos em Q3, os estudos permitem constatar diferentes situações. Os trabalhos E2, E3, E6, E11 e E13 não apresentam resultados, pois se tratava apenas de propostas, sem implementação. Em E1, os resultados apontaram que a atividade possibilitou ao aluno contemplar o belo e descobrir a harmonia existente nestas figuras, sem deixar de formalizar o seu conhecimento, conforme a apreciação estética mencionada por Barbosa (2005). Já em E4, E7, E9 e E12, observou-se a aprendizagem significativa dos conceitos sendo possibilitada pelo uso da ferramenta tecnológica que esteve aliada aos conteúdos, despertando o interesse e motivando os alunos. No estudo E5, os resultados da pesquisa mostraram a eficiência, tanto da teoria de Van Hiele, quanto do uso do software GeoGebra, na compreensão de propriedades das duas geometrias, Geometria Fractal e Geometria Euclidiana; em particular, sobre o teorema de Pitágoras, a fim de assegurar uma melhor compreensão do mundo em que vivem. Ainda em E8, utilizou-se uma linguagem acessível aos alunos em que, além do uso do conjunto de Cantor, foram desenvolvidas atividades envolvendo outros fractais tais como o tapete de Sierpinski e a esponja de Menger. Por fim, no trabalho E10, foi relatado que é necessário maior tempo de intervenção junto ao conceito de dimensão e apropriação algébrica para estabelecer relações na tabela. Outro fator que dificultou o entendimento do cálculo da dimensão fractal neste nível de ensino foi o não conhecimento de funções logarítmicas.

O objetivo da questão Q4 busca elencar as principais teorias pedagógicas que fundamentam o trabalho dos autores. Os estudos de tais teorias serão apresentados no Quadro 9.

Quadro 9 – Teorias pedagógicas utilizadas

Q4: Quais teorias pedagógicas estão sendo utilizadas?		
ID	**Teoria Pedagógica**	**Descrição**
E2	Aprendizagem Centrada na Pessoa (Carl Rogers)	O professor passa a ser considerado um facilitador da aprendizagem, não mais aquele que transmite conhecimento, e sim aquele que auxilia os educandos a aprender a viver como indivíduos em processo de transformação. O educando é instado a buscar o seu próprio conhecimento, consciente de sua constante transformação.
E7	Sociointeracionismo (Vygotsky)	O indivíduo aprende e desenvolve-se a partir das suas interações com o outro. Ou seja, o desenvolvimento psíquico ocorre do plano interpsicológico – referente à interação com o outro – para o plano intrapsicológico – na mente do indivíduo.
E6, E8	Não foi possível identificar.	–
E3, E13	Construcionismo (Papert)	Ensinar com o objetivo de produzir a maior aprendizagem a partir do mínimo de ensino: “É construído sobre a suposição de que as crianças farão melhor descobrindo por si mesmas o conhecimento específico de que precisam” (PAPERT, 2008).
E1, E9, E10	Construtivismo (Piaget)	Propõe que o aluno participe ativamente do próprio aprendizado, mediante a experimentação, a pesquisa em grupo, o estímulo à dúvida e o desenvolvimento do raciocínio, entre outros procedimentos.
E11	Teoria dos Três Momentos Pedagógicos de Delizoicov e Angotti	Problematização inicial, organização do conhecimento e aplicação do conhecimento.
E12	Teoria dos registros de representação semiótica (Raymond Duval)	Defende que os registros externos formam um meio de proporcionar a construção da aprendizagem.
E5	Teoria de Van Hiele	O modelo sugere que os alunos progridam segundo uma sequência de níveis de compreensão de conceitos, enquanto eles aprendem geometria.

Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

A questão Q4 esteve relacionada com as teorias pedagógicas nas quais os trabalhos estavam fundamentados. Identificou-se nos estudos E3 e E13 a fundamentação proporcionada pelo Construcionismo de Papert (2008) e no estudo E2, a teoria da aprendizagem centrada na pessoa de Carl Rogers. Em E7, identificou-se a fundamentação no Sociointeracionismo de Vygotsky. Em relação a E1, E9 e E10, a pesquisa se baseia no Construtivismo de Piaget. Em E5, E11 e E12, são identificadas outras teorias, sendo a teoria de Van Hiele, a teoria dos três momentos pedagógicos de Delizoicov e Angotti, respectivamente; e a teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval. Por fim, em relação aos estudos E6, E8, não foi possível identificar alguma teoria pedagógica.

No quadro 10, estão assinalados de maneira consolidada os conteúdos matemáticos citados de forma explícita pelos autores em seus estudos, relacionados com o estudo da Geometria Fractal. Pode-se observar que o tipo de fractal mais utilizado é o triângulo de Sierpinski com 4 ocorrências, seguido do conjunto de Cantor com 3. O floco de neve de Koch, árvore bifurcada fractal, árvore pitagórica e esponja de Menger possuem pelo menos 2 ocorrências. É interessante constatar os conteúdos complementares tais como progressão geométrica com 5 ocorrências, limites com 3 ocorrências e probabilidade com 2 ocorrências. A dimensão Hausdorff e o cálculo de perímetro, área e volume fractal constaram com uma ocorrência, respectivamente.

Quadro 10 – Conteúdos matemáticos explorados

Q5: Quais conhecimentos matemáticos são exploradas nos estudos?													
Conteúdo	**E1**	**E2**	**E3**	**E4**	**E5**	**E6**	**E7**	**E8**	**E9**	**E10**	**E11**	**E12**	**E13**	**Total**
Razão e Proporção									X					**1**
Sequências		X												**1**
Teoria de Conjuntos								X						**1**
Progressão Aritmética		X												**1**
Intervalos								X						**1**
Progressão Geométrica	X	X		X			X	X						**5**
Geometria Euclidiana	X				X				X			X		**4**
Trigonometria	X													**1**
Logaritmos	X													**1**
Limites	X	X		X										**3**
Números e Funções	X	X												**2**
Medidas	X													**1**
Análise de Dados	X													**1**
Probabilidade		X									X			**2**
Triângulo de Sierpinski		X	X								X		X	**4**
Conjunto de Cantor							X	X		X				**3**
Tapete de Sierpinski		X						X						**2**
Floco de Neve de Koch		X	X											**2**
Árvore Bifurcada Fractal		X											X	**2**
Árvore Simétrica de Pitágoras			X									X		**2**
Esponja de Menger 2D e 3D								X			X			**2**
Dimensão de Hausdorff										X				**1**
Perímetro, Área, Volume Fractal						X			X		X		X	**4**

Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Na questão Q5, as áreas de conhecimento matemático que foram aproveitadas nas atividades de Geometria Fractal encontram-se no currículo escolar. Nos estudos analisados, citam-se uma série de conteúdos, particularmente da geometria euclidiana (ponto, reta, segmento, ângulos, polígonos, regiões poligonais, quadrado, triângulo, círculo, circunferência, interseção, reflexão, simetria, comprimento, perímetro, área, teorema de Pitágoras), além de outros conteúdos como números racionais e reais, intervalos, progressão geométrica, teoria de conjuntos, logaritmos, funções, noções de limites, trigonometria e medidas e análise de dados.

O mapeamento quanto ao público-alvo nos estudos é apresentado no Quadro 11. Neste, pode-se identificar diretamente que 4 estudos versaram sobre a aplicação tanto no Ensino Fundamental II quanto nos três anos do Ensino Médio.

Quadro 11 – Público-alvo

Q6: Qual o público alvo dos estudos?				
ID	**Ensino Fundamental**	**Ensino Médio**		
		1º ano	**2º ano**	**3º ano**
E1	X			X
E2, E8, E11		X	X	X
E3, E6, E9, E13	X	X	X	X
E4, E7		X		
E5, E10	X			
E12				X

Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

A questão Q6 versa sobre o público-alvo envolvido nos estudos. Em 4 estudos (E3, E6, E9 e E13) observou-se a abordagem tanto na Educação Fundamental II quanto nos três anos do Ensino Médio. Em E4 e E7, o foco foi somente no 1º ano e em E12 no 3º ano do Ensino Médio.

Em complemento ao que foi apresentado em Q2 (Quadro 7), relacionado especificamente à descrição da metodologia adotada nos estudos selecionados, o Quadro 12 aponta que, em 8 estudos (61%), foi identificada a aplicação de oficinas tanto teóricas quanto práticas. No entanto, em 5 deles (39%), houve apenas proposições de oficinas que não foram implementadas.

Quadro 12 – Quanto aos métodos utilizados no estudo

Q7: Que métodos foram adotados nos estudos para a promoção do tema junto aos alunos?	
Estudos	**Tipo de trabalho**
E1, E4, E5, E7, E8, E9, E10, E12	Oficinas teóricas e práticas
E2, E3, E6, E11, E13	Proposição de oficinas práticas não implementadas

Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Por fim, no Quadro 13, da mesma forma que o Quadro 12, detalha-se a partir da questão Q2 as técnicas e tecnologias utilizadas nos estudos, representada pela questão Q8. Destaca-se, neste detalhamento, o uso de diversos materiais, inclusive os manipuláveis, além do software

MOSSULIN, Ângela Vieira Leonel; MEDEIROS, Luciano Frontino de. O ensino de Geometria Fractal na Educação Básica: uma revisão sistemática de literatura. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 2, p. e2004, 20 de setembro de 2023. https://doi.org/10.35819/remat2023v9i2id6397.

GeoGebra, de acordo com o que foi mencionado por Murari (2012), quanto ao uso de materiais que permitem o estabelecimento das relações geométricas.

Quadro 13 – Quanto às técnicas/tecnologias utilizadas no estudo

Q8: Quais técnicas/tecnologias foram utilizadas na promoção do tema junto aos alunos?	
Estudos	**Técnicas/Tecnologias utilizadas**
E1, E11, E12	Réguas e compasso
E1, E9, E12	Materiais manipuláveis
E11	Origami
E1, E4	Cartões
E1, E9, E10	Bricolagem
E3, E5, E7, E12, E13	Software (GeoGebra)
E5	Fotografia

Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Uma análise conjunta pode ser conduzida, relacionando-se à descrição metodológica (questão Q2) com os métodos da questão Q7 e as técnicas e tecnologias na questão Q8. Constata-se que 8 de 13 estudos desenvolveram oficinas no turno ou contraturno do aluno (61%), utilizando o software GeoGebra em cinco deles (E3, E5, E7, E12, E13). Também é possível identificar em alguns projetos o uso de materiais manipuláveis e bricolagem. É interessante verificar também que E11 tratou de uma proposta para uso com questões do ENEM e ainda o uso de fotografias em E5.

6. Discussão dos Resultados

As análises preliminares abordadas anteriormente, envolvendo cada questão de forma pontual, permitem algumas constatações mais gerais. É interessante notar que todos os trabalhos considerados estavam relacionados a dissertações de mestrado e artigos publicados em revistas científicas, não sendo encontrada nenhuma tese de doutorado. Quanto ao nível de escolarização, apenas um estudo foi encontrado no âmbito da EJA, não atendendo aos critérios de inclusão (tratava-se de um trabalho de conclusão de curso) e, portanto, não fez parte do estudo.

Pode-se identificar nos resultados obtidos pelos estudos que o uso da Geometria Fractal tem cumprido seu papel, no que tange à exploração do relacionamento com a Geometria Euclidiana e outros conteúdos matemáticos. Os fractais permitiram alcançar um nível de motivação maior por parte dos alunos, indo além da percepção estética, conforme Barbosa (2005), ainda que alguns estudos tenham mencionado um tempo de intervenção maior para aprendizado de conceitos mais profundos como o de dimensão fractal, e a falta de alguma base matemática, dependendo do nível e do ano em que o aluno estivesse.

Entretanto, nota-se também que, apesar do uso de diversos conteúdos matemáticos para explicar o conceito central de Geometria Fractal, os estudos não apresentaram um relacionamento com as competências e habilidades matemáticas previstas pela BNCC, o que talvez fosse oportuno para identificar possíveis lacunas de conhecimento a serem necessárias para a aplicação da Geometria Fractal nos anos considerados. Apenas um estudo em específico foi possível constatar a exploração dos temas da Geometria Fractal relacionados com o ENEM. Isto permite relacionar com a afirmação de Pereira e Borges (2017) quanto às necessidades de formação de professores para o tema.

A preocupação dos autores dos trabalhos revisados em fundamentar os trabalhos de acordo com alguma teoria pedagógica também é algo que foi notado. Além da constatação de teorias mais tradicionais, como o Construtivismo e o Sociointeracionismo, também foi verificado o uso de teorias como o Construcionismo, que geralmente estão presentes no escopo do Pensamento Computacional, além da teoria da aprendizagem centrada na pessoa, de Rogers, e a teoria dos registros de representação semiótica de Duval.

Quanto ao aspecto metodológico, identificou-se que a maior parte dos estudos empreendeu o desenvolvimento de oficinas, enquanto alguns definiram apenas propostas de intervenção. Pode-se identificar uma lacuna quanto ao uso de outras metodologias, tais como a aprendizagem baseada em projetos, ou mesmo a abertura para atividades de gamificação e aplicação de jogos envolvendo fractais, mantendo-se a ênfase no aluno conforme mencionado por Murari (2012).

Com relação ao conteúdo propriamente dito da Geometria Fractal, os fractais mais utilizados encontrados nos estudos demonstram uma opção pela simplicidade de apresentação do conceito e facilidade de desenvolvimento com os alunos, tais como o conjunto de Cantor e o triângulo de Sierpinski. Entretanto, outros tipos de fractais de construção simples também poderiam ser abordados como, por exemplo, a curva de Peano e a curva de Hilbert.

Por fim, com relação às tecnologias utilizadas, observa-se uma predominância do software GeoGebra e o uso de materiais manipuláveis, além de materiais para bricolagem. No entanto, existe espaço para a exploração de outras tecnologias digitais, como o uso de aplicativos sobre fractais na internet, programação utilizando Scratch e a construção de fractais em ambientes lúdicos.

7. Considerações Finais

Esta RSL visou apresentar um panorama das pesquisas relacionadas com a aplicação de conteúdos de Geometria Fractal na Educação Básica, entre os anos de 2018 e 2021. Sua elaboração permitiu uma análise detalhada de 13 estudos sobre diferentes questões, desde os

MOSSULIN, Ângela Vieira Leonel; MEDEIROS, Luciano Frontino de. O ensino de Geometria Fractal na Educação Básica: uma revisão sistemática de literatura. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 2, p. e2004, 20 de setembro de 2023. https://doi.org/10.35819/remat2023v9i2id6397.

objetivos dos estudos selecionados, metodologia, resultados alcançados e teorias pedagógicas, além dos conteúdos matemáticos que foram trabalhados com o tema chave.

Pode-se concluir que existem diversas oportunidades para a abordagem da Geometria Fractal no contexto do ensino de Matemática, com o objetivo de buscar um maior envolvimento e motivação dos alunos nas atividades, envolvendo o uso de softwares para auxiliar no traçado de figuras fractais, bem como de diferentes ferramentas à disposição em sala de aula. No desenvolvimento da dissertação de mestrado que está associada a esta RSL, o aprofundamento da pesquisa seguirá esta linha de trabalho, relacionada à aplicação da Geometria Fractal em propostas de intervenção no contexto escolar, envolvendo o ensino de programação.

Por fim, conclui-se que a RSL atendeu ao seu propósito, cuja finalidade é evidenciar, a partir dos diferentes estudos abordados, como os professores pesquisadores encaram um tema desafiador que pode muito bem cativar a atenção dos alunos em sala, a partir de um conhecimento matemático bastante envolvente, como é característico da Geometria Fractal.

Referências

ABLE, S. L. R. **A geometria fractal no processo de ensino-aprendizagem-avaliação de probabilidade geométrica**. Orientador: Adilson da Silveira. 108 f. 2021. Dissertação (Mestrado em Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2021. Disponível em: http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/27029. Acesso em: 10 jul. 2022.

AGUILAR, V. L. de; SILVA, R. C. da; ROMANINI, E. Geometria Fractal: abordando conceitos a partir de construções com o software GeoGebra. **Revista Ensin@ UFMS**, v. 1, n. 4, p. 52-72, 2019. Disponível em: https://periodicos.ufms.br/index.php/anacptl/article/view/10449. Acesso em: 10 jul. 2022.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a Geometria Fractal para a Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2005.

ELEUTÉRIO, A. P. **O espaço de Hausdorff e a dimensão fractal: estudo e abordagens no Ensino Fundamental**. Orientadora: Ana Paula Tremura Galves. 105 f. 2021. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2021. DOI: https://doi.org/10.14393/ufu.di.2021.599.

FALCONER, K. **Fractal Geometry**: Mathematical Foundations and Applications. 2. ed. West Sussex-England: Wiley, 2003.

GALVÃO, M. C. B.; RICARTE, I. L. M. Revisão Sistemática da Literatura: Conceituação, Produção e Publicação. **Revista Logeion**: Filosofia da Informação, v. 6, n. 1, p. 57-73, 2019. DOI: https://doi.org/10.21728/logeion.2019v6n1.p57-73.

GIL-GARCÍA, J.; GIMENO-DOMÍNGUEZ, M.; MURILLO-FERROLL, N. L. The arterial pattern and fractal dimension of the dog kidney. **Histology and Histopathology**, v. 7, n. 4, p. 563-574, 1992. Disponível em: https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/1457978. Acesso em: 8 set. 2022.

JIANG, B.; BRANDT, S. A. A Fractal Perspective on Scale in Geography. **International Journal of Geo-Information**, v. 5, n. 95, p. 1-12, 2016. DOI: https://doi.org/10.3390/ijgi5060095.

LEIVAS, J. C. P.; BETTIN, A. D. H. Teorema de Pitágoras e o Fractal Árvore Pitagórica: Um Experimento no Ensino Fundamental. **Brazilian Journal of Education, Technology and Society**, v. 11, n. 3, p. 444-457, 2018. Disponível em: https://brajets.com/v3/index.php/brajets/article/view/462. Acesso em: 20 set. 2023.

LISBOA, M. C. **Uma proposta de abordagem da geometria fractal na educação básica**. Orientador: Alcione Marques Fernandes. 2019. 59 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal do Tocantins, Arraias, 2019. Disponível em: https://repositorio.uft.edu.br/handle/11612/2039. Acesso em: 10 jul. 2022.

MANDELBROT, B. **The Fractal Geometry of Nature**. Brattelboro, Vermont: Echo Point Books & Media LLC, 1983.

MURARI, C. Espelhos, caleidoscópios, simetrias, jogos e softwares educacionais no ensino e aprendizagem de Geometria. *In*: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (org.). **Educação Matemática**: Pesquisa em movimento. 4. ed. São Paulo: Cortez, 2012. p. 216-231.

OBERGUGGENBERGER, M.; OSTERMANN, A. **Analysis for Computer Scientists**. Foundations, Methods, and Algorithms. 2. ed. Londres: Springer-Verlag, 2018.

OLIVEIRA, M. A. T. de. **A geometria do conjunto de Cantor, do tapete de Sierpinski e da esponja de Menger**. Orientador: Marcelo Ferreira de Melo. 2020. 85 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2020. Disponível em: https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/57647. Acesso em: 10 jul. 2022.

PAPERT, S. **A Máquina das Crianças**: repensando a escola na era da informática. Porto Alegre: Artmed, 2008.

PEREIRA, T.; BORGES, F. A. A Geometria dos Fractais no Ensino de Matemática: Uma revisão bibliográfica categorizada das pesquisas brasileiras dos últimos dez anos. **Acta Scientiae**. v. 19, n. 4, p. 563-581, jul/ago. 2017. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/viewFile/2424/2525. Acesso em: 4 set. 2022.

RASBAND, S. N. **Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems**. Mineola, New York: Dover Publications Inc., 2015.

Rezende, V.; MORAN, M.; MÁRTIRES, T. M.; PAIXÃO, F. C. O Fractal Árvore Pitagórica e Diferentes Representações: uma Investigação com Alunos do Ensino Médio. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 11, n. 2, p. 160-171, 2018. Disponível em: https://jieem.pgsscogna.com.br/jieem/article/view/4616. Acesso em: 3 jul. 2022.

ROONEY, A. **A História da Matemática**. São Paulo: M. Books do Brasil, 2012.

SAMPAIO, R. F.; MANCINI, M. C. Estudos de revisão sistemática: um guia para síntese criteriosa da evidência científica. **Revista Brasileira de Fisioterapia**, São Carlos, v. 11, n. 1, p. 83-89, jan./fev. 2007. DOI: https://doi.org/10.1590/S1413-35552007000100013.

SARI, D.; RAHARJO, J.; NOVAMIZANTI, L. Cholesterol Level Detection Through Eye Image Using Fractal and Decision Tree. **IOP Conference Series**: Materials Science and Engineering, n. 982, 2020. DOI: https://doi.org/10.1088/1757-899X/982/1/012010.

SILVA, M. V. O. L. da. **Geometria fractal e atividades para o ensino de matemática: degraus fractais e esponja de Menger**. Orientadora: Simone Maria de Moraes. 2020. 73 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal da Bahia, Bahia, 2020. Disponível em: https://repositorio.ufba.br/handle/ri/33387. Acesso em: 10 jul. 2022.

SOUZA, S. P. de. **A geometria fractal para o ensino de diversos tópicos de matemática no Ensino Médio**. Orientadora: Ariane Luzia dos Santos. 2022. 85 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual Paulista, 2022. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/216640. Acesso em: 10 jul. 2022.

SULEIMAN, A. R. Fractais: Possibilidades Pedagógicas na Escola Básica. **Ensino da Matemática em Debate**, v. 6, n. 1, p. 61-83, 2019. DOI: https://doi.org/10.23925/2358-4122.2019v10i1p53-71.

TAYLOR, T. D. Golden Fractal Trees. *In*: SARHANGI, R.; BARRALO, J. **Bridges Donostia**: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture. Londres: Tarquin Publications, p. 181-188, 2007. Disponível em: https://archive.bridgesmathart.org/2007/bridges2007-181.html. Acesso em: 30 set. 2022.

TEIA, L. Anatomy of the Pythagoras' tree. **Australian Senior Mathematics Journal**, v. 30, n. 2, p. 38-47, 2016. Disponível em: https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1121416.pdf. Acesso em: 12 out. 2022.

VALMORBIDA, J. M. **Uma proposta de atividades para o estudo de progressões geométricas utilizando fractais e o software GeoGebra**. Orientadora: Rosane Rossato Binotto. 2018. 124 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal da Fronteira Sul, Chapecó, 2018. Disponível em: https://rd.uffs.edu.br/handle/prefix/2179. Acesso em: 10 jul. 2022.

VIEIRA, D. C. **O uso da geometria fractal como ferramenta no ensino de progressões geométricas e logaritmos**. Orientador: José Antonio Salvador. 2019. 90 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2019. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/11399. Acesso em: 10 jul. 2022.

Wanderley, L. R.; SOUTO, R. A.; DIDIER, M. A. C.; TANAKA, T. Y. Construção de Fractais Geométricos com o GeoGebra: Árvores Bifurcadas e o Triângulo de Sierpinski. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 104, 2021. Disponível em: https://rpm.org.br/rpm/img/conteudo/files/RPM%20-%20Fractais%20e%20GeoGebra%20-(1).pdf. Acesso em: 10 jul. 2022.