

A geometria do espaço de Minkowski e a teoria da relatividade especial

The geometry of Minkowski space and the special theory of relativity

La geometría del espacio de Minkowski y la teoría de la relatividad especial

Caio Tomás de Paula¹

Universidade de Brasília (UnB), Brasília, DF, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0003-2064-6784>,  <http://lattes.cnpq.br/3803046005556999>

Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues²

Universidade de Brasília (UnB), Brasília, DF, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-8952-0277>,  <http://lattes.cnpq.br/6564647402919278>

Resumo: A Teoria da Relatividade Especial, desde seu surgimento em 1905 com o famoso artigo “On the Electrodynamics of Moving Bodies” de Albert Einstein, tem revolucionado a maneira como o mundo é visto. Neste artigo, estudamos conceitos da geometria do espaço de Minkowski e de como a sua estrutura está relacionada com esta teoria. Exibimos alguns dos principais resultados e mostramos as implicações e as consequências físicas dos enunciados matemáticos relativos aos fenômenos relativísticos. Discorreremos também acerca do famoso Paradoxo dos Gêmeos, que evidencia a dilatação temporal, uma das consequências da Teoria da Relatividade Especial.

Palavras-chave: Relatividade Especial; Geometria de Minkowski; Paradoxo dos Gêmeos.

Abstract: The Special Theory of Relativity, since its emergence in 1905 with the famous paper “On the Electrodynamics of Moving Bodies” of Albert Einstein, has revolutionized the way we see the world. In this paper, we study concepts of the geometry of Minkowski space and how its structure is related to this theory. We also exhibit some of the main results and show the physical implications and consequences of the mathematical statements related to the relativistic phenomena. We also discuss the famous Twin Paradox, which unveils time dilation, one of the consequences of the Special Theory of Relativity.

Keywords: Special Relativity; Minkowski Geometry; Twin Paradox.

Resumen: La Teoría de la Relatividad Especial, desde su aparición en 1905 con el famoso artículo “On the Electrodynamics of Moving Bodies” de Albert Einstein, ha revolucionado la forma de ver el mundo. En este artículo estudiamos los conceptos de la geometría del espacio de Minkowski y cómo su estructura se relaci-

¹ **Currículo sucinto:** Bacharel em Matemática pela Universidade de Brasília, mestrando em Matemática pela Universidade de Brasília.

Contribuição de autoria: Conceituação, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação. **Contato:** caiot@mat.unb.br.

² **Currículo sucinto:** Bacharel e licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Uberlândia, mestre em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas, doutora em Geometria Diferencial pela Universidade de Brasília e professora do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília. **Contribuição de autoria:** Escrita – Revisão e Edição, Supervisão. **Contato:** l.m.d.a.rodriques@mat.unb.br.



ona con esta teoría. Mostramos algunos de los principales resultados y las implicaciones y/o consecuencias físicas de enunciados matemáticos relacionados con fenómenos relativistas. También discutimos sobre la famosa Paradoja de los Gemelos, que muestra la dilatación del tiempo, una de las consecuencias de la Teoría de la Relatividad Especial.

Palabras clave: Relatividad Especial; Geometría de Minkowski; Paradoja de los Gemelos.

Data de submissão: 30 de setembro de 2022.

Data de aprovação: 01 de março de 2023.

1 Introdução

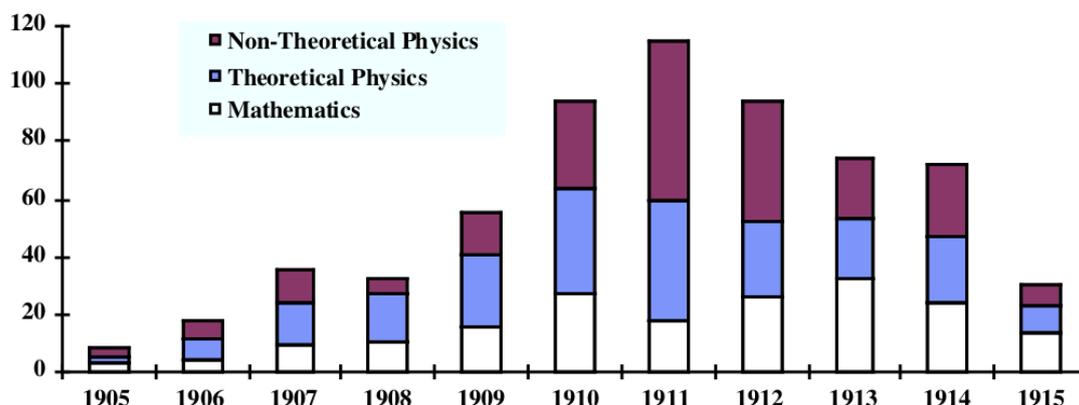
A Teoria da Relatividade Especial, ou Teoria da Relatividade Restrita, foi desenvolvida ao longo do final do século XIX e início do século XX. O principal nome responsável pela criação desta teoria foi Albert Einstein (EINSTEIN, 1905). Além dele, Henri Poincaré, Hendrik Lorentz e Hermann Minkowski foram alguns dos nomes mais intimamente envolvidos com o seu desenvolvimento e consolidação (WALTER, 1999; BROS, 2006).

Alguns historiadores alegam que Einstein desenvolveu a Teoria da Relatividade quando analisou a patente para sincronização de dois relógios situados em cidades distintas. Esse foi o primeiro passo dado em direção a essa teoria. A dilatação do tempo, prevista pela Teoria da Relatividade de Einstein, já foi observada e medida em um grande número de experimentos (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2016). Ela pode ser observada em aceleradores de partículas, relógios atômicos, satélites e raios cósmicos, que são partículas energéticas que entram na atmosfera terrestre vindas de todas as direções do Universo.

O interesse dos cientistas nesta teoria variou desde o surgimento da relatividade especial, conforme ilustra a Figura 1, onde é mostrada a quantidade de artigos publicados que tratavam da Teoria da Relatividade especial, no período de 1905 a 1915, divididos em três áreas: Física Não-Teórica, Física Teórica e Matemática. É evidente, pelo gráfico, que a partir do surgimento da teoria, em 1905, a quantidade total de artigos cresceu até o ano de 1911, sobretudo os artigos na área de Física Não-Teórica. A partir de 1912, o número total de artigos novos passou a diminuir, haja vista o surgimento da Física Quântica e também, após o ano de 1914, o começo da Primeira Guerra Mundial. Entretanto, observamos que a quantidade de artigos em Matemática se manteve razoavelmente inalterada ao longo da década representada, o que evidencia um interesse perene dos matemáticos por essa teoria.



Figura 1 – Artigos sobre a teoria da relatividade especial



Fonte: Walter (1999, p. 68).

A Teoria da Relatividade Especial tem como base dois postulados (CIPOLATTI; GONDAR, 2016, p. 166):

1. as leis da Física são as mesmas em todos os referenciais inerciais;
2. a velocidade da luz no vácuo, c , é a mesma em todas as direções, em todos os referenciais inerciais e independe do movimento da fonte.

É comum se referir ao primeiro postulado como o postulado da **relatividade**, e ao segundo como o postulado da **invariância de c** , sendo $c \approx 3 \times 10^8$ m/s a velocidade da luz no vácuo (CIPOLATTI; GONDAR, 2016, p. 166). Assumindo estes dois postulados, podemos chegar a conclusões surpreendentes (e muito contra-intuitivas!) que serão comentadas no decorrer do texto.

2 A geometria do espaço-tempo

Iniciamos definindo o chamado espaço de Minkowski, modelo para o mundo real na teoria da relatividade especial. No contexto da física-matemática, este espaço é uma combinação de um espaço euclidiano com uma dimensão extra envolvendo o tempo. Apesar de ter sido inicialmente usado por Minkowski para as equações de Maxwell do eletromagnetismo, a estrutura matemática do espaço de Minkowski se mostrou muito adequada para a teoria da relatividade especial.



Definição 2.1 (Espaço de Minkowski). *O espaço $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$, sendo $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ a chamada **métrica de Lorentz**, dada por*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_1 = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3),$$

*é chamado **espaço de Minkowski** e denotado $\mathbb{R}^{2,1}$ ou \mathbb{R}_1^3 . Denotaremos a norma de um vetor \mathbf{v} nesta métrica por*

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_1 = \|\mathbf{v}\|_1^2.$$

A rigor, a métrica de Lorentz não é de fato uma métrica, mas uma pseudo-métrica. No contexto físico, entretanto, é usual utilizar a terminologia “métrica”, e adotaremos esta convenção. Além disso, observamos que a notação $\mathbb{R}^{2,1}$ é geralmente utilizada por físicos, enquanto \mathbb{R}_1^3 é mais utilizada por matemáticos. Podemos pensar, de modo intuitivo, que $\mathbb{R}^{2,1}$ nos diz que temos três dimensões, sendo duas espaciais e uma temporal, e que \mathbb{R}_1^3 nos diz a dimensão do espaço (3) e a assinatura da métrica (1). Ao longo do texto, adotaremos a notação preferida pelos físicos.

Em $\mathbb{R}^{2,1}$, temos três tipos de vetores \mathbf{v} :

- tipo **espaço** se $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_1 > 0$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$;
- tipo **tempo** se $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_1 < 0$;
- tipo **luz** se $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_1 = 0$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Exemplos de vetores tipo espaço, tipo tempo e tipo luz são, respectivamente, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 2)$ e $(1, 1, \sqrt{2})$. Note que o conjunto dos vetores tipo luz é

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0, (x, y, z) \neq \mathbf{0}\},$$

que é chamado de **cone de luz**; o conjunto dos vetores tipo tempo é

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 < 0\},$$

ou seja, a região “de dentro” do cone; o conjunto dos vetores tipo espaço é

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 > 0 \text{ ou } x = y = z = 0\},$$

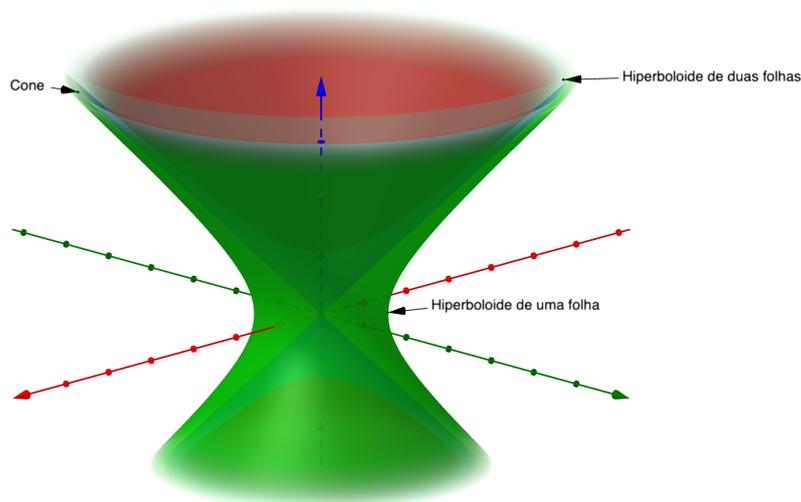
ou seja, a região “de fora” do cone acrescida da origem. Com essa métrica, naturalmente surgem conexões com geometria hiperbólica, haja vista que as “circunferências” do tipo

$$x^2 + y^2 - z^2 = -a, a > 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 - z^2 = a, a > 0$$



formam, respectivamente, hiperboloides de duas e uma folha. A Figura 2 mostra o cone de luz, um hiperboloide de uma folha e um hiperboloide de duas folhas: o hiperboloide de uma folha “envolva” o cone e o hiperboloide de duas folhas, cujo formato lembra uma bacia.

Figura 2 – Os tipos de vetores no espaço de Minkowski



Fonte: Elaboração dos autores.

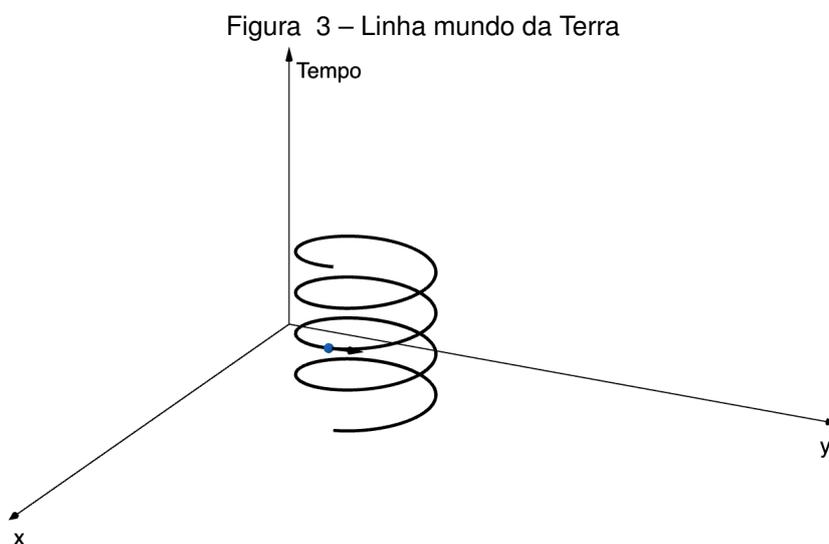
Uma interpretação física dos tipos de vetores é dada se considerarmos que a origem do sistema de coordenadas representa um observador num certo instante. O interior do cone de luz representa o conjunto dos pontos do espaço-tempo nos quais o observador poderia chegar viajando a uma velocidade inferior à velocidade da luz¹. É comum se referir a esse interior como o conjunto de pontos do **futuro do observador**. O cone de luz representa o conjunto de pontos do espaço-tempo para os quais o observador precisaria viajar à velocidade da luz para alcançar. E o exterior do cone de luz representa o conjunto dos pontos do espaço-tempo para os quais o observador teria de viajar a uma velocidade superior à da luz para atingir.

Essa observação suscita a pergunta: como se dá o movimento dos objetos neste espaço? Esta pergunta é natural, sobretudo do ponto de vista físico, pois se estamos interessados em descrever um modelo para a realidade, é necessário saber como se dá a dinâmica do movimento dos objetos neste nosso espaço. Sendo assim, a próxima definição que precisamos é a de **linha-mundo**, que corresponde à trajetória de objetos no espaço-tempo.

¹É importante notar que, no nosso contexto, temos um sistema de coordenadas tal que a velocidade da luz é 1.

Definição 2.2 (Linha-mundo). *A curva composta de pontos do espaço-tempo (**eventos**) que corresponde à história de um objeto é chamada **linha-mundo** do objeto.*

Por “história” na definição acima nos referimos a tudo que ocorre com um objeto ao longo de sua existência (ou ao longo de uma parte de sua existência, se quisermos considerar apenas uma parte da linha-mundo). A Figura 3 ilustra a definição com a linha-mundo do planeta Terra, considerando o espaço de Minkowski $\mathbb{R}^{2,1}$; nela, consideramos uma órbita circular para o planeta, de modo que a linha-mundo do planeta forma uma hélice.



Fonte: Elaboração dos autores.

Convém observar que a Definição 2.1 é facilmente generalizada para dimensões maiores: o produto interno de $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n,1}$ é dado por

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_1 = \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i \right) - x_n y_n.$$

Começamos com a definição em três dimensões porque isso nos permite visualizar o espaço e captar as ideias mais facilmente, como as Figuras 2 e 3 deixam claro. Entretanto, o espaço natural no contexto físico da relatividade especial é o $\mathbb{R}^{3,1}$, com três dimensões espaciais e uma dimensão temporal².

²Observamos que a coordenada associada ao tempo poderia ter sido escolhida como sendo a primeira, segunda ou terceira coordenadas. Desde que o sinal de menos da métrica acompanhe a coordenada escolhida para o tempo, isto não acarreta nenhum problema.



Definidas as trajetórias dos objetos, o nosso próximo passo é entender como os fenômenos físicos (eventos) se relacionam. Por exemplo, se o evento e_1 da linha-mundo da Terra corresponde à formação do planeta e o evento e_2 da mesma linha-mundo corresponde à origem da vida no planeta, precisamos saber falar, de alguma maneira, que o evento e_1 “veio antes” do evento e_2 . Dito de outro modo, precisamos saber formalizar o que entendemos como causa e efeito.

Definição 2.3 (Causalidade). *Dados dois eventos $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^{3,1}$, com $e_i = (x_i, y_i, z_i, \tau_i), i = 1, 2$, dizemos que e_1 **precede causalmente** e_2 se as seguintes condições são satisfeitas:*

1. $\tau_2 - \tau_1 \geq 0$;
2. $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - (\tau_1 - \tau_2)^2 \leq 0$.

Neste caso, escrevemos $e_1 \prec e_2$.

Adotaremos a notação da definição acima para eventos daqui em diante: x, y, z denotarão as dimensões espaciais e τ denotará a dimensão temporal. Tendo isso em mente, a interpretação da definição acima é que e_1 precede causalmente e_2 se o vetor $e_1 - e_2$ é tipo tempo e τ_2 é maior ou igual que τ_1 . Pode parecer, *a priori*, que bastaria que $\tau_2 - \tau_1 \geq 0$. Entretanto, para que haja causa e efeito é necessário que o efeito esteja no futuro da causa, ou seja, $e_2 - e_1$ seja tipo tempo, uma vez que vetores desta classe são precisamente os pontos no espaço nos quais um observador consegue chegar viajando a velocidades abaixo da velocidade da luz.

O resultado que mostraremos a seguir afirma que \prec é uma relação de ordem parcial. Ele será fundamental para mostrarmos que observadores em movimento relativo podem perceber eventos de maneiras completamente diferentes.

Proposição 2.1. *A relação de causalidade define uma relação de ordem parcial.*

Demonstração. Primeiro, note que $e_1 \prec e_1$ por definição. Ademais, se $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^{3,1}$ são tais que $e_1 \prec e_2$ e $e_2 \prec e_1$, temos

$$\tau_2 - \tau_1 \geq 0, \quad (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - (\tau_1 - \tau_2)^2 \leq 0$$

e também

$$\tau_1 - \tau_2 \geq 0, \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - (\tau_2 - \tau_1)^2 \leq 0.$$

Daí, temos $\tau_1 = \tau_2$ e, portanto,

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \leq 0,$$



de modo que $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ e $z_1 = z_2$. Logo, $e_1 = e_2$ e segue que \prec é antissimétrica.

Para demonstrar a transitividade, vamos provar, inicialmente, que se dois eventos $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^{3,1}$ são tais que $0 \prec e_1$ e $0 \prec e_2$, então

$$0 \prec e_1 + e_2. \tag{1}$$

De fato, como as coordenadas temporais de e_1 e e_2 são não negativas, o mesmo ocorre com a coordenada temporal de $e_1 + e_2$. Portanto, basta mostrarmos que

$$\|e_1 + e_2\|_1^2 \leq 0.$$

As nossas hipóteses nos dizem que, se $e_i = (x_i, y_i, z_i, \tau_i)$, então

$$\tau_i \geq 0, \quad x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \leq \tau_i^2.$$

Ora, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (BRADLEY; SANDIFER, 2009, p. 303-304) temos

$$\begin{aligned} \langle e_1, e_2 \rangle_1 &= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - \tau_1\tau_2 \\ &\leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} - \tau_1\tau_2 \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|e_1 + e_2\|_1^2 = \|e_1\|_1^2 + \|e_2\|_1^2 + 2 \langle e_1, e_2 \rangle_1 \leq \|e_1\|_1^2 + \|e_2\|_1^2 \leq 0.$$

Daí, segue a transitividade de \prec : se $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^{3,1}$ são tais que $e_1 \prec e_2$ e $e_2 \prec e_3$, então $0 \prec e_2 - e_1$ e $0 \prec e_3 - e_2$, donde segue, pela relação em (1), que $0 \prec e_3 - e_1$ ou, equivalentemente, $e_1 \prec e_3$.

□

É possível ter eventos e_1, e_2 tais que $e_1 \not\prec e_2$ mas também $e_2 \not\prec e_1$. Nesse caso, dizemos que e_1 e e_2 são **causalmente não relacionados**. Essa propriedade será relevante mais à frente, quando falarmos de mudanças de referencial. Porém, para chegar neste ponto, precisamos introduzir o que vem a ser uma isometria no espaço de Minkowski.

Definição 2.4 (Isometria). *Uma transformação $\varphi : \mathbb{R}^{3,1} \rightarrow \mathbb{R}^{3,1}$ é uma **isometria** se, dados quaisquer $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^{3,1}$, vale*

$$\|\varphi(e_2) - \varphi(e_1)\|_1^2 = \|e_2 - e_1\|_1^2.$$

Para podermos tratar a mudança de referencial de maneira matematicamente precisa, torna-se necessário definir uma classe específica de isometrias, chamadas **causais**.



Definição 2.5 (Isometrias causais). *Uma isometria $\varphi : \mathbb{R}^{3,1} \rightarrow \mathbb{R}^{3,1}$ é **causal** se preserva causalidade, isto é, se $e_1 \prec e_2$ implica $\varphi(e_1) \prec \varphi(e_2)$.*

É possível mostrar que se uma isometria φ de $\mathbb{R}^{3,1}$ não é causal, então ela inverte a causalidade, isto é, $\varphi(e_1) \succ \varphi(e_2)$ sempre que $e_1 \prec e_2$ (cf. LEE, 2020).

Exemplo 2.1. *A transformação $T_a : \mathbb{R}^{3,1} \rightarrow \mathbb{R}^{3,1}$ dada por*

$$T_a : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \tau \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \tau + a \end{pmatrix}$$

é uma isometria causal. Fisicamente, ela corresponde a andar para frente no tempo (se $a > 0$) ou para trás (se $a < 0$). Para checar que T_a é uma isometria, sejam $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^{3,1}$ quaisquer e observe que

$$\begin{aligned} \|T_a(e_2) - T_a(e_1)\|_1^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - (\tau_2 + a - \tau_1 - a)^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - (\tau_2 - \tau_1)^2 \\ &= \|e_2 - e_1\|_1^2. \end{aligned}$$

Agora, para verificarmos a causalidade, tome $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^{3,1}$ tais que $e_1 \prec e_2$. Então $T_a(e_1) = (x_1, y_1, z_1, \tau_1 + a)$ e $T_a(e_2) = (x_2, y_2, z_2, \tau_2 + a)$ e temos $T_a(e_1) \prec T_a(e_2)$ já que

$$\tau_2 + a - (\tau_1 + a) = \tau_2 - \tau_1 \geq 0.$$

Além disso, temos também

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - (\tau_1 + a - \tau_2 - a)^2 = \|e_2 - e_1\|_1^2 \leq 0$$

já que $e_1 \prec e_2$.

Para o próximo exemplo de isometria causal, vamos precisar do seguinte lema auxiliar.



Lema 2.1 (TOJO, 2016, p. 578). *Dados $a, b, t, \omega \in \mathbb{R}$, temos*

$$a \cosh \omega t + b \sinh \omega t = \begin{cases} \sqrt{|a^2 - b^2|} \cosh \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{a+b}{a-b} \right| + \omega t \right), & \text{se } a > |b| \\ -\sqrt{|a^2 - b^2|} \cosh \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{a+b}{a-b} \right| + \omega t \right), & \text{se } -a > |b| \\ \sqrt{|a^2 - b^2|} \sinh \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{a+b}{a-b} \right| + \omega t \right), & \text{se } b > |a| \\ -\sqrt{|a^2 - b^2|} \sinh \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{a+b}{a-b} \right| + \omega t \right), & \text{se } -b > |a| \\ ae^{\omega t}, & \text{se } a = b \\ ae^{-\omega t}, & \text{se } a = -b. \end{cases} \quad (2)$$

Exemplo 2.2 (Lorentz boost). *A transformação $B_\lambda : \mathbb{R}^{3,1} \rightarrow \mathbb{R}^{3,1}$ dada por*

$$B_\lambda : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \tau \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \cosh \lambda + \tau \sinh \lambda \\ y \\ z \\ x \sinh \lambda + \tau \cosh \lambda \end{pmatrix}$$

é uma isometria causal. Fisicamente, esta transformação corresponde a uma mudança de referencial, isto é, uma mudança de observador.

Para verificar que, de fato, esta transformação é uma isometria causal, usamos o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ e a identidade

$$\cosh^2 \lambda - \sinh^2 \lambda = 1, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

para deduzir que a distância entre as imagens de dois pontos $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^{3,1}$ por B_λ é

$$\begin{aligned} \|B_\lambda(e_2) - B_\lambda(e_1)\|_1^2 &= (x_1 \cosh \lambda + \tau_1 \sinh \lambda - x_2 \cosh \lambda - \tau_2 \sinh \lambda)^2 \\ &\quad + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \\ &\quad - (x_1 \sinh \lambda + \tau_1 \cosh \lambda - x_2 \sinh \lambda - \tau_2 \cosh \lambda)^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 \cosh^2 \lambda + (\tau_1 - \tau_2)^2 \sinh^2 \lambda + 2(x_1 - x_2)(\tau_1 - \tau_2) \sinh \lambda \cosh \lambda \\ &\quad + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \\ &\quad - (x_1 - x_2)^2 \sinh^2 \lambda - (\tau_1 - \tau_2)^2 \cosh^2 \lambda - 2(x_1 - x_2)(\tau_1 - \tau_2) \sinh \lambda \cosh \lambda \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - (\tau_1 - \tau_2)^2 \\ &= \|e_2 - e_1\|_1^2. \end{aligned}$$

Portanto, B_λ é uma isometria. A conta acima garante a validade da segunda condição da Definição 2.3. Para verificarmos a primeira condição, precisamos mostrar que se $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^{3,1}$ são tais que



$e_1 \prec e_2$, então

$$x_2 \sinh \lambda + \tau_2 \cosh \lambda - x_1 \sinh \lambda - \tau_1 \cosh \lambda \geq 0,$$

ou seja, que

$$(\tau_2 - \tau_1) \cosh \lambda + (x_2 - x_1) \sinh \lambda \geq 0.$$

Note que a hipótese $e_1 \prec e_2$ nos diz que

$$\tau_2 - \tau_1 \geq |x_2 - x_1|.$$

Se valer a igualdade, então pelo Lema 2.1 temos

$$(\tau_2 - \tau_1) \cosh \lambda + (x_2 - x_1) \sinh \lambda = (\tau_2 - \tau_1)e^{\pm\lambda} \geq 0.$$

Se valer a desigualdade estrita, então novamente pelo Lema 2.1 temos

$$(\tau_2 - \tau_1) \cosh \lambda + (x_2 - x_1) \sinh \lambda = \sqrt{(\tau_2 - \tau_1)^2 - (x_2 - x_1)^2} \cosh \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\tau_2 - \tau_1 + x_2 - x_1}{\tau_2 - \tau_1 - x_2 + x_1} \right) + \lambda \right] \geq 0,$$

onde a positividade do argumento do logaritmo vem do fato que $\tau_2 - \tau_1 > |x_2 - x_1|$, e a positividade da combinação de \sinh e \cosh vem do fato que $\cosh a > 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Portanto, concluímos que B_λ de fato é uma isometria causal.

Para enunciar a nossa próxima proposição, precisamos da seguinte definição.

Definição 2.6 (Direção temporal). Dizemos que $e_1 = (x, y, z, \tau) \in \mathbb{R}^{3,1}$ é **direcionado para o futuro** se $\tau > 0$. Se $\tau < 0$, dizemos que e_1 é **direcionado para o passado**.

Com a relação de causalidade entre eventos bem estabelecida e dada a definição de direção temporal, temos o seguinte resultado que formaliza o que é comumente chamado de relatividade da simultaneidade. A demonstração não será apresentada (cf. LEE, 2020, p. 199-200).

Proposição 2.2 (Relatividade da simultaneidade). Se dois eventos $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^{3,1}$ são causalmente não relacionados, então existem isometrias causais φ_1, φ_2 e φ_3 tais que

- $\varphi_1(e_1) - \varphi_1(e_2)$ é direcionado para o passado;
- $\varphi_2(e_1)$ e $\varphi_2(e_2)$ têm a mesma coordenada temporal;
- $\varphi_3(e_1) - \varphi_3(e_2)$ é direcionado para o futuro.



O significado físico desse resultado é marcante: estamos dizendo que, se dois eventos não têm relação causal, então é possível encontrar três referenciais distintos de modo que cada um percebe uma ordem diferente de ocorrência dos eventos. Se, digamos, o evento e_1 é a formação de uma galáxia, como a ilustrada na Figura 4, e o evento e_2 é a colisão de dois planetas, e esses dois eventos não têm relação causal entre si, então

- no referencial 1 a formação da galáxia ocorre antes da colisão dos planetas;
- no referencial 2, a formação da galáxia e a colisão dos planetas ocorrem ao mesmo tempo;
- no referencial 3, a formação da galáxia ocorre depois da colisão dos planetas.

Figura 4 – Imagem da galáxia *carthweel* (roda de carruagem, em português)



Fonte: NASA's James Webb Telescope. Disponível em:

<https://www.flickr.com/photos/nasawebbtelescope/52258939646/in/album-72177720301006030>.

Até agora, falamos da relação de causalidade entre eventos de $\mathbb{R}^{3,1}$. Será de nosso interesse considerar trajetórias no espaço-tempo e, por isso, precisamos saber falar de causalidade de curvas, e não somente de pontos.



Definição 2.7 (Causalidade de curvas). *Uma curva é **causal** se todo par de eventos sobre ela tem relação causal. A parametrização mais natural é a “direcionada para o futuro” (respectivamente, passado), isto é, a parametrização $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t), \tau(t))$ tal que*

$$\frac{d\tau(t)}{dt} > 0 \left(\text{respectivamente, } \frac{d\tau(t)}{dt} < 0 \right), \forall t.$$

Assim como falamos de tipos de vetores, é possível falar de tipos de curvas.

Definição 2.8 (Tipos de curvas). *Dada uma curva parametrizada regular $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^{3,1}$, dizemos que*

- γ é **tipo espaço** se $\gamma'(t)$ é tipo espaço para todo $t \in I$;
- γ é **tipo tempo** se $\gamma'(t)$ é tipo tempo para todo $t \in I$;
- γ é **tipo luz** se $\gamma'(t)$ é tipo luz para todo $t \in I$.

Exemplo 2.3. *Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3,1}$ dada por $\gamma(t) = (ht, 5, r \cosh t, r \sinh t)$, com $h, r > 0$. Temos*

$$\gamma'(t) = (h, 0, r \sinh t, r \cosh t) \implies \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_1 = h^2 - r^2.$$

Tal curva, portanto, pode ser tipo tempo, tipo luz ou tipo espaço, a depender se $h < r$, $h = r$ ou $h > r$, respectivamente.

A próxima proposição apresenta um fato curioso: não importa como escolhermos parametrizar um curva causal, esta parametrização sempre será ou direcionada para o futuro ou direcionada para o passado (desde que a parametrização seja regular). Ela é o primeiro indício que nos permitirá relacionar curvas causais e linhas mundo.

Proposição 2.3 (Parametrização de curvas causais). *A parametrização regular de uma curva causal ou é direcionada para o passado ou é direcionada para o futuro.*

Demonstração. Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t), \tau(t)) = (\alpha(t), \tau(t))$ uma parametrização de uma curva causal, sendo $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$.

Suponha que existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\tau'(t_0) = 0$. Como a parametrização é regular, ou seja, $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, segue que pelo menos um entre

$$x'(t_0), \quad y'(t_0), \quad z'(t_0)$$



é não nulo. Sem perda de generalidade, suponhamos $x'(t_0) \neq 0$. Por continuidade, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$|x'(t)| > \frac{|x'(t_0)|}{2}, \quad |\tau'(t)| < \frac{|x'(t_0)|}{2},$$

para todo $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. Pelo Teorema do Valor Médio, existem $t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$ tais que

$$\frac{x(t_0 + \varepsilon) - x(t_0)}{\varepsilon} = x'(t_1), \quad \frac{\tau(t_0 + \varepsilon) - \tau(t_0)}{\varepsilon} = \tau'(t_2).$$

Portanto,

$$\|\alpha(t_0 + \varepsilon) - \alpha(t_0)\|^2 \geq |x(t_0 + \varepsilon) - x(t_0)|^2 = \varepsilon^2 |x'(t_1)|^2 > \varepsilon^2 \frac{|x'(t_0)|^2}{4} \tag{3}$$

e também

$$(\tau(t_0 + \varepsilon) - \tau(t_0))^2 = \varepsilon^2 (\tau'(t_2))^2 < \varepsilon^2 \frac{|x'(t_0)|^2}{4}. \tag{4}$$

Agora, observe que $\gamma(t_0 + \varepsilon)$ e $\gamma(t_0)$ são causalmente relacionados e, portanto,

$$\|\gamma(t_0 + \varepsilon) - \gamma(t_0)\|_1^2 \leq 0. \tag{5}$$

Mas das Equações (3) e (4) segue que

$$\begin{aligned} \|\gamma(t_0 + \varepsilon) - \gamma(t_0)\|_1^2 &= \|\alpha(t_0 + \varepsilon) - \alpha(t_0)\|^2 - (\tau(t_0 + \varepsilon) - \tau(t_0))^2 \\ &> \varepsilon^2 \frac{|x'(t_0)|^2}{4} - \varepsilon^2 \frac{|x'(t_0)|^2}{4} \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que contradiz a Equação (5). Logo, $\tau'(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e, por continuidade, essa derivada nunca muda de sinal, sendo sempre positiva ou sempre negativa. □

Com o resultado da Proposição 2.3, seria razoável concluir que toda curva causal é linha mundo de um observador, ou seja, que toda curva causal é uma trajetória no espaço-tempo que alguém poderia realizar. Essa conclusão, apesar de intuitiva, deixa escapar uma nuance: as curvas tipo luz.

As próximas duas proposições caracterizam, respectivamente, as curvas causais e as linhas mundo e nos permitirão relacionar estes dois objetos.

Proposição 2.4 (Caracterização de curvas causais). *Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^{3,1}$ é causal se, e só se, $\gamma'(t)$ não é do tipo espaço.*

Demonstração. Suponhamos que γ é causal. Então, para qualquer Δt , temos

$$\|\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t)\|_1^2 \leq 0$$



e também

$$\|\gamma'(t)\|_1^2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \frac{\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t)}{\Delta t} \right\|_1^2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\|\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t)\|_1^2}{|\Delta t|^2} \leq 0,$$

ou seja, $\gamma'(t)$ não é do tipo espaço.

Reciprocamente, suponha que $\gamma'(t)$ não é do tipo espaço, ou seja, $\|\gamma'(t)\|_1^2 \leq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Escreva $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t), \tau(t)) = (\alpha(t), \tau(t))$.

Afirmamos que $\tau'(t)$ não muda de sinal em (a, b) . De fato, suponha que exista $t^* \in I$ tal que $\tau'(t^*) = 0$. Nesse caso, teríamos

$$0 \geq \|\gamma'(t^*)\|_1^2 = \|\alpha'(t^*)\|^2 - |\tau'(t^*)|^2 = \|\alpha'(t^*)\|^2 \geq 0,$$

ou seja, $\|\alpha'(t^*)\|^2 = 0$ e, portanto, $\gamma'(t^*) = 0$, contrariando a regularidade de γ . Logo, $\tau'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, ou seja, $\tau'(t)$ não muda de sinal em I . Portanto, vale a igualdade

$$\int_a^b |\tau'(t)| dt = \left| \int_a^b \tau'(t) dt \right|.$$

Além disso, sabemos da geometria euclidiana que o comprimento de α entre a e b deve ser maior ou igual que a distância euclidiana entre $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$, ou seja,

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt \geq \|\alpha(a) - \alpha(b)\|.$$

Por hipótese,

$$\|\gamma'(t)\|_1^2 \leq 0 \iff \|\alpha'(t)\|^2 - |\tau'(t)|^2 \leq 0 \iff \|\alpha'(t)\| \leq |\tau'(t)|.$$

Portanto,

$$\|\alpha(a) - \alpha(b)\| \leq \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt \leq \int_a^b |\tau'(t)| dt = \left| \int_a^b \tau'(t) dt \right| = |\tau(b) - \tau(a)|,$$

que é equivalente a

$$\|\alpha(a) - \alpha(b)\|^2 - (\tau(b) - \tau(a))^2 \leq 0,$$

ou seja, γ é causal. □

A próxima proposição caracteriza as curvas que podem ser linhas mundo de um observador. O seu enunciado é intuitivo. De fato, sabemos que a linha mundo de um observador deve ser uma curva causal, pois, do contrário, não haveria causa e efeito na história do mesmo. Portanto, sabemos que ou a linha mundo é tipo luz ou é tipo tempo, pela Proposição 2.4. As curvas tipo luz são eliminadas porque uma curva desse tipo corresponde a um movimento na velocidade da luz, o que não é possível para observadores. Portanto, restam apenas as curvas tipo tempo!

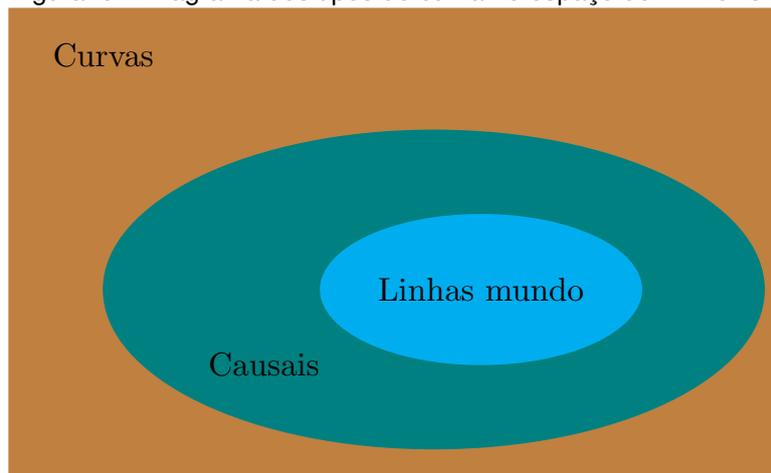


Proposição 2.5 (Caracterização de linhas mundo). *Uma curva é linha mundo de um observador se, e só se, ela é do tipo tempo.*

A demonstração desse resultado foge do escopo deste trabalho e, portanto, não será abordada aqui, mas pode ser encontrada em Naber (2012).

Além disso, as Proposições 2.4 e 2.5 nos permitem fazer o diagrama esquemático do conjunto de curvas no espaço de Minkowski como na Figura 5. O interior do retângulo representa o conjunto de todas as curvas, enquanto que os interiores das elipses representam o conjunto das curvas causais e o conjunto das linhas mundo. As duas proposições acima nos dizem que as curvas contidas na região interior ao retângulo e exterior às elipses são precisamente as curvas do tipo espaço; as curvas contidas no interior da elipse maior e que estão fora da elipse menor são as tipo luz e, por fim, as curvas contidas no interior da elipse menor são exatamente as curvas tipo tempo.

Figura 5 – Diagrama dos tipos de curva no espaço de Minkowski



Fonte: Elaboração dos autores.

Ademais, observamos que se l é uma reta do tipo tempo, e_1 e e_2 são eventos sobre l e φ é a isometria causal associada ao observador cuja linha mundo é l , então é possível mostrar que

$$\varphi^{-1}(e_1) = (0, 0, 0, \tau_1), \quad \varphi^{-1}(e_2) = (0, 0, 0, \tau_2) \tag{6}$$

para algum par $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$ (cf. LEE, 2020, p. 201-202). Os eventos e_1 e e_2 ocorrem nos instantes τ_1 e τ_2 , respectivamente, de acordo com o observador. Portanto, o tempo transcorrido para o observador entre esses dois eventos é $|\tau_2 - \tau_1|$. Note que

$$-(\tau_2 - \tau_1)^2 = \|\varphi^{-1}(e_2) - \varphi^{-1}(e_1)\|_1^2 = \|e_2 - e_1\|_1^2 < 0$$



pois φ é uma isometria causal associada a uma linha-mundo l , que é uma curva tipo tempo. Logo,

$$|\tau_2 - \tau_1| = \sqrt{-\|e_2 - e_1\|_1^2}. \tag{7}$$

Essa identidade relaciona o tempo que um observador percebe passar entre dois eventos com a distância entre esses eventos e será usada na demonstração da próxima proposição. Antes disso, precisamos de uma última definição, que nos dará os termos adequados para a proposição.

Definição 2.9 (Comprimento de curvas). *Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{3,1}$ é uma curva tipo espaço, então*

$$\ell_R(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\left\| \frac{d\gamma(t)}{dt} \right\|_1^2} dt$$

é o comprimento relativístico de γ ; se γ é tipo tempo, seu comprimento relativístico é dado por

$$\ell_R(\gamma) = \int_a^b \sqrt{-\left\| \frac{d\gamma(t)}{dt} \right\|_1^2} dt.$$

Quando γ é uma curva tipo tempo, como foi o caso da reta l que consideramos acima, é comum chamar o comprimento relativístico de **tempo próprio**, ou seja, o tempo que o observador percebe passar.

Proposição 2.6 (Tempo próprio). *Seja $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^{3,1}$ uma linha mundo tal que $\gamma(t_1) = e_1$ e $\gamma(t_2) = e_2$. O tempo próprio transcorrido entre e_1 e e_2 é tal que*

$$\ell_R(\gamma) \leq \sqrt{-\|e_1 - e_2\|_1^2}, \tag{8}$$

e a igualdade ocorre se, e só se, γ é um segmento de reta entre e_1 e e_2 .

Demonstração. Seja $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^{3,1}$ uma linha mundo com $\gamma(t_1) = e_1$ e $\gamma(t_2) = e_2$. Vamos considerar o segmento de reta l pelos eventos e_1 e e_2 , de modo a podermos usufruir da relação (7). Sabemos que l é do tipo tempo e, pela Proposição 2.5, existe um observador cuja linha mundo é l . Seja φ a isometria causal correspondente a este observador. Ora, então por (6), temos

$$\varphi^{-1}(e_1) = (0, 0, 0, \tau_1), \quad \varphi^{-1}(e_2) = (0, 0, 0, \tau_2).$$

Note, ainda, que

$$\ell_R(\gamma) = \ell_R(\varphi^{-1}(\gamma)),$$

onde a distância é medida entre t_1 e t_2 . Seja

$$\varphi^{-1}(\gamma(t)) = (x(t), y(t), z(t), \tau(t)).$$



Então, usando a Proposição 2.3 e a equação (7), temos

$$\begin{aligned}
 \ell_R(\gamma) &= \ell_R(\varphi^{-1}(\gamma)) \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{-\left\| \frac{d\varphi^{-1}(\gamma(t))}{dt} \right\|_1^2} dt \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{-(x'(t))^2 - (y'(t))^2 - (z'(t))^2 + (\tau'(t))^2} dt \\
 &\leq \int_{t_1}^{t_2} |\tau'(t)| dt \\
 &= \left| \int_{t_1}^{t_2} \tau'(t) dt \right| \\
 &= |\tau_2 - \tau_1| \\
 &= \sqrt{-\|e_1 - e_2\|_1^2},
 \end{aligned}$$

mostrando a validade da desigualdade em (8).

Para a segunda parte da proposição, observe que a igualdade só vale se

$$x'(t) = y'(t) = z'(t) = 0, \forall t \in [t_1, t_2].$$

Nesse caso, temos $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ constantes em todo o intervalo $[t_1, t_2]$ e, portanto,

$$\ell_R(\gamma) = \sqrt{-\|e_1 - e_2\|_1^2} = |\tau(t_1) - \tau(t_2)|,$$

de modo que γ é um segmento de reta. □

Essa proposição nos diz que um observador em movimento observa seu relógio andar mais devagar do que o relógio de um observador em repouso. Essa é uma das primeiras consequências dos postulados da teoria da relatividade especial, chamada **dilatação temporal**.

Para ilustrar, considere dois observadores em referenciais S e S' tais que o observador em S está em repouso e o observador em S' se move com velocidade constante e igual a v , com $v < c$, em relação a S . O observador em S' carrega consigo um relógio, que está escondido do observador em S . No instante t'_1 , o observador em S' deixa o relógio à mostra para o observador em S , que anota o instante de tempo t_1 em que isso ocorre. Depois disso, o observador em S' guarda o relógio num instante t'_2 , e o observador em S anota o instante t_2 em que isso ocorre. O intervalo de tempo que o relógio ficou à mostra é o mesmo para ambos os observadores? A resposta é não! De fato, vale a igualdade

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{9}$$



sendo v a velocidade de S' e c a velocidade da luz. Uma demonstração da identidade (9) pode ser encontrada em (CIPOLATTI; GONDAR, 2016, p. 164-167). Essa identidade nos mostra que o observador em repouso percebe o tempo passar mais rapidamente do que o observador em movimento, ele perceberia o seu relógio se adiantar em relação ao relógio do observador em S' .

Além disso, podemos imaginar uma barra rígida que se encontra em repouso no referencial S' . Digamos que, para S' , a barra tem comprimento ℓ' . É possível mostrar que o comprimento ℓ da barra para um observador em S é dado por

$$\ell = \ell' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (10)$$

sendo v a velocidade de S' e c a velocidade da luz. Dito de outro modo, o observador em S vê a barra com um comprimento menor do que o medido em S' . Esse fenômeno é conhecido como **contração de Lorentz-FitzGerald**, e uma prova da identidade (10) pode ser encontrada em Cipolatti e Gondar (2016, p. 164-167).

Esses dois fenômenos respondem o paradoxo dos gêmeos, discutido na seção a seguir.

3 O paradoxo dos gêmeos

Vamos tratar, brevemente, do chamado paradoxo dos gêmeos. Esse “experimento idealizado” foi proposto pelo físico francês Paul Langevin (1872 - 1946), que o enunciou durante a Primeira Conferência de Solvay, realizada no ano de 1911 em Bruxelas (CIPOLATTI; GONDAR, 2016, p. 186).

O “experimento” consiste no seguinte: imagine dois gêmeos, um na Terra (B) e outro numa espaçonave (A). O irmão A faz uma viagem até uma estrela a 4 anos-luz de distância da Terra e volta, mantendo velocidade constante de $v = 0,8c$ ao longo de toda a viagem. Como cada gêmeo percebe a passagem de tempo?

Primeiro, note que para B a viagem dura um intervalo de tempo Δt_B dado por

$$\Delta t_B = \frac{\Delta t_A}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

sendo Δt_A o intervalo de tempo que a viagem dura para o referencial S' (A), irmão gêmeo na espaçonave. Como a distância de 4 anos-luz é medida em relação à Terra, o intervalo de tempo Δt_B



para o referencial S (B), irmão gêmeo na Terra, é dado por

$$\Delta t_B = \frac{d_B}{v} = \frac{2 \cdot 4 \text{ anos} \cdot c}{0.8 \cdot c} = 10 \text{ anos.}$$

Agora podemos usar a fórmula de dilatação temporal para calcular o intervalo de tempo Δt_A para o referencial S' , obtendo

$$\Delta t_A = \Delta t_B \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 10 \sqrt{1 - 0.64} = 6 \text{ anos,}$$

o que totaliza uma diferença de 4 anos!

4 Conclusão

Neste trabalho, apresentamos alguns dos principais resultados da Teoria da Relatividade Especial utilizando conceitos da Geometria do Espaço de Minkowski. Além disso, buscamos evidenciar as consequências e implicações físicas dessa teoria por meio dos enunciados matemáticos que decorrem dos dois postulados que a fundamentam. Mostramos que a causalidade é uma relação de ordem parcial, que a ideia de simultaneidade é relativa, que as curvas causais não podem ser do tipo espaço, que as linhas mundo de observadores só podem ser do tipo tempo e que um observador em movimento percebe o tempo passar mais devagar do que um observador em repouso.

Abordamos, por fim, o paradoxo dos gêmeos, um dos famosos paradoxos da teoria. Sua explicação foi usada para mostrar as implicações teóricas decorrentes das hipóteses fundamentais da teoria e para exemplificar como o tempo passa para dois referenciais inerciais distintos em movimento relativo.

Referências

BRADLEY, Robert E.; SANDIFER, C. Edward. **Cauchy's Cours d'analyse**: An Annotated Translation. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. New York: Springer, 2009. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007%2F978-1-4419-0549-9>.

BROS, Jacques. From Euclid's Geometry to Minkowski's Spacetime. In: DAMOUR, Thibault; DARRIGOL, Olivier; DUPLANTIER, Bertrand; RIVASSEAU, Vincent (ed.). **Einstein, 1905–2005**. v. 47, Basel: Birkhäuser Verlag, 2006, p. 60-119. DOI: https://doi.org/10.1007/3-7643-7436-5_3.

CIPOLATTI, Rolci; GONDAR, Juan López. **Iniciação à Física-Matemática**: Modelagem de Processos e Métodos de Solução. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.



EINSTEIN, Albert. On the Electrodynamics of Moving Bodies. **Annalen der Physik**, v. 17, p. 891-921, 1905.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física: Óptica e Física Moderna**. v. 4. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

LEE, Nam-Hoon. **Geometry: from Isometries to Special Relativity**. 1. ed. New York: Springer, 2020.

NABER, Gregory L. **The Geometry of Minkowski Spacetime: An Introduction to the Mathematics of the Special Theory of Relativity**. Applied Mathematical Sciences. v. 92. 2. ed. New York: Springer, 2012.

TOJO, Fernando Adrián Fernández. A Hyperbolic Analog of the Phasor Addition Formula. **The American Mathematical Monthly**, v. 123, n. 6, p. 574-582. jun./jul. 2016. DOI: <https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.123.6.574>.

WALTER, Scott. Minkowski, Mathematicians and the Mathematical Theory of Relativity. In: GOENNER, H.; RENN, J.; RITTER, J.; SAUER, T. (ed.). **The Expanding Worlds of General Relativity**. Einstein Studies. v. 7. p. 45-86. Boston/Basel: Birkhäuser, 1999.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao Programa de Educação Tutorial (PET), Ministério da Educação e Cultura (MEC) e ao Programa de Educação Tutorial (FNDE) pelo financiamento no formato de bolsa durante a elaboração deste trabalho.

