Um novo olhar sobre as equações do terceiro grau

A new look at third degree equations

Una nueva mirada a las ecuaciones de tercer grado

João Francisco da Silva Filho[1]
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB), Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Redenção, CE, Brasil
https://orcid.org/0000-0003-2150-6900, http://lattes.cnpq.br/2272004277387139

Odete Elana Sousa Pereira[2]
Secretaria da Educação do Estado do Ceará (SEDUC-CE), Fortaleza, CE, Brasil
https://orcid.org/0000-0002-9916-1677, http://lattes.cnpq.br/3863059913494323

Resumo: Neste artigo, fazemos uma explanação sobre equações do terceiro grau (ou alternativamente, equações cúbicas) e polinômios do terceiro grau, apresentando, assim, uma nova relação entre as suas respectivas raízes, descrita por uma fórmula fechada que, em termos de uma raiz simples, permite-nos expressar as demais raízes. Devemos ressaltar que a fórmula supracitada possibilita-nos ainda a introdução de um novo discriminante, consequentemente obtemos critérios para identificar o número de raízes reais e complexas não reais de equações e polinômios do terceiro grau, bem como suas multiplicidades.

Palavras-chave: Equações do terceiro grau; Polinômios do terceiro grau; Raízes; Fórmula.

Abstract: In this article, we develop an explanation about the third degree equations (or alternatively, cubic equations) and third degree polynomials, presenting a new relationship between their respectives roots, described by a closed formula that, in terms of one simple root, allows us to express other roots. We must emphasize that this formula enables the introduction of a new discriminant. Consequently, we obtain criteria to identify the number of real and non-real complex roots of third degree equations and polynomials, as well as their multiplicities.

Keywords: Third degree equations; Third degree polynomials; Roots; Formula.

Resumen: En este artículo explicamos ecuaciones de tercer grado (o alternativamente ecuaciones cúbicas) y polinomios de tercer grado, presentando así una nueva relación entre sus respectivas raíces, descrita por una fórmula cerrada que, en términos de una raíz simple, nos permite expresar la otras raíces. Cabe señalar que

[1]**Currículo sucinto**: Licenciado em Ciências pela Universidade Regional do Cariri, mestre e doutor em Matemática pela Universidade Federal do Ceará, docente na Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira. **Contribuição de autoria**: Administração do Projeto, Conceituação, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação, Metodologia e Supervisão. **Contato**: joaofilho@unilab.edu.br.

[2]**Currículo sucinto**: Licenciada em Ciências da Natureza e Matemática pela Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, especialista pela Faculdade de Educação São Luis e pela Universidade Federal do Ceará, docente da Educação Básica (Ensino Médio) pela Secretaria da Educação do Estado do Ceará. **Contribuição de autoria**: Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação e Metodologia. **Contato**: odetelana@hotmail.com.

SILVA FILHO, João Francisco da; PEREIRA, Odete Elana Sousa. Um novo olhar sobre as equações do terceiro grau. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 1, p. e3007, 30 de junho de 2023. https://doi.org/10.35819/remat2023v9i1id6252.

la fórmula antes mencionada también nos permite introducir un nuevo discriminante, obteniendo así criterios para identificar el número de raíces complejas reales y no reales de ecuaciones de tercer grado y polinomios, así como sus multiplicidades.

Palabras clave: Ecuaciones de tercer grado; Polinomios de tercer grado; Raíces; Fórmula.

Data de submissão: 12 de setembro de 2022.

Data de aprovação: 18 de abril de 2023.

1 Introdução

Durante o século XVI foram descobertas as soluções da equação polinomial do terceiro grau (ou simplesmente equação do terceiro grau), primeiro obtidas por Scipione Del Ferro (1465–1526) e, mais tarde, de maneira independente, por Nicollò Fontana (1499–1557), mais conhecido pelo pseudônimo de *Tartáglia*. As mencionadas soluções foram publicadas em 1545 no livro *Ars Magna* de Girolamo Cardano (1501–1576), elaborado com a contribuição de Ludovico Ferrari (1522–1565), que desenvolveu um método de resolução para a equação polinomial do quarto grau.

Na época as equações eram apenas numéricas e não havia fórmulas propriamente ditas, mas sim métodos e regras explicados com exemplos numéricos, contemplando diferentes formas da equação do terceiro grau. Esses métodos podem ser expressos por meio de uma única fórmula, atualmente conhecida na literatura como a *Fórmula de Cardano-Tartáglia*. Convém ressaltar que a contribuição de Cardano foi mostrar que o estudo da equação do terceiro grau na sua *forma geral* recai no estudo da *forma reduzida*, conforme veremos na sequência.

Nesse contexto, devemos lembrar que a equação do terceiro grau na sua forma geral é expressa por

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \text{(forma geral)}, \tag{1}$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ constantes e a não nulo. Fazendo a translação $x = y - \frac{b}{3a}$ e dividindo a equação obtida por a, vamos ter

$$y^3 + py + q = 0 \quad \text{(forma reduzida)}, \tag{2}$$

em que os coeficientes são dados por

$$p = -\frac{b^2 - 3ac}{3a^2} \qquad \text{e} \qquad q = \frac{2b^3 + 27a^2d - 9abc}{27a^3}.$$

Diante do exposto, tem-se que a fórmula de Cardano-Tartáglia aplicada à forma reduzida (2) é dada por

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}},$$

no entanto, aplicada à forma geral (1), nos fornece a expressão

$$x = -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}, \tag{3}$$

em que a constante, definida por

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2,$$

é chamada de *discriminante* (LIMA, 1987; SILVA FILHO; PEREIRA; CASTRO, 2022).

Lembrando que cada raiz cúbica em (3) pode assumir até três valores complexos distintos, aplica-se a condição adicional

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} = -\frac{p}{3},$$

para obter exatamente as três raízes de (1). Podemos assim, expressar as referidas raízes na forma

$$x_1 = -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}},$$

$$x_2 = -\frac{b}{3a} + \omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} \quad \text{e} \quad x_3 = -\frac{b}{3a} + \omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$$

nas quais adotamos a notação $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (GONÇALVES, 2013).

Observação 1.1. *Convém destacar que, por meio do discriminante, obtém-se a caracterização das raízes da equação do terceiro grau (LIMA, 1987). Nesse sentido, valem as seguintes afirmações:*
(a) *Se D é negativo, então a equação possui três raízes reais distintas.*
(b) *Se D é nulo, então a equação possui uma raiz real não simples.*
(c) *Se D é positivo, então a equação possui uma raiz real e duas complexas não reais.*

Sabemos que a fórmula de Cardano-Tartáglia possui uma grande importância histórica na introdução dos números complexos (BOYER, 2012), porém essa fórmula não é muito prática, principalmente em equações do terceiro grau com discriminante negativo, que correspondem às equações do terceiro grau que possuem três raízes reais distintas, conhecido como *caso irredutível*. Nesse caso, costuma-se recorrer a funções trigonométricas inversas e à fórmula de De Moivre ou aplica-se algum método numérico iterativo para obter aproximações decimais de cada raiz.

SILVA FILHO, João Francisco da; PEREIRA, Odete Elana Sousa. Um novo olhar sobre as equações do terceiro grau. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 1, p. e3007, 30 de junho de 2023. https://doi.org/10.35819/remat2023v9i1id6252.

Nessa conjuntura, deve-se destacar a interessante abordagem histórica que apresenta os detalhes sobre a resolução da equação do terceiro grau e sobre a fórmula de Cardano-Tartáglia, constante no trabalho de Lima (1987). Ainda, encontra-se em Silva Filho e Pereira (2019) uma fórmula que permite expressar duas raízes de um polinômio do terceiro grau em termos de uma raiz real previamente conhecida. Mais recentemente, Silva Filho, Pereira e Castro (2022) introduziram uma nova forma reduzida para polinômios e equações do terceiro grau e apresentaram uma nova fórmula que simplifica a expressão das raízes de equações do terceiro grau.

No presente trabalho, vamos estabelecer uma relação direta entre as raízes de polinômios do terceiro grau, através de uma nova fórmula que permite expressar, em termos de uma raiz simples (ou seja, raiz de multiplicidade um), as demais raízes do polinômio. A referida fórmula nos permite ainda introduzir um novo discriminante, que possibilita a obtenção de estimativas para raízes reais e facilita a caracterização das raízes de polinômios e equações do terceiro grau, isto é, a identificação do número de raízes reais e complexas não reais e suas multiplicidades.

2 Preliminares e resultados chave

Nesta seção, introduzimos algumas notações e apresentamos os resultados chave sobre polinômios do terceiro grau com coeficientes reais, que serão utilizados nas demonstrações dos resultados principais.

Primeiramente, consideramos um polinômio do terceiro grau que possui coeficientes reais (ou simplesmente, polinômio do terceiro grau sobre os reais), dado por

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

em que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, com a não nulo. Para simplificar notações, introduzimos as constantes

$$\Omega = b^2 - 3ac, \quad \Lambda = c^2 - 3bd \quad \text{e} \quad \Sigma = bc - 9ad,$$

definidas a partir dos coeficientes de $P(x)$.

Em analogia ao conceito de derivada de funções, estaremos usando os polinômios

$$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad \text{e} \quad P''(x) = 6ax + 2b$$

para definir as derivadas de $P(x)$ e $P'(x)$, respectivamente (LIMA; CARVALHO; WAGNER; MORGADO, 2012, p. 188).

Diante das notações introduzidas, vejamos a primeira proposição que estabelece algumas identidades relacionadas a polinômios do terceiro grau. Embora as referidas identidades sejam de fácil verificação, não encontram-se na literatura.

Proposição 2.1. *Seja $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ um polinômio do terceiro grau com coeficientes reais, então valem as seguintes igualdades:*

(a) $P''(x)^2 = 12aP'(x) + 4\Omega$;

(b) $P'(x)^2 = \frac{3}{2}P(x)P''(x) + \Omega x^2 + \Sigma x + \Lambda$;

(c) $P'(x)P''(x) = 18aP(x) + 2(2\Omega x + \Sigma)$.

Demonstração. Faremos a prova de cada item, conforme descrito a seguir:

(a) Por um cálculo direto, temos que

$$P''(x)^2 = 36a^2x^2 + 24abx + 4b^2,$$

daí somamos e subtraímos $12ac$ no 2º membro, obtendo

$$P''(x)^2 = 12a(3ax^2 + 2bx + c) + 4(b^2 - 3ac),$$

que equivale à igualdade $P''(x)^2 = 12aP'(x) + 4\Omega$.

(b) Novamente, fazemos um cálculo direto e assim

$$\begin{aligned}
P'(x)^2 - \frac{3}{2}P(x)P''(x) &= (3ax^2 + 2bx + c)^2 - \frac{3}{2}(ax^3 + bx^2 + cx + d)(6ax + 2b) \\
&= [9a^2x^4 + 12abx^3 + (4b^2 + 6ac)x^2 + 4bcx + c^2] \\
&\quad -3[3a^2x^4 + 4abx^3 + (b^2 + 3ac)x^2 + (3ad + bc)x + bd] \\
&= (b^2 - 3ac)x^2 + (bc - 9ad)x + (c^2 - 3bd),
\end{aligned}$$

implicando que $P'(x)^2 = \frac{3}{2}P(x)P''(x) + \Omega x^2 + \Sigma x + \Lambda$.

(c) Finalmente, vamos ter

$$\begin{aligned}
P'(x)P''(x) - 18aP(x) &= (3ax^2 + 2bx + c)(6ax + 2b) - 18a(ax^3 + bx^2 + cx + d) \\
&= [18a^2x^3 + 18abx^2 + (4b^2 + 6ac)x + 2bc] - 18a(ax^3 + bx^2 + cx + d) \\
&= 4(b^2 - 3ac)x + 2(bc - 9ad),
\end{aligned}$$

concluindo que $P'(x)P''(x) = 18aP(x) + 2(2\Omega x + \Sigma)$. □

Dando prosseguimento, enunciamos e demonstramos mais um importante resultado sobre polinômios do terceiro grau a ser aplicado na prova dos resultados principais. Deve-se ressaltar que o item (a) encontra-se em Silva Filho e Pereira (2019) e o item (b) é uma contribuição deste trabalho.

Proposição 2.2. *Sejam $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ um polinômio do terceiro grau sobre os reais e $w \in \mathbb{C}$ uma raiz de $P(x)$, então valem as igualdades:*
(a) $P(x) = (x - w)[ax^2 + (aw + b)x + (aw^2 + bw + c)]$;
(b) $P'(w)^2[aP'(w) - \Omega] = \frac{1}{3}(\Sigma^2 - 4\Omega\Lambda)$.

Demonstração. Passamos à demonstração de cada item separadamente:
(a) Procedendo com um cálculo direto e lembrando que $P(w) = 0$, vamos ter

$$P(x) = P(x) - P(w) = a(x^3 - w^3) + b(x^2 - w^2) + c(x - w),$$

então colocamos $x - w$ em evidência, obtendo a expressão

$$P(x) = (x - w)[a(x^2 + wx + w^2) + b(x + w) + c],$$

equivalente a $P(x) = (x - w)[ax^2 + (aw + b)x + (aw^2 + bw + c)]$.

(b) Usamos o segundo item da Proposição 2.1 para obter

$$P'(w)^2 = \Omega w^2 + \Sigma w + \Lambda,$$

consequentemente,

$$P'(w)^2[aP'(w) - \Omega] = (\Omega w^2 + \Sigma w + \Lambda)[a(3aw^2 + 2bw + c) - \Omega],$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} P'(w)^2[aP'(w) - \Omega] &= 3a^2\Omega w^4 + a(2b\Omega + 3a\Sigma)w^3 + [(ac - \Omega)\Omega + 2ab\Sigma + 3a^2\Lambda]w^2 \\ &\quad + [(ac - \Omega)\Sigma + 2ab\Lambda]w + (ac - \Omega)\Lambda. \end{aligned}$$

Por outro lado, observa-se a relação

$$c\Omega + 3a\Lambda = c(b^2 - 3ac) + 3a(c^2 - 3bd) = b(bc - 9ad) = b\Sigma,$$

que nos permite escrever a penúltima igualdade na forma

$$\begin{aligned} P'(w)^2[aP'(w) - \Omega] &= 3a^2\Omega w^4 + a(2b\Omega + 3a\Sigma)w^3 - (\Omega^2 - 3ab\Sigma)w^2 \\ &\quad + [(ac - \Omega)\Sigma + 2ab\Lambda]w + (ac - \Omega)\Lambda. \end{aligned}$$

Sabendo que w é raiz de $P(x)$, segue-se que

$$aw^3 + bw^2 = -cw - d \quad \text{e} \quad 3a^2\Omega w^4 = -3a\Omega w(bw^2 + cw + d),$$

que substituídas na penúltima igualdade nos fornece

$$P'(w)^2[aP'(w) - \Omega] = (3a\Sigma - b\Omega)(aw^3 + bw^2) + [(ac - \Omega)\Sigma + 2ab\Lambda - 3ad\Omega]w + (ac - \Omega)\Lambda,$$

bem como,

$$P'(w)^2[aP'(w) - \Omega] = (b\Omega - 3a\Sigma)(cw + d) + [(ac - \Omega)\Sigma + 2ab\Lambda - 3ad\Omega]w + (ac - \Omega)\Lambda.$$

Desenvolvendo a última identidade, temos que

$$P'(w)^2[aP'(w) - \Omega] = 2a(3d\Omega + b\Lambda - c\Sigma)w + [(ac - \Omega)\Lambda + d(b\Omega - 3a\Sigma)],$$

no entanto,

$$3d\Omega + b\Lambda = 3d(b^2 - 3ac) + b(c^2 - 3bd) = c(bc - 9ad) = c\Sigma, \tag{4}$$

implicando em

$$P'(w)^2[aP'(w) - \Omega] = (ac - \Omega)\Lambda + d(b\Omega - 3a\Sigma).$$

Decorre da igualdade anterior que

$$3P'(w)^2[aP'(w) - \Omega] = 3(ac - \Omega)\Lambda + 3bd\Omega - 9ad\Sigma,$$

então usamos (4) para deduzir o seguinte

$$3P'(w)^2[aP'(w) - \Omega] = 3(ac - \Omega)\Lambda + bc\Sigma - b^2\Lambda - 9ad\Sigma = -(b^2 - 3ac)\Lambda - 3\Omega\Lambda + (bc - 9ad)\Sigma,$$

mas como $\Omega = b^2 - 3ac$ e $\Sigma = bc - 9ad$, chegamos à identidade

$$P'(w)^2[aP'(w) - \Omega] = \frac{1}{3}(\Sigma^2 - 4\Omega\Lambda),$$

conforme queríamos provar. □

Combinando as Proposições 2.1 e 2.2 podemos facilmente deduzir expressões das raízes de polinômios do terceiro que admitem uma raiz dupla (ou seja, raiz que possui multiplicidade dois), que não encontram-se na literatura.

Corolário 2.3. *Seja* $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *um polinômio do terceiro grau com coeficientes reais que admite uma raiz dupla, então suas raízes são dadas por*

$$x_1 = -\frac{1}{2\Omega}\Sigma \quad \textit{(raiz dupla)} \quad \textit{e} \quad x_2 = \frac{1}{a\Omega}(a\Sigma - b\Omega) \quad \textit{(raiz simples)},$$

em que $\Omega = b^2 - 3ac$ *e* $\Sigma = bc - 9ad$.

Demonstração. Sabendo que $P(x)$ admite uma raiz dupla x_1, então segue da Proposição 2.2(a) que

$$P(x) = (x - x_1)Q(x),$$

com $Q(x) = ax^2 + (ax_1 + b)x + (ax_1^2 + bx_1 + c)$ e $Q(x_1) = 0$. Verifica-se ainda que

$$Q(x_1) = 3ax_1^2 + 2bx_1 + c = P'(x_1),$$

portanto $P'(x_1) = 0$.

Substituindo $P(x_1) = P'(x_1) = 0$ na igualdade da Proposição 2.1(c), obtemos

$$x_1 = -\frac{1}{2\Omega}\Sigma,$$

então deduz-se das relações de Girard (LIMA; CARVALHO; WAGNER; MORGADO, 2012) que a raiz simples de $P(x)$ é dada por

$$x_2 = -\frac{b}{a} - 2x_1 = \frac{1}{a\Omega}(a\Sigma - b\Omega),$$

concluindo a demonstração. □

Observação 2.4. *De forma um pouco mais trabalhosa, podemos deduzir o Corolário 2.3 a partir da fórmula de Cardano-Tartáglia.*

De fato, usando a hipótese de que $P(x)$ possui uma raiz dupla, segue da Observação 1.1 que o discriminante $D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$ é nulo e assim

$$\frac{q}{2} = -\frac{27q^3}{8p^3},$$

portanto as raízes cúbicas de $-\frac{q}{2}$ são dadas por

$$\frac{3q}{2p}, \quad \frac{3q}{2p}\omega \quad \text{e} \quad \frac{3q}{2p}\omega^2, \tag{5}$$

com $p = -\frac{b^2-3ac}{3a^2}$, $q = \frac{2b^3+27a^2d-9abc}{27a^3}$ e $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Substituindo $D = 0$ e as raízes cúbicas obtidas em (5) na fórmula de Cardano-Tartáglia (3), tem-se as raízes de $P(x)$ expressas na forma

$$x_1 = -\frac{b}{3a} - \frac{3q}{2p} \quad \text{(raiz dupla)} \quad \text{e} \quad x_2 = -\frac{b}{3a} + \frac{3q}{p} \quad \text{(raiz simples)}, \tag{6}$$

no entanto, podemos escrever

$$p = -\frac{1}{3a^2}\Omega \quad \text{e} \quad q = \frac{2b\Omega - 3a\Sigma}{27a^2}, \tag{7}$$

com $\Omega = b^2 - 3ac$ e $\Sigma = bc - 9ad$.

Finalmente, substitui-se (7) em (6) para chegar às expressões

$$x_1 = -\frac{1}{2\Omega}\Sigma \quad \text{(raiz dupla)} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{1}{a\Omega}(a\Sigma - b\Omega) \quad \text{(raiz simples)},$$

que correspondem às mesmas expressões enunciadas no Corolário 2.3.

3 Resultados principais

Neste momento, apresentamos os resultados principais do trabalho que consiste em relacionar diretamente as raízes de polinômios do terceiro grau por meio de uma fórmula fechada e fornecer alguns novos critérios destinados à caracterização das raízes dessa classe de polinômios, bem como aplicações dos resultados supracitados. Deve-se esclarecer que os resultados constantes nesta seção são autorais e não constam na literatura, exceto o Corolário 3.5.

Nosso primeiro teorema estabelece uma nova relação entre as raízes de polinômios do terceiro grau com coeficientes reais e nos permite partir de uma raiz simples para determinar as demais raízes.

Teorema 3.1. *Sejam $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ um polinômio do terceiro grau sobre os reais e $x_1 \in \mathbb{C}$ uma raiz simples de $P(x)$, então as demais raízes são dadas por*

$$x_{2,3} = -\frac{(ax_1 + b) \pm P'(x_1)^{-1}\sqrt{\Delta}}{2a},$$

onde $\Delta = -\frac{1}{3}[\Sigma^2 - 4\Omega\Lambda]$.

Demonstração. Sabendo que x_1 é raiz de $P(x)$, aplicamos a Proposição 2.2(a) para obter

$$P(x) = (x - x_1)[ax^2 + (ax_1 + b)x + (ax_1^2 + bx_1 + c)],$$

que pode ser reescrita na forma

$$P(x) = (x - x_1)Q(x), \tag{8}$$

onde $Q(x) = ax^2 + (ax_1 + b)x + (ax_1^2 + bx_1 + c)$.

Na sequência, observe que o discriminante de $Q(x)$ é dado por

$$\Delta_Q = (ax_1 + b)^2 - 4a(ax_1^2 + bx_1 + c) = -3a^2x_1^2 - 2abx_1 + b^2 - 4ac,$$

ou simplesmente,

$$\Delta_Q = \Omega - aP'(x_1).$$

onde $P'(x)$ denota a derivada de $P(x)$.

Como x_1 é uma raiz simples, tem-se $Q(x_1)$ não nulo e, assim,

$$\begin{aligned} Q(x_1) &= ax_1^2 + (ax_1 + b)x_1 + (ax_1^2 + bx_1 + c) \\ &= 3ax_1^2 + 2bx_1 + c = P'(x_1), \end{aligned}$$

implicando que $P'(x_1)$ é não nulo.

Como $P'(x_1)$ é não nulo, basta aplicar a Proposição 2.2(b) para obter

$$\Delta_Q = \Omega - aP'(x_1) = -\frac{1}{3P'(x_1)^2}(\Sigma^2 - 4\Omega\Lambda),$$

e, portanto, segue da fórmula de Bháskara que as raízes de $Q(x)$ são dadas por

$$x_{2,3} = -\frac{(ax_1 + b) \pm P'(x_1)^{-1}\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Então, concluímos por (8) que essas são as duas outras raízes de $P(x)$. □

Observação 3.2. *No artigo de Silva Filho e Pereira (2019), encontra-se outra fórmula que relaciona as raízes de um polinômio do terceiro grau, onde os autores partem da existência de uma raiz real e expressam as demais raízes em termos dessa primeira raiz.*

Agora vamos usar o Teorema 3.1 para deduzir um corolário que fornece novas estimativas para as raízes reais de polinômios do terceiro grau, importantes na escolha de valores iniciais de métodos numéricos iterativos.

Corolário 3.3. *Sejam* $P(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ *um polinômio do terceiro grau com coeficientes reais e* $r \in \mathbb{R}$ *uma raiz real de* $P(x)$*, então temos as seguintes afirmações:*

(a) *Se* $\Omega \leq 0$*, então* $\Delta \leq 0$ *e vale a desigualdade*

$$|2\Omega r + \Sigma| \leq \sqrt{-3\Delta}.$$

(b) *Se* $\Delta < 0$ *e* $\Omega \geq 0$*, então vale a desigualdade*

$$|2\Omega r + \Sigma| \geq \sqrt{-3\Delta}.$$

(c) *Se* $\Delta \geq 0$*, então* $\Omega \geq 0$ *e vale a desigualdade*

$$\left|r + \frac{b}{3a}\right| \leq \frac{2}{3|a|}\sqrt{\Omega}.$$

Demonstração. Utilizando a Proposição 2.1(b), deduzimos a igualdade

$$4\Omega^2 r^2 + 4\Omega\Sigma r + 4\Omega\Lambda = 4\Omega P'(r)^2,$$

que pode ser reescrita na forma

$$(2\Omega r + \Sigma)^2 - (\Sigma^2 - 4\Omega\Lambda) = 4\Omega P'(r)^2.$$

Levando em conta a notação dada por

$$\Delta = -\frac{1}{3}(\Sigma^2 - 4\Omega\Lambda),$$

observa-se que a igualdade anterior torna-se

$$(2\Omega r + \Sigma)^2 + 3\Delta = 4\Omega P'(r)^2, \tag{9}$$

daí passamos a demonstrar cada item separadamente.

(a) Considere os casos, descritos a seguir:

1º Caso: $\Omega = 0$.

Por um cálculo direto, verifica-se que

$$\Delta = -\frac{1}{3}(\Sigma^2 - 4\Omega\Lambda) = -\frac{1}{3}\Sigma^2 \leq 0,$$

bem como

$$|2r\Omega + \Sigma| = |\Sigma| = \sqrt{\Sigma^2} = \sqrt{\Sigma^2 - 4\Omega\Lambda} = \sqrt{-3\Delta},$$

confirmando o resultado para o primeiro caso.

2º Caso: $\Omega < 0$.

Decorre da igualdade (9) que

$$0 \leq (2\Omega r + \Sigma)^2 = -3\Delta + 4\Omega P'(r)^2 \leq -3\Delta,$$

implicando que $\Delta \leq 0$ e, ainda,

$$|2\Omega r + \Sigma| \leq \sqrt{-3\Delta},$$

concluindo o primeiro item.

(b) Sabendo que Ω é não negativo e Δ é negativo, deduzimos da igualdade (9) que

$$(2\Omega r + \Sigma)^2 \geq -3\Delta > 0,$$

que nos fornece

$$|2\Omega r + \Sigma| \geq \sqrt{-3\Delta},$$

concluindo a prova do segundo item.

(c) Supondo por absurdo que $\Omega < 0$, combinamos a hipótese $\Delta \geq 0$ com a igualdade (9) para obter

$$P'(r) = 3ar^2 + 2br + c = 0,$$

consequentemente,

$$0 \leq \left(r + \frac{b}{3a}\right)^2 = \frac{1}{9a^2}\Omega < 0,$$

que é uma contradição.

Agora vamos supor por absurdo que

$$\left|r + \frac{b}{3a}\right| > \frac{2}{3|a|}\sqrt{\Omega},$$

que nos fornece a desigualdade

$$3a^2r^2 + 2abr - (b^2 - 4ac) > 0. \tag{10}$$

Por outro lado, temos pela Proposição 2.2(a) que

$$P(x) = (x - r)[ax^2 + (ar + b)x + (ar^2 + br + c)],$$

ou simplesmente,

$$P(x) = (x - r)Q(x) \tag{11}$$

onde $Q(x) = ax^2 + (ar + b)x + (ar^2 + br + c)$.

Observe ainda que o discriminante de $Q(x)$ é dado por

$$\Delta_Q = -3a^2r^2 - 2abr + (b^2 - 4ac),$$

implicando por (10) que

$$\Delta_Q = -3a^2r^2 - 2abr + (b^2 - 4ac) < 0,$$

logo, $Q(x)$ e $P(x)$ possuem duas raízes complexas não reais.

Desde que $P(x)$ possua duas raízes complexas não reais, segue que r é uma raiz simples (conforme a Observação 1.1), portanto, o Teorema 3.1 garante que

$$w_{1,2} = -\frac{(ar + b) \pm P'(x_1)^{-1}\sqrt{\Delta}}{2a}$$

são raízes complexas não reais de $P(x)$, contrariando a hipótese $\Delta \geq 0$. $\square$

Nosso próximo resultado traz uma forma alternativa de caracterizar as raízes de polinômios do terceiro grau com coeficientes reais, possibilitando conclusões mais detalhadas que as obtidas a partir do discriminante constante na fórmula de Cardano-Tartáglia (conforme a Observação 1.1).

Teorema 3.4. *Seja $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ um polinômio do terceiro grau com coeficientes reais, então valem as seguintes afirmações:*

(a) *Se $\Sigma^2 < 4\Omega\Lambda$, então $P(x)$ possui três raízes reais distintas.*

(b) *Se $\Sigma^2 > 4\Omega\Lambda$, então $P(x)$ possui uma raiz real e duas raízes complexas não reais.*

(c) *Se $\Sigma^2 = 4\Omega\Lambda$ com $\Omega = 0$, então $P(x)$ possui uma raiz real com multiplicidade três.*

(d) *Se $\Sigma^2 = 4\Omega\Lambda$ com $\Omega \neq 0$, então $P(x)$ possui duas raízes reais de multiplicidades um e dois.*

Demonstração. Sabendo que todo polinômio do terceiro grau com coeficientes reais admite raiz real (conforme a Observação 1.1), então seja $x_1 \in \mathbb{R}$ uma raiz de $P(x)$. Conforme consta na Proposição 2.2(a), podemos escrever

$$P(x) = (x - x_1)Q(x), \tag{12}$$

SILVA FILHO, João Francisco da; PEREIRA, Odete Elana Sousa. Um novo olhar sobre as equações do terceiro grau. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 1, p. e3007, 30 de junho de 2023. https://doi.org/10.35819/remat2023v9i1id6252.

com $Q(x) = ax^2 + (ax_1 + b)x + (ax_1^2 + bx_1 + c)$. Por outro lado, observa-se que

$$Q(x_1) = 3ax_1^2 + 2bx_1 + c = P'(x_1), \tag{13}$$

onde $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Neste momento, passamos à demonstração de cada um dos itens:

(a) Decorre da Proposição 2.2(b) e da hipótese $\Sigma^2 < 4\Omega\Lambda$ que $P'(x_1)$ é não nulo, implicando por (13) que $Q(x_1)$ é não nulo e que x_1 é uma raiz real simples. Diante do exposto, aplica-se o Teorema 3.1 para concluir que

$$x_{2,3} = -\frac{(ax_1 + b) \pm P'(x_1)^{-1}\sqrt{\Delta}}{2a},$$

são as demais raízes de $P(x)$ e, como

$$\Delta = -\frac{1}{3}[\Sigma^2 - 4\Omega\Lambda] > 0,$$

conclui-se que as três raízes de $P(x)$ são reais e distintas.

(b) De modo análogo, usamos a Proposição 2.2(b) e a hipótese $\Sigma^2 > 4\Omega\Lambda$ para deduzir que $P'(x_1)$ é não nulo. Então, segue da igualdade (13) que $Q(x_1)$ é não nulo e, assim, x_1 é uma raiz real simples. Nessas condições, aplicamos o Teorema 3.1 para concluir que

$$x_{2,3} = -\frac{(ax_1 + b) \pm P'(x_1)^{-1}\sqrt{\Delta}}{2a},$$

são as demais raízes de $P(x)$ e como

$$\Delta = -\frac{1}{3}[\Sigma^2 - 4\Omega\Lambda] < 0,$$

conclui-se que $P(x)$ possui uma raiz real e duas complexas não reais.

(c) Combinando as hipóteses $\Sigma^2 = 4\Omega\Lambda$ e $\Omega = 0$ com a Proposição 2.2(b), obtemos

$$P'(x_1) = 0,$$

então segue da Proposição 2.1(a) que $P''(x_1) = 0$ e, consequentemente,

$$x_1 = -\frac{b}{3a},$$

visto que $P''(x) = 6ax + 2b$.

Desde que $\Sigma^2 = 4\Omega\Lambda$ e $\Omega = 0$, então $\Sigma = 0$ e assim

$$b^2 = 3ac \quad \text{e} \quad bc = 9ad,$$

daí obtemos

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + \frac{b^2}{3a}x + \frac{b^3}{27a^2} = a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3,$$

portanto x_1 possui multiplicidade três.

(d) Suponha por absurdo que $x_1 \in \mathbb{R}$ possui multiplicidade três, então podemos escrever

$$P(x) = a\left(x - x_1\right)^3,$$

ou ainda,

$$P(x) = ax^3 - 3ax_1x^2 + 3ax_1^2x - ax_1^3,$$

implicando que $\Omega = 0$ e contradizendo uma das hipóteses.

Por outro lado, decorre da Proposição 2.2(b) que

$$P'(x_1)^2[aP'(x_1) - \Omega] = 0,$$

por conseguinte,

$$P'(x_1) = 0 \quad \text{ou} \quad P'(x_1) = \frac{1}{a}\Omega.$$

No primeiro caso, obtém-se das igualdades (12) e (13) que

$$P(x) = (x - x_1)Q(x) \quad \text{e} \quad Q(x_1) = 0,$$

que nos permite escrever

$$P(x) = a(x - x_1)^2\left(x + \frac{2ax_1 + b}{a}\right),$$

então x_1 é uma raiz de multiplicidade dois e $x_2 = -\frac{2ax_1+b}{a}$ é uma raiz simples.

No segundo caso, obtém-se das igualdades (12) e (13) que

$$P(x) = (x - x_1)Q(x) \quad \text{e} \quad Q(x_1) \neq 0,$$

logo x_1 é uma raiz simples e pelo Teorema 3.1, deduzimos que as demais raízes são dadas por

$$x_2 = x_3 = -\frac{ax_1 + b}{2a},$$

concluindo que x_1 é uma raiz simples e $x_2 = -\frac{ax_1+b}{2a}$ é uma raiz de multiplicidade dois. □

SILVA FILHO, João Francisco da; PEREIRA, Odete Elana Sousa. Um novo olhar sobre as equações do terceiro grau. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 1, p. e3007, 30 de junho de 2023. https://doi.org/10.35819/remat2023v9i1id6252.

Como aplicação do Teorema 3.4, apresentamos uma prova alternativa de um resultado que pode ser encontrado em Silva Filho, Pereira e Castro (2022) e que corresponde a uma versão aprimorada do Teorema 3.2 de Pereira (2017).

Corolário 3.5. *Seja $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ um polinômio do terceiro grau sobre os reais que satisfaz a condição $b^2 \neq 3ac$. Admitindo que $s \in \mathbb{R}$ é a constante dada por*

$$s = -\frac{1}{2\Omega}\Sigma,$$

valem as seguintes afirmações:

(a) *Se $aP'(s) < 0$, então $P(x)$ possui três raízes reais distintas.*

(b) *Se $aP'(s) > 0$, então $P(x)$ possui uma raiz real e duas complexas não reais.*

(c) *Se $P'(s) = 0$, então $P(x)$ possui duas raízes reais, uma simples e outra de multiplicidade dois.*

Demonstração. Sabendo que $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, temos que

$$P'(s) = \frac{3a}{4\Omega^2}\Sigma^2 - \frac{b}{\Omega}\Sigma + c = \frac{3a\Sigma^2 - 4b\Omega\Sigma + 4c\Omega^2}{4\Omega^2},$$

ou ainda,

$$P'(s) = \frac{3a\Sigma^2 - 4\Omega(b\Sigma - c\Omega)}{4\Omega^2}.$$

Desde que $\Omega = b^2 - 3ac$, $\Lambda = c^2 - 3ad$ e $\Sigma = bc - 9ad$, obtemos

$$\begin{aligned} P'(s) &= \frac{3a\Sigma^2 - 4\Omega[b(bc - 9ad) - c(b^2 - 3ac)]}{4\Omega^2} \\ &= \frac{3a\Sigma^2 - 12a\Omega(c^2 - 3bd)}{4\Omega^2} = \frac{3a}{4\Omega^2}(\Sigma^2 - 4\Omega\Lambda), \end{aligned}$$

consequentemente,

$$aP'(s) = \frac{3a^2}{4\Omega^2}(\Sigma^2 - 4\Omega\Lambda). \tag{14}$$

Nesse momento, procedemos com a prova de cada item separadamente:

(a) Supondo que $aP'(s) < 0$, temos pela igualdade (14) que $\Sigma^2 < 4\Omega\Lambda,$ portanto o item (a) do Teorema 3.4 garante que $P(x)$ possui três raízes reais distintas.

(b) Supondo que $aP'(s) > 0$, temos pela igualdade (14) que $\Sigma^2 > 4\Omega\Lambda,$ dai usamos o item (b) do Teorema 3.4 para deduzir que $P(x)$ possui uma raiz real e duas complexas não reais.

(c) Supondo que $P'(s) = 0$, temos pela igualdade (14) que $\Sigma^2 = 4\Omega\Lambda,$ então decorre do item (d) do Teorema 3.4 que $P(x)$ possui duas raízes reais, uma simples e outra com multiplicidade dois. $\square$

Encerrando a seção, enunciamos e demonstramos nosso último resultado que também é uma consequência do Teorema 3.4, tendo sido inspirado no Corolário 3.5.

Corolário 3.6. *Seja $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ um polinômio do terceiro grau sobre os reais que satisfaz a condição $b^2 \neq 3ac$. Admitindo que $s \in \mathbb{R}$ é a constante, dada por*

$$s = -\frac{1}{2\Omega}\Sigma,$$

valem as seguintes afirmações:

(a) *Se $P''(s) = 0$, então $P(x)$ possui três raízes distintas.*

(b) *Se $P(s)P''(s) < 0$, então $P(x)$ possui três raízes reais distintas.*

(c) *Se $P(s)P''(s) > 0$, então $P(x)$ possui uma raiz real e duas complexas não reais.*

(d) *Se $P(s) = 0$ e $P''(s) \neq 0$, então $P(x)$ possui duas raízes reais, uma simples e outra com multiplicidade dois.*

Demonstração. Decorre diretamente da Proposição 2.1(c) que

$$18aP(s) = P'(s)P''(s),$$

então, combinando com a igualdade (14) do Corolário 3.5, obtemos

$$24\Omega^2 P(s) = (\Sigma^2 - 4\Omega\Lambda)P''(s), \tag{15}$$

que será usada na demonstração de cada item.

Diante do exposto, passamos à demonstração de cada item enunciado:

(a) Suponha por absurdo que $\Sigma^2 = 4\Omega\Lambda$, então deduzimos de (14) e (15) que $P(s) = P'(s) = 0$, implicando pela Proposição 2.1(a) que Ω é nulo e contrariando uma das hipóteses. Sendo assim, conclui-se que $\Sigma^2 < 4\Omega\Lambda$ ou $\Sigma^2 > 4\Omega\Lambda$, portanto segue dos itens (a) e (b) do Teorema 3.4 que $P(x)$ possui três raízes distintas.

(b) Usando a igualdade (15) junto com a hipótese $P(s)P''(s) < 0$, temos que

$$(\Sigma^2 - 4\Omega\Lambda)P''(s)^2 = 24\Omega^2 P(s)P''(s) < 0,$$

logo $\Sigma^2 < 4\Omega\Lambda$, implicando pelo item (a) do Teorema 3.4 que $P(x)$ possui três raízes reais distintas.

(c) Da igualdade (15) e da hipótese $P(s)P''(s) > 0$, obtemos

$$0 < 24\Omega^2 P(s)P''(s) = (\Sigma^2 - 4\Omega\Lambda)P''(s)^2,$$

portanto $\Sigma^2 > 4\Omega\Lambda$, então segue pelo item (b) do Teorema 3.4 que $P(x)$ possui uma raiz real e duas complexas não reais.

(d) Combinando as hipóteses $P(s) = 0$ e $P''(s) \neq 0$ com a identidade (15), vamos ter $\Sigma^2 = 4\Omega\Lambda$ e daí aplicamos o item (d) do Teorema 3.4 para concluir que o polinômio $P(x)$ tem duas raízes reais, uma simples e outra de multiplicidade dois. □

Na próxima seção do trabalho, encontram-se alguns exemplos nos quais serão aplicados os Teoremas 3.1 e 3.4 no cálculo de raízes (ou aproximações decimais de raízes) de polinômios do terceiro grau.

4 Aplicações dos resultados principais

Nesta última seção, estaremos aplicando os resultados principais na resolução de exemplos, enfatizando a fórmula enunciada no Teorema 3.1 e no Teorema 3.4 (Seção 3). O primeiro exemplo mostra que se uma das raízes simples de um polinômio do terceiro grau for previamente conhecida, podemos aplicar diretamente o Teorema 3.1 para determinar as demais raízes.

Exemplo 4.1. *Calcular as raízes do polinômio do terceiro grau* $P(x) = x^3 - 7x^2 + 19x - 21.$

Solução: Usando o Teorema das raízes racionais (GONÇALVES, 2013), temos que as possíveis raízes racionais de $P(x)$ pertencem ao conjunto

$$\left\{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}; p|21 \text{ e } q|1\right\} = \{\pm 1, \pm 3, \pm 7, \pm 21\},$$

então um cálculo direto nos mostra que

$$P(\pm 1), P(-3), P(\pm 7), P(\pm 21) \neq 0 \quad \text{e} \quad P(3) = 0,$$

portanto $x_1 = 3$ é uma raiz de $P(x)$.

Usando os coeficientes de $P(x)$, dados por

$$a = 1, \quad b = -7, \quad c = 19 \quad \text{e} \quad d = -21,$$

obtemos $\Omega = -8, \quad \Lambda = -80 \quad$ e $\quad \Sigma = 56$, logo

$$\Delta = -\frac{1}{3}(\Sigma^2 - 4\Omega\Lambda) = -\frac{1}{3}[3136 - 4 \cdot (-8) \cdot (-80)] = -192,$$

implicando pelo Teorema 3.4 que $x_1 = 3$ é uma raiz simples.

Nessas condições, segue-se do Teorema 3.1 que

$$x_{2,3} = -\frac{(3a+b) \pm P'(3)^{-1}\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{-4 \pm \frac{1}{4}\sqrt{-192}}{2},$$

donde concluímos que $x_2 = 2 - \sqrt{3}i$ e $x_3 = 2 + \sqrt{3}i$ são as demais raízes de $P(x)$.

Caso não conheçamos nenhuma raiz do polinômio, podemos utilizar um método numérico para obter aproximações decimais de uma raiz real simples. Em seguida, aplica-se o Teorema 3.1 para deduzir aproximações decimais das demais raízes.

Exemplo 4.2. *Calcular aproximações decimais das raízes do polinômio* $P(x) = 7x^3 - 4x + 1$.

Solução: Usando o método de Newton-Raphson (RUGGIERO; LOPES, 1997), devemos construir uma sequência que convirja para uma raiz real de $P(x)$. Esta sequência é definida por

$$y_{n+1} = \begin{cases} k, & \text{se } n = 0 \\ y_n - \dfrac{P(x_n)}{P'(x_n)}, & \text{se } n \geq 1 \end{cases},$$

ou equivalentemente,

$$y_{n+1} = \begin{cases} k, & \text{se } n = 0 \\ \dfrac{14y_n^3 - 1}{21y_n^2 - 4}, & \text{se } n \geq 1 \end{cases}, \tag{16}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante (a saber) suficientemente próxima de uma raiz real.

Observação 4.3. *Para esse exemplo, verifica-se que o Teorema das raízes racionais não permite obter nenhuma das raízes.*

Por outro lado, observe que $\Omega = 84$, $\Lambda = 16$ e $\Sigma = -63$, portanto

$$\Delta = -\frac{1}{3}[(-63)^2 - 4 \cdot 84 \cdot 16] = 469,$$

implicando pelo Teorema 3.4 que $P(x)$ possui apenas raízes simples (três raízes reais distintas). Usando o Corolário 3.3(c), obtemos ainda

$$|x_1| \leq \frac{4}{21}\sqrt{21} = 0,872871561...,$$

onde x_1 denota uma raiz real arbitrária de $P(x)$.

Diante da última desigualdade, escolhemos $k = 0$ em (16) para chegar às aproximações

$$y_1 = 0; \qquad y_2 = 0,25\ldots; \qquad y_3 = 0,290697674\ldots;$$
$$y_4 = 0,294817142\ldots; \quad y_5 = 0,294865003\ldots \quad \text{e} \quad y_6 = 0,294865010\ldots,$$

ou seja, uma das raízes reais de $P(x)$ é aproximadamente $x_1 \approx 0,29486501$.

Sabendo que $P(x)$ admite apenas raízes simples, podemos substituir $x_1 \approx 0,29486501$ na fórmula do Teorema 3.1, concluíndo que

$$x_2 \approx 0,56405856 \quad \text{e} \quad x_3 \approx -0,85892357$$

são as aproximações decimais das outras duas raízes de $P(x)$.

O último exemplo ilustra um caso bem interessante, no qual o polinômio $P(x)$ possui raízes complexas não reais e não conhecemos sua raiz real.

Exemplo 4.4. *Determinar as raízes do polinômio do terceiro grau* $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$.

Solução: Novamente, usamos o método de Newton-Raphson para construir a sequência

$$y_{n+1} = \begin{cases} k, & \text{se } n = 0 \\ \dfrac{2y_n^3 - 3y_n^2 + 1}{3y_n^2 - 6y_n + 4}, & \text{se } n \geq 1 \end{cases}, \tag{17}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante (a saber) suficientemente próxima de uma raiz real. Por outro lado, observe que $\Omega = -3, \Lambda = 7$ e $\Sigma = -3$, logo

$$\Delta = -\frac{1}{3}[(-3)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 7] = -31,$$

então segue do Teorema 3.4 que $P(x)$ possui apenas raízes simples.

Decorre ainda do Corolário 3.3(a) que

$$|-6x_1 - 3| \leq \sqrt{93},$$

ou ainda,

$$-2,107275126... \leq x_1 \leq 1,107275126... \tag{18}$$

onde x_1 denota uma raiz real de $P(x)$.

SILVA FILHO, João Francisco da; PEREIRA, Odete Elana Sousa. Um novo olhar sobre as equações do terceiro grau. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 1, p. e3007, 30 de junho de 2023. https://doi.org/10.35819/remat2023v9i1id6252.

Devido à desigualdade (18), escolhemos $k = 0$ em (17) para obter as aproximações

$$y_1 = 0; \qquad y_2 = 0,25; \qquad y_3 = 0,313953488\ldots;$$
$$y_4 = 0,317660417\ldots; \qquad y_5 = 0,317672196\ldots \quad \text{e} \quad y_6 = 0,317672196\ldots,$$

então uma das raízes reais de $P(x)$ é aproximadamente $x_1 \approx 0,31767220$.

Como $P(x)$ admite apenas raízes simples, podemos substituir $x_1 \approx 0,31767220$ na fórmula obtida no Teorema 3.1, concluindo que

$$x_2 \approx 1,34116390 - 1,16154140i \quad \text{e} \quad x_3 \approx 1,34116390 + 1,16154140i$$

são as aproximações decimais das demais raízes de $P(x)$.

5 Considerações finais

No presente trabalho, deduzimos uma nova fórmula que estabelece uma relação direta entre as raízes reais e/ou complexas não reais de polinômios e equações do terceiro grau, possibilitando o cálculo de duas raízes a partir de uma raiz simples (ou seja, raiz que possui multiplicidade um), previamente conhecida (Teorema 3.1). Como uma aplicação inicial da fórmula supracitada, apresentamos desigualdades que nos fornecem estimativas para as raízes reais de polinômios e equações do terceiro grau (Corolário 3.3), facilitando a escolha do valor inicial em métodos numéricos utilizados no cálculo de aproximações decimais de raízes desse tipo de polinômio e de equação polinomial. A fórmula apresentada no Teorema 3.1 possibilitou ainda introduzir um novo discriminante e estabelecer novos critérios para caracterizar raízes de polinômios e equações do terceiro grau (Teorema 3.4).

Referências

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

GONÇALVES, A. **Introdução à Álgebra**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

LIMA, E. L. Equação do terceiro grau. **Matemática Universitária**, n. 5, p. 9-23, jun. 1987. Disponível em: `https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n05_Artigo01.pdf`. Acesso em: 29 jun. 2023.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. v. 1. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

PEREIRA, O. E. S. **Raízes de Equações do Terceiro Grau**. 2017. 34 f. Monografia (Curso de Ciências da Natureza e Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2017.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo Numérico**: Aspectos Teóricos e Computacionais. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1997.

SILVA FILHO, J. F.; PEREIRA, O. E.; CASTRO, F. C. S. Simplificando a Resolução da Equação do Terceiro Grau. **Professor de Matemática Online**, v. 10, n. 4, p. 440-453, 2022. DOI: `https://doi.org/10.21711/2319023x2022/pmo1031`.

SILVA FILHO, J. F.; PEREIRA, O. E. Revisitando as Equações do Terceiro Grau. **Professor de Matemática Online**, v. 7, n. 2, p. 205-214, 2019. DOI: `https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo716`.

Agradecimentos

Os autores agradecem aos avaliadores pelas contribuições e à Revista Eletrônica da Matemática pela oportunidade.