Números Felizes e Pontos Fixos

Happy Numbers and Fixed Points

Números Felices y Puntos Fijos

Rudney Carlos da Mata[1]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais (IFMG), Ouro Branco, MG, Brasil
https://orcid.org/0000-0003-3549-2490, http://lattes.cnpq.br/6500455969704457

Marcelo Oliveira Veloso[2]
Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ), Departamento de Estatística, Física e Matemática, Ouro Branco, MG, Brasil
https://orcid.org/0000-0002-2585-1210, http://lattes.cnpq.br/4008756490618057

Resumo: Este trabalho apresenta um breve estudo sobre o conjunto dos números felizes, em qualquer base posicional $b \geq 2$. Exibimos exemplos de números felizes e verificamos que todo inteiro positivo é feliz na base 4, Exemplo 2.8. Em particular, caracterizamos os pontos fixos da função felicidade, Teorema 3.2, que atribui a cada inteiro positivo a soma dos quadrados dos seus dígitos. Além disso, são exibidas técnicas para determinar os pontos fixos da função felicidade, Teorema 3.5, Exemplos 3.7 e 3.8, em qualquer base posicional.

Palavras-chave: Números Felizes; Pontos Fixos; Sequência de Inteiros.

Abstract: This paper presents a brief study about the set of happy numbers, in any positional basis $b \geq 2$. We show examples of happy numbers and verify that every positive integer is happy in basis 4, Example 2.8. In particular, we characterize the fixed points of the happiness function, Theorem 3.2, which assigns to every positive integer the sum of the squares of its digits. In addition, techniques to determine the fixed points of the happiness function are showed, Theorem 3.5, Examples 3.7 and 3.8, in any positional basis.

Keywords: Happy Numbers; Fixed Points; Sequence of Integers.

Resumen: Este trabajo presenta un breve studio sobre el conjunto de números felices, en cualquier base posicional $b \geq 2$. Exponemos ejemplos de números felices y verificamos que todo entero positivo es feliz en la base 4. Ejemplo 2.8. En particular, caracterizamos los puntos fijos de la función felicidad, Teorema 3.2, que asigna a cada entero positivo la suma de los cuadrados de sus dígitos. Además, son exhibidas técnicas

[1]**Currículo sucinto**: Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Ouro Preto, mestre em Matemática pela Universidade Federal de São João del-Rei, docente do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais, *Campus* Ouro Branco. **Contribuição de autoria**: Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição e Investigação. **Contato**: rudney.mata@ifmg.edu.br.

[2]**Currículo sucinto**: Bacharel em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais, mestre e doutor em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas, docente associado da Universidade Federal de São João del-Rei, *Campus* Alto Paraopeba. **Contribuição de autoria**: Administração do projeto, revisão, edição, supervisão e validação. **Contato**: veloso@ufsj.edu.br.

para determinar los puntos fijos de la función felicidad, Teorema 3.5, Ejemplos 3.7 y 3.8, en cualquier base posicional.

Palabras clave: Números Felices; Puntos Fijos; Secuencia de Enteros.

Data de submissão: 28 de julho de 2022.

Data de aprovação: 21 de novembro de 2022.

1 Introdução

O interesse pelos números e suas propriedades remonta à antiguidade. É um tema exaustivamente estudado. Algumas dessas propriedades acabam definindo conjuntos númericos interessantes, como os números perfeitos, números primos, números de Fibonacci, dentre outros.

Os números felizes foram apontados por Guy no seu livro *Unsolved Problems in Number Theory* no Problema $E34$ (veja GUY, 2004, p. 234, tradução nossa), da seguinte forma:

A filha de Reg Allenby chegou da escola na Grã-Bretanha com o conceito de números felizes. Se você fizer uma iteração do processo de somar os quadrados dos dígitos de um número decimal, então é fácil de ver que você alcançará o ciclo

$$4 \to 16 \to 37 \to 58 \to 89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4$$

ou você chegará a 1. No último caso, você encontrou um número feliz.

Em seu livro, Guy (2004) também faz algumas indagações a respeito dos números felizes: o número de iterações necessárias para um número ser feliz, possíveis sequências de números felizes, a densidade nos inteiros positivos e sobre a felicidade em diferentes bases. Diversos autores têm trabalhado com estas questões e outras que surgiram com o avanço das investigações. Por exemplo, Beardon (1998) caracteriza os pontos fixos da função felicidade em qualquer base. Os autores El-Sedy e Siksek (2000) trabalham apenas na base 10. E os autores Pan (2008), Grudman e Teeple (2001) estudam os números felizes consecutivos em diferentes bases, generalizando o expoente da soma. A autora Mutter (2010) estuda pontos fixos da função felicidade em diferentes bases.

Neste trabalho, estudamos os números felizes em qualquer representação posicional. Em particular, exibimos técnicas para determinar os pontos fixos da função felicidade (veja Teoremas 3.2 e 3.5; e Exemplos 3.7 e 3.8).

O texto lista algumas propriedades sobre os números felizes em uma base qualquer, além da terminologia e conceitos básicos necessários ao entendimento pelo leitor. A última seção define e exibe técnicas para calcular os pontos fixos em qualquer base posicional.

2 Números Felizes

Nesta seção, definimos a função felicidade, estudamos algumas de sua propriedades e os números felizes, sobre qualquer base posicional $b \geq 2$. Além disso, verificamos que todo número, representado na base 4, é um número feliz.

Fixado um inteiro $b \geq 2$, ao qual chamaremos de base, temos que todo número inteiro positivo n pode ser escrito de modo único

$$n = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + \cdots + a_1 b + a_0,$$

onde $m \geq 0$, $a_m \neq 0$ e $0 \leq a_i < b$ para todo $0 \leq i \leq m$. Ao longo do texto, é utilizada a seguinte notação:

$$[a_m a_{m-1} a_{m-2} \dots a_1 a_0]_b = \sum_{i=0}^{m} a_i b^i.$$

É usual não indicar a base decimal. Logo, quando a base não é mencionada, subtende-se o número representado na base 10.

Por exemplo, na base 10, temos que o número 11 é representado por

$$11 = 1 \cdot 10^1 + 1$$

e na base 2,

$$[1011]_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1,$$

e na base 5,

$$[21]_5 = 2 \cdot 5 + 1.$$

Exemplo 2.1. *O número 722, representado na base decimal, tem a seguinte representação na base 5*

$$[10342]_5 = 1 \cdot 5^4 + 0 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 2.$$

Existe um método para determinar a representação de um número, na base decimal, em uma base b. Sugerimos ao leitor interessado que consulte o Capítulo 4 do livro de Hefez (2016).

MATA, Rudney Carlos da; VELOSO, Marcelo Oliveira. Números Felizes e Pontos Fixos. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 1, p. e3002, 7 de março de 2023.
https://doi.org/10.35819/remat2023v9i1id6190.

Agora estamos em condições de definir a **função felicidade**, F_b. Dado um número inteiro positivo $n = [a_r a_{r-1} a_{r-2} \dots a_1 a_0]_b$, representado na base $b \geq 2$, definimos a função felicidade, F_b, por

$$\begin{array}{rcl} F_b : \mathbb{Z}_+ & \longrightarrow & \mathbb{Z}_+ \\ F_b(n) & = & F_b(\sum_{i=0}^{r} a_i b^i) = \sum_{i=0}^{r} a_i^2. \end{array}$$

Dizemos que n é um número feliz na base b se existe $k \geq 1$ tal que $F_b^k(n) = 1$, onde $F_b^1(n) = F_b(n)$ e $F_b^{k+1}(n) = F_b(F_b^k(n))$. Caso contrário, n é dito um número triste na base b. Se é evidente a base, no contexto, vamos dizer apenas número feliz ou triste. Além disso, na base 10 é comum omitir o índice 10. Ou seja, $F(n) = F_{10}(n)$.

Assim, para determinar se um número é feliz ou triste, temos que calcular as iteradas da função F_b.

Exemplo 2.2. *O número 143 é feliz na base 7, pois*

$$F_7^2(143) = F_7^2([263]_7) = F_7(49) = F_7([100]_7) = 1$$

Nem sempre a felicidade em uma base implica em outra base.

Exemplo 2.3. *O número 28 é feliz na base 10, pois $F^3(28) = 1$. Contudo, na base 5, é triste. De fato, observe que*

$$F_5(28) = F_5([103]_5) = [20]_5,\, F_5^2(28) = F_5([20]_5) = [4]_5,\, F_5^3(28) = F_5([4]_5) = [31]_5,$$

$$F_5^4(28) = F_5([31]_5) = [20]_5.$$

Assim, $F_5^k(28) \in \{[103]_5, [20]_5, [4]_5, [31]_5\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Ou seja, não existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $F_5^k(28) = 1$. Portanto, 28 é triste na base 5.

O próximo exemplo garante a existência de números felizes em qualquer base.

Exemplo 2.4. *É imediato que o número 1 é feliz em qualquer base. Outro número feliz, em qualquer base b, é o número $b = [10]_b$, pois*

$$F_b(b) = F_b([10]_b) = 1^2 + 0^2 = 1.$$

O resultado do Exemplo 2.4 pode ser generalizado. Ou seja, temos infinitos números felizes em qualquer base. Considere os números $[10 \dots 0]_b$, com qualquer quantidade de zeros. É imediato verificar que são números felizes na base b. Esses são os número da forma b^n. Ou seja, todo inteiro b^n é feliz na base b.

O próximo resultado permite aferir se um dado número é feliz ou triste (veja Teorema 2.7).

Teorema 2.5. *Seja b um inteiro positivo maior ou igual a 2. Então, $F_b(n) < n$, para todo $n \geq b^2$.*

Prova. *Seja $n = [a_r a_{r-1} \ldots a_1 a_0]_b$, onde $a_r \neq 0$ e $r \geq 2$, pois $n \geq b^2 = [100]_b$. Então,*

$$F_b(n) = a_r^2 + a_{r-1}^2 + \cdots + a_1^2 + a_0^2.$$

Vejamos que $n - F_b(n) > 0$. De fato,

$$\begin{aligned} n - F_b(n) &= a_r b^r + a_{r-1} b^{r-1} + \cdots + a_1 b + a_0 - (a_r^2 + a_{r-1}^2 + \cdots + a_1^2 + a_0^2) \\ &= (a_r b^r - a_r^2) + (a_{r-1} b^{r-1} - a_{r-1}^2) + \cdots + (a_1 b - a_1^2) + (a_0 - a_0^2) \\ &= \underbrace{a_r(b^r - a_r) + a_{r-1}(b^{r-1} - a_{r-1}) + \cdots + a_1(b - a_1)}_{\alpha} + \underbrace{a_0(1 - a_0)}_{\beta}. \end{aligned}$$

Seja $\alpha = a_r(b^r - a_r) + a_{r-1}(b^{r-1} - a_{r-1}) + \cdots + a_1(b - a_1)$. Como $0 \leq a_i \leq b-1$, as parcelas da soma $a_{r-1}(b^{r-1} - a_{r-1}) + \cdots + a_1(b - a_1)$ são maiores ou iguais a zero, enquanto a parcela $a_r(b^r - a_r)$ é maior que zero, pois $a_r \neq 0$ e $r \geq 2$. Logo, $\alpha > 0$. Veja que $b^2 - 1$ é o menor valor possível para α e ocorre quando $r = 2$, $a_2 = 1$ e $a_1 = 0$. E a parcela $\beta = a_0(1 - a_0)$ tem seu menor valor quando $a_0 = b - 1$, ou seja, $\beta = (b-1)(1 - (b-1)) = (b-1)(2-b)$. Assim,

$$\begin{aligned} n - F_b(n) &= \alpha + \beta \\ &\geq (b^2 - 1) + (b-1)(2-b) \\ &= 3(b-1) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Portanto, $F_b(n) < n$ para todo $n \geq b^2$.

Corolário 2.6. *Seja $b \geq 2$. Então, para todo inteiro positivo n existe k tal que $F_b^k(n) < b^2$.*

Prova. *Suponha que $F_b^k(n) \geq b^2$ para todo k. Segue do Teorema 2.5 que*

$$n > F_b(n) > F_b^2(n) > F_b^3(n) > \cdots > F_b^i(n) > \ldots \geq b^2$$

é uma sequência infinita de números inteiros, estritamente decrescente e limitada inferiormente. Claramente, um absurdo. Portanto, existe k tal que $F_b^k(n) < b^2$.

Em virtude do Corolário 2.6, sempre será possível determinar se um número é feliz.

https://doi.org/10.35819/remat2023v9i1id6190.

Teorema 2.7. *É possível aferir, com um número finito de iteradas, se um número n é feliz na base $b \geq 2$.*

Prova. *Seja $b \geq 2$, segue do Corolário 2.6, dado um inteiro positivo $n \geq b^2$ existe k tal que $F_b^k(n) < b^2$. Portanto, é suficiente verificar os números menores que b^2.*

Esse resultado permite afirmar se um dado inteiro, com um número finito de passos, é feliz em determinada base. Contudo, em bases maiores, por exemplo 100, é necessário utilizar recurso computacional.

Exemplo 2.8. *Todo número, na base 4, é feliz. De fato, se o número m é maior que 16 em algum momento as iteradas da função F_4 sobre m será menor que $16 = 4^2$, $F_4^k(m) < 16$, para algum $k \in \mathbb{Z}$ (Corolário 2.6). Portanto, é suficiente verificar se os inteiros menores que $4^2 = 16$ são felizes. Ou seja, se existe k tal que $F_4^k(m) = 1$, para todo $m < 16$. Os cálculos podem ser feitos à mão ou utilizando recurso computacional. Por exemplo, $F_4^5(15) = 1$. De fato,*

$$\begin{aligned}
F_4(15) =& F_4([33]_4) = 3^2 + 3^2 = 18, \\
F_4^2(15) =& F_4(18) = F_4([102]_4) = 1^2 + 0^2 + 2^2 = 5, \\
F_4^3(15) =& F_4(5) = F_4([11]_4) = 1^2 + 1^2 = 2 \\
F_4^4(15) =& F_4(2) = F_4([2]_4) = 2^2 = 4 \text{ e} \\
F_4^5(15) =& F_4(4) = F_4([1]_4) = 1^2 = 1.
\end{aligned}$$

Os cálculos restantes, deixamos aos cuidados do leitor. Contudo, apresentamos a Tabela 1, onde é possível verificar o número de interações k necessárias para se obter a imagem 1 pela função F_4.

Tabela 1: Base 4

m	$F_4^k(m) = 1$	m	$F_4^k(m) = 1$
1	$F_4^1(1) = 1$	9	$F_4^4(9) = 1$
2	$F_4^2(2) = 1$	10	$F_4^3(10) = 1$
3	$F_4^5(3) = 1$	11	$F_4^5(11) = 1$
4	$F_4^1(4) = 1$	12	$F_4^5(12) = 1$
5	$F_4^3(5) = 1$	13	$F_4^4(13) = 1$
6	$F_4^4(6) = 1$	14	$F_4^5(14) = 1$
7	$F_4^4(7) = 1$	15	$F_4^5(15) = 1$
8	$F_4^2(8) = 1$		

Fonte: Elaboração dos autores.

Exemplo 2.9. *Os números 37 e 2341 são tristes na base decimal. Ao aplicamos F^k ao número 37 obtemos a sequência $\{37, 58, 89, 145, 42, 20, 4, 16, 37, \ldots\}$. Note que $F^1(37) = F^8(37) = 37$ e*

MATA, Rudney Carlos da; VELOSO, Marcelo Oliveira. Números Felizes e Pontos Fixos. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 1, p. e3002, 7 de março de 2023. https://doi.org/10.35819/remat2023v9i1id6190.

assim obtemos uma sequência cíclica com os valores 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4 e 16. Logo, não existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $F^k(37) = 1$. Portanto, 37 é um número triste.

O mesmo acontece com 2341: ao aplicamos F^k, obtemos $\{2341, 30, 9, 81, 65, 61, 37, \ldots\}$. Como encontramos $F^6(2341) = 37$, temos que 2341 incidirá no mesmo ciclo do número 37 e, portanto, também será um número triste.

Exemplo 2.10. *É possível verificar por inspeção direta, ou utilizando recurso computacional, que os números felizes na base decimal menores que 100 são*

$$1,\ 7,\ 10,\ 13,\ 19,\ 23,\ 28,\ 31,\ 32,\ 44,\ 49,\ 68,\ 70,\ 79,\ 82,\ 86,\ 91,\ 94 \text{ e } 97.$$

E que as iteradas da função felicidade nos demais números, menores que 100, acabam atingindo o conjunto cíclico

$$\{4,\ 16,\ 37,\ 58,\ 89,\ 145,\ 42,\ 20\}.$$

Ou seja, são números tristes.

3 Pontos Fixos

Nesta seção, vamos explorar os pontos fixos da função felicidade. Em particular, exibimos dois métodos para determiná-los. O primeiro método requer a solução de várias equações, o outro explora a relação entre pontos fixos e os números que são soma de dois quadrados.

Um número inteiro positivo n é chamado de **ponto fixo** na base b quando $F_b(n) = n$. Por simplicidade, quando não houver confusão em relação à base, em vez de dizer que n é *ponto fixo na base* b, diremos apenas que n é *ponto fixo*.

É fácil verificar que toda base tem pelo menos um ponto fixo, o número 1. Existem bases com mais de um ponto fixo, como podemos ver no exemplo a seguir.

Exemplo 3.1. *Utilizando a base 5, temos:*

$$F_5(13) = F_5([23]_5) = 2^2 + 3^2 = 13 \text{ e } F_5(1) = 1.$$

Logo, na base 5, temos pelo menos dois pontos fixos 1 e 13.

Como encontrar os pontos fixos de uma base? O restante desta seção é dedicado a responder essa questão.

MATA, Rudney Carlos da; VELOSO, Marcelo Oliveira. Números Felizes e Pontos Fixos. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 1, p. e3002, 7 de março de 2023.
https://doi.org/10.35819/remat2023v9i1id6190.

Teorema 3.2. *Um inteiro n é ponto fixo na base $b \geq 2$ se, e somente se, n é da forma $n = [xy]_b = xb + y$ e satisfaz a equação*

$$x^2 + y^2 = xb + y.$$

Prova. *O resultado do Teorema 2.5 garante que os pontos fixos da função F_b se encontram no conjunto $\{1, 2, \dots, b^2 - 1\}$. Como $b^2 - 1 = (b-1)b + b - 1$, temos que os possíveis candidatos a pontos fixos possuem no máximo 2 dígitos (em qualquer base b). Logo, se n é ponto fixo na base b, então n é da forma*

$$n = [xy]_b = xb + y,$$

onde $0 \leq x,\, y \leq b - 1$. Como $F_b(n) = F_b([xy]_b) = x^2 + y^2$ e $F_b(n) = n = xb + y$, segue que

$$x^2 + y^2 = xb + y. \tag{1}$$

Agora suponha que $n = [xy]_b = xb + y$ e satisfaz $x^2 + y^2 = xb + y$, então

$$F_b(n) = F_b([xy]_b) = x^2 + y^2 = xb + y = n.$$

Ou seja, n é ponto fixo na base b. Verificando o resultado.

É proveitoso notar que o número 1 é o único ponto fixo com um dígito. De fato, se $n > 1$ temos $n^2 > n$. Assim, à exceção do número 1, todo ponto fixo possui dois dígitos. Observe que $x = 0$, na equação $x^2 + y^2 = xb + y$, implica $y^2 = y$. Então $y = 1$ e temos $n = [01]_b = 1$. Logo, podemos supor $x > 0$ na expressão $x^2 + y^2 = xb + y$.

No Exemplo 3.1, verificamos que $[1]_5$ e $[23]_5$ são pontos fixos na base 5. Será que existem outros pontos fixos na base 5? A resposta é dada no exemplo a seguir.

Exemplo 3.3. *Determinando os pontos fixos na base 5. Observe que a Equação (1) na base 5 é escrita da seguinte maneira:*

$$x^2 + y^2 = 5x + y,$$

onde $0 \leq x,\, y < 5$ e $x \neq 0$. Vamos substituir nessa equação, caso a caso, quando $0 \leq y < 5$.

- $y = 0 \Rightarrow x^2 = 5x \Rightarrow x = 0$ *ou* $x = 5$. *Impossível, pois* $0 < x < 5$.
- $y = 1 \Rightarrow x^2 + 1^2 = 5x + 1 \Rightarrow x = 0$ *ou* $x = 5$. *Impossível, pois* $0 < x < 5$.
- $y = 2 \Rightarrow x^2 + 4 = 5x + 2 \Rightarrow x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$. *Impossível, pois x não é inteiro.*

MATA, Rudney Carlos da; VELOSO, Marcelo Oliveira. Números Felizes e Pontos Fixos. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 1, p. e3002, 7 de março de 2023. https://doi.org/10.35819/remat2023v9i1id6190.

- $y = 3 \Rightarrow x^2 + 9 = 5x + 3 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2$ *ou* $x = 3$. *Logo,* $xy = [23]_5$ *ou* $xy = [33]_5$ *são pontos fixos.*

- $y = 4 \Rightarrow x^2 + 16 = 5x + 4 \Rightarrow x^2 - 5x + 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm i\sqrt{23}}{2}$. *Impossível, pois* x *não é um número inteiro.*

Desse modo, os pontos fixos na base 5 são $1 = [1]_5$, $13 = [23]_5$ *e* $18 = [33]_5$.

Vejamos o que ocorre na base 11.

Exemplo 3.4. *Determinando os pontos fixos na base 11. É necessário resolver a Equação* 1*, na base 11. Ou seja,*

$$x^2 + y^2 = 11x + y \tag{2}$$

onde $0 \leq x,\ y < 11$ *e* $x \neq 0$. *Substituindo na equação* 2 *os valores* $y = 0, \ldots, 10$*, e resolvendo em* x*, caso a caso, obtemos os os pontos fixos*

$$1 = [1]_{11},\ 31 = [56]_{11} \text{ e } 36 = [66]_{11}.$$

Para determinar os pontos fixos numa determinada base não é necessário testar todos os números da forma $[xy]_b$, mas somente os que satisfazem $1 < y < 1 + \frac{b}{2}$.

Teorema 3.5. *Seja* $[xy]_b$ *é um ponto fixo na base* $b \geq 2$. *Se* $x \neq 0$*, então* $1 < y < 1 + \frac{b}{2}$.

Prova. *Segue do Teorema* 3.2 *que se* $[xy]_b$ *é um ponto fixo na base* $b \geq 2$*, então satisfaz*

$$x^2 + y^2 = xb + y \tag{3}$$

Se y *igual a 0 ou 1, na Equação* 3*, temos que* $x^2 = xb$. *O que implica* $x = 0$ *ou* $x = b$. *Logo,* $y > 1$*, pois* $0 < x < b$. *Da Equação* 3*, também obtemos a seguinte equação do segundo grau, em* x*,*

$$x^2 - xb + y^2 - y = 0,$$

cujo discriminante é $\Delta = b^2 - 4(y^2 - y)$. *Assim* $b^2 - 4(y^2 - y) \geq 0$*, pois* $0 < x < b$. *Logo*

$$-4y^2 + 4y + b^2 \geq 0.$$

Resolvendo essa inequação, obtemos

$$\frac{1 - \sqrt{1 + b^2}}{2} \leq y \leq \frac{1 + \sqrt{1 + b^2}}{2}.$$

Note que $1+b^2 < 1+2b+b^2 = (1+b)^2$, *pois* $b \geq 2$. *Isso implica que* $\sqrt{1+b^2} < 1+b$. *Portanto,*

$$1 < y \leq \frac{1+\sqrt{1+b^2}}{2} < \frac{1+1+b}{2} = 1+\frac{b}{2}.$$

Donde segue o resultado.

Este resultado restringe o número de equações que devemos resolver para determinar os pontos fixos. Então, no Exemplo 3.4, não era necessário calcular os casos $y = 0,\, 1,\; 7,\, 8,\, 9,\, 10$. Explicitando como o Teorema 3 otimiza os cálculos para determinar os pontos fixos. Vejamos outro exemplo:

Exemplo 3.6. *Seja* $n = [xy]_{17}$ *um ponto fixo na base 17, então*

$$x^2 + y^2 = 17x + y, \tag{4}$$

onde $0 < x < 17$ *e* $1 < y < 1 + \frac{17}{2} = 9,5$ *(Teoremas* 3.2 *e* 3.5*).*

Assim, temos que resolver a Equação 4 *apenas para* $y = 2, \ldots, 9$. *Portanto, os pontos fixos na base 17 são*

$$1 = [1]_{17},\ 40 = [26]_{17},\ 261 = [F6]_{17},\ 58 = [37]_{17},\ 245 = [E7]_{17},\ 145 = [89]_{17} \text{ e } 162 = [99]_{17},$$

onde $E = 14$ *e* $F = 15$.

A seguir, descrevemos um método bem elegante para encontrar os pontos fixos proposto por Beardon (1998). Para encontrar todos os pontos fixos numa determinada base b, devemos encontrar todos os números de 2 dígitos que satisfaçam $F_b(n) = n$. O que é equivalente a resolver a Equação 1, em um intervalo específico de números inteiros, (veja 3.5). Agora, observe que

$$x^2 + y^2 = xb + y$$

é equivalente à equação

$$x^2 - xb + y^2 - y = 0.$$

Multiplicando essa equação por 4 e completando os quadrados do lado esquerdo, obtemos

$$(2x-b)^2 + (2y-1)^2 = b^2 + 1.$$

Portanto, encontrar os pontos fixos de uma determinada base b equivale a solucionar a seguinte equação:

$$(2x-b)^2 + (2y-1)^2 = b^2 + 1. \tag{5}$$

Isto significa encontrar todas as formas de expressar $b^2 + 1$ como a soma de dois quadrados. Veja Garcia e Lequain (2018) para um estudo sobre inteiros que são soma de dois quadrados.

Exemplo 3.7. *No Exemplo* 3.4*, determinamos os pontos fixos na base 11. Agora, vamos refazer isso utilizando a Equação* (5)*. Então, temos que resolver a equação*

$$(2x - 11)^2 + (2y - 1)^2 = 11^2 + 1 = 122.$$

Há apenas uma maneira de escrever 122 como a soma de dois quadrados $1^2 + 11^2$*. Assim, basta resolver*

$$2x - 11 = \pm 1 \quad \textit{e} \quad 2y - 1 = \pm 11$$
$$2x - 11 = \pm 11 \quad \textit{e} \quad 2y - 1 = \pm 1$$

para determinar os pontos fixos

$$[1]_{11},\ [56]_{11} \ \textit{e} \quad [66]_{11}.$$

Exemplo 3.8. *Para determinar os pontos fixos na base 17 (veja Exemplo* 3.6*), vamos resolver a equação*

$$(2x - 17)^2 + (2y - 1)^2 = 17^2 + 1 = 290.$$

Existem 2 maneiras de escrever 290 como soma de dois quadrados, $1^2 + 17^2$ *e* $11^2 + 13^2$*. Assim, é suficiente resolver as seguintes equações:*

$$2x - 17 = \pm 1 \ \textit{e}\ 2y - 1 = \pm 17, \ \textit{o que implica}\ x = 8 \ \textit{ou}\ x = 9 \ \textit{e}\ y = 9,$$

$$2x - 17 = \pm 17 \ \textit{e}\ 2y - 1 = \pm 1, \ \textit{o que implica}\ x = 0 \ \textit{e}\ y = 1,$$

$$2x - 17 = \pm 11 \ \textit{e}\ 2y - 1 = \pm 13, \ \textit{o que implica}\ x = 14 \ \textit{ou}\ x = 3 \ \textit{e}\ y = 7,$$

$$2x - 17 = \pm 13 \ \textit{e}\ 2y - 1 = \pm 11, \ \textit{o que implica}\ x = 15 \ \textit{ou}\ x = 2 \ \textit{e}\ y = 6,$$

para encontrar os pontos fixos da base 17:

$$[1]_{17},\ [89]_{17},\ [99]_{17},\ [F6]_{17}\ [26]_{17},\ [E7]_{17} \ \textit{e}\ [37]_{17},$$

onde $E = 14$ *e* $F = 15$*.*

4 Considerações Finais

É sempre possível verificar se um inteiro positivo é número é feliz (Teorema 2.7) em qualquer base posicional. Isso permite a exploração de outras questões interessantes. Por exemplo, a caracterização dos pontos fixos da função felicidade (Teorema 3.2), e que todo número na base 4 é feliz (veja Exemplo 2.8). A quantidade de números primos felizes e os números felizes em sequência são questões interessantes e que devem ser exploradas em trabalhos futuros. Notadamente, estimula uma generalização dos vários conceitos apresentados para uma variação do expoente da soma da função felicidade e não somente a soma dos quadrados dos seus dígitos.

Referências

BEARDON, A. F. Sums of squares of digits. **The Mathematical Gazette**. v. 82, p. 379-388, 1998.

EL-SEDY, E.; SIKSEK, S. On Happy Numbers. **Rocky Mountain Journal of Mathematics**. v. 30, n. 2, p. 565-570, 2000. DOI: www.doi.org/10.1216/rmjm/1022009281.

GARCIA, A.; LEQUAIN, Yves. **Elementos de Álgebra**. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.

GRUDMAN, H. G.; TEEPLE, E. A. Generalized Happy Numbers. **The Fibonacci Quarterly**. p. 462-466, 2001. Disponível em: https://www.fq.math.ca/Scanned/39-5/grundman.pdf. Acesso em: 22 jan. 2023.

GUY, R. **Unsolved Problems in Number Theory**. 3. ed. New York: Springer-Verlag, 2004.

HEFEZ, A. **Aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro: Coleção PROFMAT, SBM, 2016.

MUTTER, S. A. **Happy Numbers**: An Exploration of An Iterated Function in Different Bases. A Senior Project submitted to The Division of Science, Mathematics, and Computing of Bard College, 2010. Disponível em: https://media.gradebuddy.com/documents/1849233/5193b459-c8ea-46a9-a583-580895ca1a7e.pdf. Acesso em: 21 fev. 2023.

PAN, H. On consecutive happy numbers. **Journal of Number Theory**. v. 128, n. 6, p. 1646-1654, jun. 2008. DOI: www.doi.org/10.1016/j.jnt.2007.11.009.

5 Agradecimentos

Os autores agradecem aos revisores pelas valiosas sugestões e comentários que agregaram inúmeras melhorias ao texto.