Um passeio pelos números ondulantes

A walk through the undulating numbers

Un paseo por los números ondulantes

Fernando Soares de Carvalho[1]
Universidade Federal do Tocantins (UFT), Colegiado de Matemática, Arraias, TO, Brasil
https://orcid.org/0000-0001-6639-0716, http://lattes.cnpq.br/8561806800139382
Eudes Antonio Costa[2]
Universidade Federal do Tocantins (UFT), Colegiado de Matemática, Arraias, TO, Brasil
https://orcid.org/0000-0001-6684-9961, http://lattes.cnpq.br/8731273940556992

Resumo: Nestas notas consideramos um subconjunto dos números naturais chamado de números *ondulantes*. Neste subconjunto numérico, nosso interesse está centrado em propriedades relacionadas a mudança de base, critérios de divisibilidade e primalidade. Utilizamos o software matemático *Octave* para escrever um código com o objetivo de listar os números primos *suavemente ondulantes* menores que 10^{13}.

Palavras-chave: Divisibilidade; Números Ondulantes; Primalidade.

Abstract: In these notes we will consider a subset of the natural numbers called *undulating* numbers. In this numerical subset our interest is centered on properties related to base change, divisibility and primality of *undulating* numbers. We use the mathematical software *Octave* to write a code in order to list the prime *smoothly undulating* numbers smaller than 10^{13}.

Keywords: Divisibility; Undulating Numbers; Primality.

Resumen: En estas notas consideramos un subconjunto de los números naturales llamados números *ondulantes*. En este subconjunto numérico, nuestro interés se centra en las propiedades relacionadas con el cambio de base, los criterios de divisibilidad y la primalidad. Usamos el software matemático *Octave* para escribir un código que enumere los números primos *ondulando suavemente* menores que 10^{13}.

Palabras clave: Divisibilidad; Números Ondulantes; Primalidad.

Data de submissão: 25 de abril de 2022.

Data de aprovação: 13 de setembro de 2022.

[1]**Currículo sucinto**: Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Goiás, doutor em Ciências Mecânicas pela Universidade de Brasília, docente adjunto da Universidade Federal do Tocantins, Arraias. **Contribuição de autoria**: Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição. **Contato**: fscarvalho@uft.edu.br.

[2]**Currículo sucinto**: Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Goiás, doutor em Matemática pela Universidade de Brasília, docente adjunto da Universidade Federal do Tocantins, Arraias. **Contribuição de autoria**: Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição. **Contato**: eudes@uft.edu.br.

1 Introdução

Neste trabalho apresentamos nosso estudo sobre propriedades relativas a critérios de divisibilidade e mudança de base na classe de números chamados de *ondulantes*. Observa-se que em todo o texto, a referência a *número* é direcionada aos elementos do conjunto dos números inteiros positivos (números naturais). Por exemplo, se os algarismos (ou dígitos) de um número oscilam para maior ou menor do que os dígitos adjacentes a eles, tais como, 2021 e 253612, então o número é chamado de inteiro *ondulante*. Já o termo *suavemente ondulante,* refere-se aos números cujos algarismos adjacentes se alternam apenas entre dois algarismos, como em 7676767 ou 858585. Uma definição formal é apresentada a seguir:

Definição 1.1. *Seja $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ o conjunto de dígitos ou algarismos no sistema posicional decimal.*

(a) Dizemos que um número natural N, com $n > 2$ algarismos é ondulante quando,

$$N = a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n, \quad \textit{com } a_1 \neq 0 \ \ e \ \ a_i \in D, \textit{ para } i = 1, 2, ...n, \tag{1}$$

e alternadamente $a_1 < a_2$, $a_2 > a_3$, ... ou $a_1 > a_2$, $a_2 < a_3$, ..., ou seja, após o primeiro dígito os próximos dígitos alternadamente aumentam e diminuem ou diminuem e aumentam. No entanto, os valores da diferença absoluta entre dois dígitos adjacentes podem diferir.

(b) Dizemos que um número natural N, formado por $n > 2$ algarismos é suavemente ondulante (ou alternado) quando,

$$N = \underbrace{aba \cdots ab}_{n\ par} \textit{ ou } N = \underbrace{aba \cdots ba}_{n\ impar}, \quad \textit{com } \ a,\ b \in D, \ \ a \neq b \textit{ e } a \neq 0\ . \tag{2}$$

Observe que, os números inteiros 317, 2021, 523265 e 90634360 são *ondulantes*, enquanto que os números 3535353 e 9494 são *suavemente ondulantes*. É fácil notar que, nos números *suavemente ondulantes* o valor absoluto da diferença entre dois dígitos adjacentes é constante.

No trabalho de Costa e Costa [2, 2021], é apresentado um estudo sobre a primalidade dos números *suavemente ondulantes* formados apenas pelos algarismos 1(um) e 0(zero), no qual mostra-se que dentre esses números, apenas o número 101 é primo. Nosso interesse pela primalidade desses números é motivada pela leitura de Ribenboin [9] .

Aqui, mostraremos nosso estudo e os resultados obtidos acerca dos números *suavemente ondulantes*. Neste contexto, consideramos critérios de divisibilidade já bem conhecidos na litera-

https://doi.org/10.35819/remat2022v8i2id6043.

tura. Os objetivos principais se concentram em estabelecer relações entre os valores a, b e n, de acordo com a Definição 1.1(b). Apresentamos também, propriedades relativas à mudança de base e critérios de divisibilidade, destacando as dificuldades em encontrar números primos na classe de números *suavemente ondulantes*.

A partir de agora, será considerada apenas a classe de números *suavemente ondulantes*. Por simplicidade, (e conveniência) indicaremos por AB o conjunto dos números *suavemente ondulantes* da Definição 1.1(b) e diremos apenas que N é um número (com $n > 2$ algarismos) *suavemente ondulante* do tipo AB, se $N \in AB$.

Exemplo 1.2. *Os números 10101, 232323 e 5353535, são pertencentes ao conjunto AB. E também, os números primos 101, 151, 191, 313, 373, 727, 787, 919, 1212121 e 929292929, entre outros, são do tipo AB.*

Usaremos a notação $N = ab[n]$, em que n indica a quantidade de dígitos do número $N \in AB$, para $n > 2$. Por exemplo, $10[5] = 10101$ e $23[8] = 23232323$. Assim, os números *suavemente ondulantes* podem ser escritos na forma:

$$ab[n] = \begin{cases} a\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} 10^{2i} + b\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 10^{2i-1}, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ \\ a\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} 10^{2i-1} + b\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} 10^{2i}, & \text{se } n \text{ é par .} \end{cases} \tag{3}$$

2 Primalidade dos números suavemente ondulantes

Nesta seção, nosso intuito é estudar a primalidade dos números no conjunto AB, motivados e inspirados em estudos e tópicos já apresentados (ou consagrados) na literatura, relacionados aos números primos e primos *repunidades* [1, 4, 9].

A primeira caracterização acerca dos números *suavemente ondulantes*, ocorre quando $b = 0$ em $ab[n]$, obtendo o resultado a seguir:

Proposição 2.1. *Nenhum número suavemente ondulante $ab[n]$ é primo, se $a > 1$ e $b = 0$.*

Demonstração. Basta notar que,

$$a0[n] = a \cdot (10[n]) \ .$$

Logo, $a0[n]$ é um número composto, divisível por a e também por $10[n]$. Portanto, $a0[n]$ não é primo. □

CARVALHO, Fernando Soares de; COSTA, Eudes Antonio. Um passeio pelos números ondulantes. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 8, n. 2, p. e3001, 9 de novembro de 2022.
https://doi.org/10.35819/remat2022v8i2id6043.

Proposição 2.2. *[7, 8] Para quaisquer algarismos a e b, se $n > 3$ é par, então $ab[n]$ nunca é primo.*

Demonstração. Considerando $n > 3$ par, tem-se $n = 2k$, para algum k inteiro positivo. Agora, basta ver que, $ab[n] = ab[2k]$ é da forma,

$$\begin{aligned} ab[2k] &= \underbrace{\underbrace{ab}\,\underbrace{ab}\cdots\underbrace{ab}}_{k \text{ vezes}} \\ &= ab \cdot 10^{2k-2} + ab \cdot 10^{2k-4} + \cdots + ab \cdot 10^2 + ab \\ &= ab \cdot (10^{2(k-1)} + 10^{2(k-2)} + \cdots + 10^2 + 1) \\ &= ab \cdot (10[2k-1]) \, . \end{aligned}$$

Portanto, $ab[n]$ não será um número primo, se $n > 3$ é par. □

Um caso específico, que usaremos mais adiante:

Corolário 2.3. *Se $n = 6$, então $ab[6] = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot ab$, para quaisquer $a, b \in D$.*

Demonstração. Segue da Proposição 2.2 que, $ab[6] = ab \cdot (10[5])$, como $10101 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$, segue que,

$$ab[6] = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot ab \, .$$

□

Além disso, sabe-se que:

Proposição 2.4. *[2] Para todo $n > 3$, nenhum $10[n]$ é primo.*

A demonstração deste fato, pode ser obtida em [2]. Destacar que, o número $10[3] = 101$ é primo. Agora vale a pena relembrarmos um resultado auxiliar, o critério de divisibilidade por 3, que pode ser consultado em [5].

Lema 2.5. *[5] Um número inteiro é divisível por 3 se, e somente se, a soma dos seus algarismos é um múltiplo de 3.*

De agora em diante, consideramos $ab[n]$ os números do tipo AB, com n ímpar. Apresentamos outros resultados que obtivemos acerca dos números *suavemente ondulantes*.

Proposição 2.6. *Se $a \in \{2, 4, 5, 6, 8\}$ e n é ímpar, então $ab[n]$ não é primo.*

Demonstração. Basta observar que, se $a \in \{2, 4, 5, 6, 8\}$ e n é ímpar, então o número suavemente ondulante $ab[n]$ é par ou múltiplo de 5. Portanto, não é um número primo. □

Proposição 2.7. *Se a é igual a 3 ou 9 e n é ímpar, com $n \equiv 1 \mod 3$, então $ab[n]$ não é primo.*

Demonstração. Sendo n ímpar, observa-se que a quantidade de vezes que o algarismo b aparece é $\frac{n-1}{2}$. Como $n-1$ é par e $n-1 \equiv 0 \mod 3$, segue que $n-1 = 6t$ para algum inteiro positivo t, assim

$$\frac{n-1}{2} = \frac{6t}{2} = 3t\ ,$$

ou seja, $\frac{n-1}{2} \equiv 0 \mod 3$. Temos ainda que, $a \equiv 0 \mod 3$, logo a soma dos algarismos de $ab[n]$ é múltiplo de 3. Portanto, pelo Lema 2.5, conclui-se que $ab[n]$ não é primo. □

Proposição 2.8. *Se $b \in \{3, 6, 9\}$ e n é ímpar, com $n \equiv 2 \mod 3$, então $ab[n]$ não é primo.*

Demonstração. Sendo n ímpar, a quantidade de vezes que o algarismo a aparece é $\frac{n+1}{2}$. Como $n+1$ é par e $n+1 \equiv 0 \mod 3$, segue que $n+1 = 6t$, para algum t inteiro positivo, assim

$$\frac{n+1}{2} = \frac{6t}{2} = 3t\ ,$$

ou seja, $\frac{n+1}{2} \equiv 0 \mod 3$. Temos ainda que, $b \equiv 0 \mod 3$, logo $ab[n]$ é múltiplo de 3. Portanto, $ab[n]$ não é primo (Lema 2.5). □

Proposição 2.9. *Se $n = 3k$ é um inteiro ímpar e $a + b + a \equiv 0 \mod 3$, então $ab[n]$ não é primo.*

Demonstração. O caso em que $k = 1$, como $a + b + a \equiv 0 \mod 3$, segue que $ab[3]$ é múltiplo de 3.

Sendo $n = 3k > 3$ ímpar, teremos

$$ab[n] = ababab \cdot 10^{n-6} + ababab \cdot 10^{n-12} + \cdots + ababab \cdot 10^{3} + aba\ .$$

Segue do Corolário 2.3 que, 3 divide o número $ababab$. Logo, $ab[n]$ é uma soma de parcelas de números múltiplo de 3. Portanto, não é primo (Lema 2.5). □

De acordo com as Proposições 2.2 e 2.6, para que seja possível encontrar um número primo no conjunto AB, devemos procurar dentre os números $ab[n]$, com $n > 2$ (ímpar) e $a = 1, 3, 7$ ou 9. Utilizando o software *Octave*, escrevemos um pequeno código para encontrar todos os números primos da forma $ab[n] < 10^{13}$. Os números primos encontrados estão relacionados na Tabela 1.

CC BY

Tabela 1 – Números primos $ab[n] < 10^{13}$

a	$ab[n]$
1	10[3], 13[3], 15[3], 18[3], 19[3], 18[5], 12[7], 16[7], 12[11], 14[11]
3	31[3], 35[3], 37[3], 38[3], 32[5], 35[5], 32[9], 38[9], 32[11]
7	72[3], 75[3], 78[3], 79[3], 72[5], 74[5], 78[5], 72[9]
9	91[3], 92[3], 94[5], 95[5], 91[9], 92[9], 97[9], 98[9], 91[11]

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Observa-se que, para certas combinações dos algarismos a e b, poucos números primos do tipo AB são encontrados, ou até mesmo podem não existir. Por exemplo, na Proposição 2.4, vimos que, exceto 101, nenhum número da forma $10[n]$ é primo. E ainda,

Exemplo 2.10. *Para qualquer $n \geq 2$, o número $76[n]$ é sempre um número composto. De fato, da Proposição 2.2, temos que, se $n > 3$ é par, então qualquer número suavemente ondulante $ab[n]$ é composto. Assim, consideremos $n \geq 3$ ímpar e a divisão euclidiana do número natural n por 3, ou seja, existem k e r naturais, tais que $n = 3k + r$. Dividindo em 3 casos, teremos que:*

- *Se $n = 3k$, então 13 é um divisor;*
- *Se $n = 3k + 1$, então 7 é um divisor;*
- *Se $n = 3k + 2$, então 3 é um divisor .*

No primeiro caso, isto é, $n = 3k$, veja que o número $767 = 59 \cdot 13$ e, pelo Corolário 2.3, temos que 13 divide 767676. Assim, para qualquer inteiro ímpar $n > 3$,

$$76[n] = 767676 \cdot 10^{n-6} + 767676 \cdot 10^{n-12} + \cdots + 767676 \cdot 10^3 + 767 ,$$

ou seja, o número $76[n]$ é uma soma de parcelas de múltiplo de 13.

Para o caso em que $n = 3k + 1$, novamente pelo Corolário 2.3, tem-se que 7 divide 767676. Logo, para qualquer inteiro ímpar $n > 3$,

$$76[n] = 767676 \cdot 10^{n-6} + 767676 \cdot 10^{n-12} + \cdots + 767676 \cdot 10 + 7 ,$$

ou seja, o número $76[n]$ é uma soma de parcelas de múltiplo de 7.

Se tivermos $n = 3k + 2$, como n é ímpar, segue que $n = 6t + 2$, donde obtemos que, $76[n]$ é múltiplo de 3 (Proposição 2.8).

Exemplo 2.11. *Listamos outras combinações de algarismos a e b que não serão números suavemente ondulantes primos, para qualquer $n \geq 3$ ímpar, com $n = 3k + r$, k e r naturais:*

- *Se $n = 3k$, então $17[n]$ é um múltiplo de 3;*
- *Se $n = 3k + 2$, então $17[n]$ é um múltiplo de 7;*
- *Se $n = 3k$, então $34[n]$ é um múltiplo de 3;*
- *Se $n = 3k + 1$, então $34[n]$ é um múltiplo de 3;*
- *Se $n = 3k$, então $71[n]$ é um múltiplo de 3;*
- *Se $n = 3k + 1$, então $71[n]$ é um múltiplo de 7;*
- *Se $n = 3k + 1$, então $73[n]$ é um múltiplo de 3;*
- *Se $n = 3k + 2$, então $73[n]$ é um múltiplo de 7;*
- *Se $n = 3k + 1$, então $79[n]$ é um múltiplo de 7;*
- *Se $n = 3k + 2$, então $79[n]$ é um múltiplo de 3.*

3 Números suavemente ondulantes duplos

Números *suavemente ondulantes*, podem ser escritos em qualquer base $d > 1$. É utilizada a notação $ab[k]_d$, em que $k > 1$ indica a quantidade de dígitos do número escrito numa base $d > 1$ fixada. Por exemplo, $12[6]_3 = (121212)_3$ e $25[9]_7 = (252525252)_7$, representam números *suavemente ondulantes* nas bases 3 e 7, respectivamente. Bem como $10[5]_2 = (10101)_2$ é um número *suavemente ondulante* na base 2, ou seja, um número binário *suavemente ondulante* . Alguns números *suavemente ondulantes* trivialmente pequenos (dois dígitos), por exemplo o 21 tem representação binária 10101 *suavemente ondulante*. Pickover [6] chamou um número inteiro de *suavemente ondulante duplo* se ele for *suavemente ondulante* na base 10 e na base 2 e questionou se tal número existe para $k > 2$ dígitos, esta questão tem resposta negativa, veja Robinson [10]. Shirriff[11] generaliza números *suavemente ondulantes duplo* para números inteiros que são *suavemente ondulantes* em quaisquer duas bases, por exemplo, $252_9 = 131_{13}$. E por meio de recurso computacional exibe alguns deles.

CC BY

De forma geral, para $a,\ b \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$, $a \neq b$ e $a \neq 0$, um número *suavemente ondulante*, com $n \geq 2$ algarismos na base d, será representado por

$$ab[n]_d = \begin{cases} a \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} d^{2i} + b \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} d^{2i-1}, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ \\ a \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} d^{2i-1} + b \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} d^{2i}, & \text{se } n \text{ é par .} \end{cases} \tag{4}$$

É possível notar que, um número *suavemente ondulante* em uma base d (representado por $ab[n]_d$), não será necessariamente ondulante em uma base $d' \neq d$. Porém, existe uma relação entre números *suavemente ondulantes* e números *monodígitos*. Destaca-se que, números *monodígitos*, são formados por k algarismos iguais a n na base d' e são representados por,

$$(\underbrace{nn...n}_{k})_{d'} = (n \cdot \underbrace{11...1}_{k})_{d'} = n \cdot \frac{d'^k - 1}{d' - 1} = n \cdot (R_k)_{d'} \ ,$$

em que $(R_k)_{d'}$ é um número *repunidade*, isto é, a repetição da unidade ou um *monodígito* de algarismo 1 na base d', para maiores detalhes veja [1, 4, 3].

Por exemplo,

$$\begin{aligned} 10[8]_2 &= 2[4]_4 = 2 \cdot (R_4)_4, \\ 12[10]_3 &= 5[5]_9 = 5 \cdot (R_5)_9, \\ 12[14]_4 &= 6[7]_{16} = 6 \cdot (R_7)_{16}. \end{aligned}$$

Diante do exposto pelos exemplos, apresentamos uma demonstração para o resultado:

Proposição 3.1. *Para todo n par, se $ab[n]$ é um número suavemente ondulante na base d, então $ab[n]$ será um monodígito na base d^2.*

Demonstração. Considere $d' = d^2$, $c = (a \cdot d + b)$ e $n = 2k$ e para algum $k \in \mathbb{Z}$. Observe que,

$$\begin{aligned} ab[n]_d &= a \cdot d^{2k-1} + b \cdot d^{2k-2} + ... + a \cdot d^1 + b \\ &= c \cdot d^{2k-2} + c \cdot d^{2k-4} + ... + c \cdot d^0 \\ &= c \cdot (d')^{k-1} + c \cdot (d')^{k-2} + ... + c \cdot (d')^0 \\ &= c \cdot \frac{d'^k - 1}{d' - 1} = c \cdot (R_k)_{d'}, \end{aligned}$$

sendo $(R_k)_{d'}$ uma *repunidade* na base $d' = d^2$. $\square$

Shirriff[11] afirma que, "para alguns pares de bases, há um número infinito de soluções" e ainda exibe os seguinte exemplos: $(1010\ldots)_2 = (2525\ldots)_8$ ou $(1010\ldots)_2 = (5252\ldots)_8$. E justifica com o seguinte argumento: as bases d e d^k tem um número infinito de soluções para k ímpar, uma vez que k dígitos na base menor se combinam para formar dígitos na base maior. Assim, um número ondulante de 2^{kt} dígitos na base d, formará um número ondulante de 2^t dígitos na base d. Shirriff[11] também exibe o número 494949 como *suavemente ondulante* nas bases 10 e 15.

4 Considerações finais

Como dissemos, Shirriff [11] exibe o número 494949 como *suavemente ondulante duplo* e lista (apresenta) outros "grandes" números *suavemente ondulantes duplos*, que envolvem a base 10 e outra base não binária. Pickover [8] afirma que, a razão (justificativa) para que os números *suavemente ondulantes duplos* mais longos envolvam a base 10 e alguma outra base, ainda é desconhecida e anuncia que, "este continua sendo um problema místico para as gerações futuras" .

Ainda em Pickover[8], outras afirmações sem justificativas, também interessantes sobre os números *suavemente ondulantes* $ab[n]$, com $n \leq 13$, são mencionadas, a saber : (a) em qualquer base d, o número *suavemente ondulante* 121_d é um quadrado perfeito, basta observar que, $121_d = (d+1)^2$; (b) na base 10 existem apenas 4 números *suavemente ondulantes* menores do que 10^{31} que são quadrados perfeitos, mais precisamente, $121 = 11^2$, $484 = 22^2$, $676 = 26^2$ e $69696 = 264^2$; (c) na base 10, até o momento, é conhecido apenas um número *suavemente ondulante* que é uma potência com expoente maior que 2, o número $7^3 = 343$. A sentença (a) é facilmente verificável; quanto a (b) e (c), esperamos que fomentem uma motivação adicional para outros estudos sobre esta classe de números.

Referências

CARVALHO, F. S. ; COSTA, E. A. Escrever o número $111\cdots111$ como produto de dois números. **Revista do Professor de Matemática**, n. 87, p. 15-19, 2015.

COSTA, E. A. ; COSTA, G. A. Existem números primos na forma $101\cdots101$. **Revista do Professor de Matemática**, n. 103, p. 21-22, 2021.

COSTA, E. A.; SANTOS, D. C. Algumas propriedades sobre os números Monodígitos e Repunidades. **Revista de Matemática**, v. 2, p. 47-58, 2022. Disponível em: `https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5521`. Acesso em: 8 nov. 2022.

COSTA, E. A. ; SANTOS, D. C. Números Repunidades: algumas propriedades e resolução de problemas. **Professor de Matemática Online**, v. 8, n. 4, p. 495-503, 2020. DOI: https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo836.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. Coleção PROFMAT, 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

PICKOVER, Clifford A. Is There a Double Smoothly Undulating Integer? **Journal of Recreational Mathematics**, v. 22, n. 1, p. 52-53, 1990.

PICKOVER, Clifford A. **Keys to Infinity**, chapter 20. New York, 1995.

PICKOVER, Clifford A. **Wonders of Numbers**: Adventures in Mathematics, Mind, and Meaning. Chapter 52 and 88. Oxford University Press, 2003.

RIBENBOIM, Paulo. **Números primos: mistérios e recordes** . Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.

ROBINSON, D. F. There are no double smoothly undulating integers in both decimal and binary representation. **Journal of Recreational Mathematics**, v. 26, n. 2, p. 102-103, 1994.

SHIRRIFF, Ken. Comments on Double Smoothly Undulating Integers. **Journal of Recreational Mathematics**, v. 26, n. 2, p. 103-104, 1994.