

A Criptografia como motivação para a aprendizagem matemática¹

Cryptography as a motivation for mathematical learning

La Criptografía como motivación para el aprendizaje matemático



Ana Lourdes Moreno Rodrigues Silva¹

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), Macaúbas, BA, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-0162-6609>,  <http://lattes.cnpq.br/5980691037491392>



Ana Paula Perovano²

Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP), Vitória da Conquista, BA, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-0893-8082>,  <http://lattes.cnpq.br/8892821688981110>

Fernando dos Santos Silva³

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), Vitória da Conquista, BA, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-2059-4550>,  <http://lattes.cnpq.br/1193461132432149>

Resumo: A criptografia está presente no cotidiano e se constitui ferramenta essencial para conferir segurança e confidencialidade na transmissão e depósito de informações, tendo como base saberes e procedimentos matemáticos. Dessa forma, considera-se que é um tema com poder de contextualizar o processo de ensino e aprendizagem e despertar o interesse dos estudantes para aprender conteúdos matemáticos. Assim, este trabalho tem por objetivo apresentar a utilização da criptografia como ferramenta para motivar a aprendizagem do conceito de função. A pesquisa, de abordagem qualitativa, foi desenvolvida com estudantes do 9º ano de uma escola pública municipal. Os dados foram coletados por meio de questionários, de observação e análise das atividades realizadas pelos discentes. O uso da Sala Aula Invertida como metodologia de ensino, somada aos recursos digitais selecionados, contribuíram para a motivação dos estudantes para realizar as atividades, apresentando suas compreensões sobre o conceito de função. Destarte, espera-se que os resultados alcançados possam servir de estímulo para práticas de ensino mais contextualizadas e significativas.

¹ Este artigo é um recorte da dissertação de mestrado “A criptografia como estímulo à aprendizagem matemática”, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6411&id2=171054149.

¹ **Currículo sucinto:** Mestre em Matemática pela Universidade Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (PROFMAT), especialista em educação digital pela UNIVESP, pedagoga e docente de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental nos municípios de Boquira e Macaúbas, Bahia. **Contribuição de autoria:** Administração do Projeto, Análise Formal, Conceituação, Curadoria de Dados, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação, Metodologia, Recursos, Validação e Visualização. **Contato:** lu_nanamrs@hotmail.com.

² **Currículo sucinto:** Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP) e docente na Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, *Campus* Vitória da Conquista. **Contribuição de autoria:** Escrita – Revisão e Edição. **Contato:** apperovano@uesb.edu.br.

³ **Currículo sucinto:** Doutor em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial pelo SENAI CIMATEC e docente na Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, *Campus* Vitória da Conquista. **Contribuição de autoria:** Administração do Projeto, Escrita – Revisão e Supervisão. **Contato:** fssilva@uesb.edu.br.



Palavras-chave: Criptografia; Matemática; Função.

Abstract: Cryptography is present in everyday life and constitutes an essential tool to provide security and confidentiality in the transmission and deposit of information, based on knowledge and mathematical procedures. Thus, it is considered that it is a theme with the power to contextualize the teaching and learning process and to awaken students' interest in learning mathematical content. Thus, this work aims to present the use of cryptography as a tool to motivate the learning of the concept of function. The research, with a qualitative approach, was developed with 9th grade students from a municipal public school. Data were collected through questionnaires, observation and analysis of activities carried out by students. The use of the Inverted Classroom as a teaching methodology, added to the selected digital resources, contributed to the students' motivation to carry out the activities, presenting their understanding of the concept of function. Thus, it is expected that the results achieved can serve as a stimulus for more contextualized and meaningful teaching practices.

Keywords: Cryptography; Math; Function.

Resumen: La criptografía está presente en la vida cotidiana y constituye una herramienta fundamental para brindar seguridad y confidencialidad en la transmisión y depósito de información, basada en conocimientos y procedimientos matemáticos. Así, se considera que es un tema con el poder de contextualizar el proceso de enseñanza y aprendizaje y de despertar el interés de los estudiantes por aprender contenidos matemáticos. Así, este trabajo tiene como objetivo presentar el uso de la criptografía como herramienta para motivar el aprendizaje del concepto de función. La investigación, con enfoque cualitativo, se desarrolló con estudiantes de 9 grado de una escuela pública municipal. Los datos fueron recolectados a través de cuestionarios, observación y análisis de actividades realizadas por los estudiantes. El uso del Aula Invertida como metodología de enseñanza, sumado a los recursos digitales seleccionados, contribuyó a la motivación de los estudiantes para la realización de las actividades, presentando su comprensión del concepto de función. Así, se espera que los resultados alcanzados puedan servir de estímulo para prácticas docentes más contextualizadas y significativas.

Palabras clave: Criptografía; Matemáticas; Función.

Data de submissão: 30 de março de 2022.

Data de aprovação: 24 de novembro de 2022.

1 Introdução

Os estudantes da Educação Básica podem perceber a presença da matemática no cotidiano e saber da sua importância, mas ainda percebemos que há aversão pelo fato da disciplina envolver



muitos cálculos e regras. Essa falta de empatia pode estar relacionada a abordagens descontextualizadas, nas quais os estudantes não conseguem perceber a aplicabilidade do conteúdo. Segundo o Documento Curricular Referencial da Bahia para a Educação Infantil e Ensino Fundamental:

[...] cada escola deve ser suficientemente flexível para contemplar os estudantes de diferentes níveis de habilidade e deve espelhar-se em suas necessidades - entre estas figuram experiências matemáticas significativas e interessantes sobre outras áreas de aprendizagem. Além disso, deve oportunizar a compreensão da necessidade de continuarem estudando Matemática além dos muros da escola; e uma formação como sujeitos alfabetizados matematicamente, capazes de fazer uso social das habilidades e competências construídas no Ensino Fundamental (BAHIA, 2019, p. 335).

Pela citação, compreendemos que a escola possui autonomia para envolver o estudante em experiências matemáticas significativas de modo que faça uso dos conhecimentos adquiridos para resolver problemas em diferentes contextos sociais.

Para que o sujeito adquira tal nível de letramento matemático, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) define oito competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental. Dentre elas, são citadas a capacidade do aluno reconhecer a Matemática como uma ciência viva e humana, fruto das necessidades de diferentes culturas e que contribui para solucionar diversos problemas do mundo, além de servir de alicerce para outras áreas e descobertas. Ao final dessa etapa, o estudante também deve desenvolver o raciocínio lógico, a capacidade de compreender e aplicar os conhecimentos matemáticos para resolver problemas em diferentes contextos, desenvolvendo o espírito investigativo, a autoestima e a perseverança na busca de soluções. Para isso, poderá utilizar diferentes processos e ferramentas matemáticas somados às tecnologias digitais disponíveis (BRASIL, 2017).

Em nossa visão, a criptografia pode contribuir para o desenvolvimento das competências elencadas, visto que faz parte da história, do cotidiano humano e utiliza procedimentos e ferramentas matemáticas. Tem por finalidade ocultar o conteúdo de mensagens, tornando as informações incompreensíveis para pessoas não autorizadas e está presente em diversas situações: senhas, compras e mensagens pela internet, cartões, aplicativos, ou seja, tudo que precisa ser mantido em segredo. Portanto, está relacionada às necessidades da sociedade, atrelada ao desenvolvimento tecnológico. Dessa forma, ponderamos que a abordagem de funções a partir da criptografia pode despertar o interesse nos estudantes para o estudo desse conteúdo.

Dessarte, o objetivo deste trabalho é apresentar a utilização criptografia como ferramenta para motivar a aprendizagem do conceito de função. A escolha por tal conteúdo se deu pelo fato



de estar relacionado com os algoritmos de alguns sistemas criptográficos e ser definido pela BNCC como um dos objetos de conhecimento para o 9º ano do Ensino Fundamental. Esse conteúdo está relacionado com a habilidade EF09MA06, “Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis” (BRASIL, 2017, p. 316).

Tendo em vista o objetivo da pesquisa, planejamos uma intervenção com uma carga horária prevista de 20 horas para ser desenvolvida com estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental. Durante os cinco encontros, realizados remotamente, foram trabalhados a história da criptografia e seus fundamentos, alguns tipos de cifras e abordagem do conceito de função a partir do código de César. Destarte, aqui trazemos um recorte da dissertação de Silva (2021) de modo a apresentar a utilização da criptografia como ferramenta para motivar a aprendizagem do conceito de função com enfoque para as atividades práticas.

2 Criptografia

O advento da escrita contribuiu para que povos e nações começassem a ter acesso a um número crescente de informações veiculadas, inicialmente, por meio de ilustrações, símbolos e escrita própria, passando por grandes invenções como o jornal, o rádio, a televisão e o telefone, até chegar ao computador, meios móveis (celulares, smartphones, tablets, notebooks) e internet. Esses últimos, imprescindíveis para a troca de informações na sociedade atual.

Com a evolução dos meios para troca de informações, emergiu a necessidade de criar mecanismos que garantam a segurança dos dados, evitando o acesso de pessoas não autorizadas. Dessa forma, começou a utilização de mensagens secretas, principalmente na esfera política, militar e econômica.

Uma das primeiras formas de agregar segurança ao processo comunicativo refere-se a esteganografia, palavra derivada do grego: *steganos* – coberto e *grafia* – escrita. Consiste em uma técnica para esconder, camuflar a informação por meio de processos físicos e/ou químicos. Costa e Figueiredo (2010) citam alguns contos do historiador grego Heródoto envolvendo essa técnica. Um deles cita que um certo grego para transmitir uma mensagem secretamente, raspa o cabelo do mensageiro e tatua a mensagem na cabeça raspada, sendo transmitida assim que o cabelo crescesse



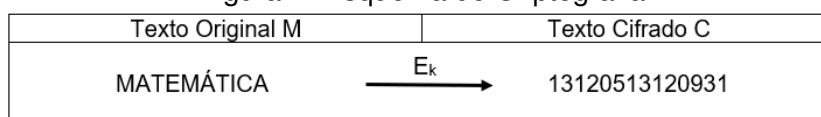
e revelada ao destinatário quando raspasse novamente o cabelo. Assim, a mensagem era escondida, mas caso fosse encontrada, seu conteúdo poderia ser lido por qualquer pessoa sem nenhum esforço.

Aos mesmos passos do desenvolvimento da técnica supracitada, houve a evolução da criptografia, palavra advinda do grego, *kryptos* – secreto, e *grafia* – escrita. Seu objetivo é modificar a mensagem original por meio de processos sistematizados, denominado de encriptação, tornando-a incompreensível para qualquer pessoa que não seja o receptor.

Mitani *et al.* (2007) descrevem as seguintes etapas do processo de criptografia:

- i) Inicialmente o remetente tem o texto original m , uma mensagem normal, sem criptografia.
Ex.: MATEMÁTICA.
- ii) Usando uma chave de criptografia E_k , esse texto é cifrado, tornando-o incompreensível para pessoas indesejadas.

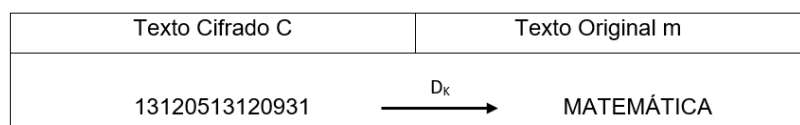
Figura 1: Esquema de Criptografia



Fonte: Adaptado de Mitani e Sato (2018, p. 20).

- iii) Ao receber a mensagem, o receptor usa uma chave de descryptografia D_k para restaurar o texto original.

Figura 2: Esquema de Descryptografia



Fonte: Adaptado de Mitani e Sato (2018, p. 20).

A chave de criptografia é um dado secreto do algoritmo de encriptação que o código utiliza para proteger o texto original. O algoritmo pode ser definido como uma série de operações numa sequência organizada para resolver determinado problema. Como evidenciado por Santos (2013, p. 16),

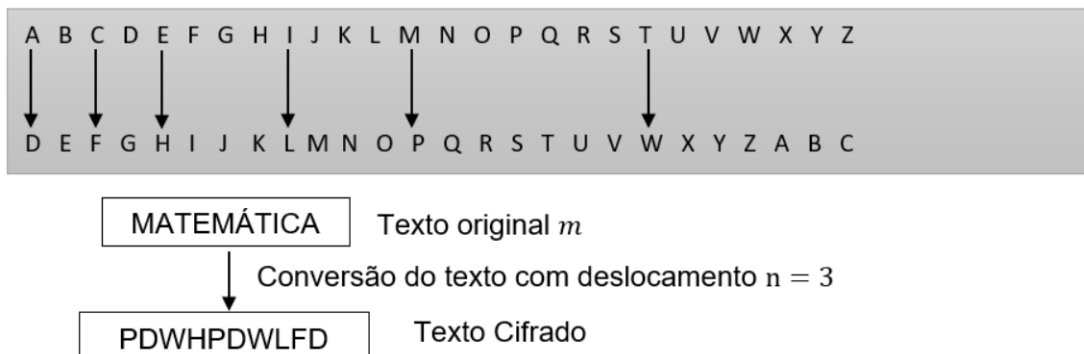


Uma das formas de trocar mensagens criptografadas requer que transmissor e receptor conheçam o algoritmo utilizado para encriptar a mensagem e a chave utilizada. Algoritmo é um conjunto de procedimentos, em sequência organizada, para resolver determinado problema.

Ao longo da história, foram criados vários métodos de criptografia baseados em técnicas de substituição e transposição. As primeiras têm por base a permutação das letras do alfabeto por outras, por símbolos ou por figuras, utilizando um padrão conhecido pelo receptor e destinatário. Já as cifras de transposição consistem em misturar as letras do texto original de acordo com uma regra, ou seja, as letras são permutadas segundo um algoritmo e uma chave determinados. Assim, as letras são reorganizadas, gerando um anagrama. Como exemplos serão citados a cifra de César, uma das mais antigas, a Enigma e a criptografia computadorizada.

A cifra de César recebeu esse nome, pois foi usada pelo ditador romano Júlio César (100-44 a.C.) para comunicar-se com seus aliados, durante as guerras, sem o conhecimento dos inimigos. “É, na realidade, um caso particular do código de Substituição Monoalfabética, onde cada letra ou símbolo é substituído sempre por uma mesma letra ou símbolo” (FRANÇA, 2014, p. 24). Dessa forma, o algoritmo de criptografia consiste no deslocamento de cada letra do texto original em n letras. Por exemplo, tomando $n = 3$, a palavra MATEMÁTICA seria criptografada conforme Figura 3.

Figura 3: Cifragem da palavra MATEMÁTICA de acordo com o Código de César



Fonte: Adaptado de Mitani e Sato (2018, p. 25).

Esse método é suscetível a um ataque criptográfico conhecido como análise de frequência, que pressupõe uma consistência entre a frequência das letras no texto original e a frequência das letras no texto cifrado. Por exemplo, a letra A aparece com mais frequência em um texto em português, então se a letra P aparecer com mais frequência no texto cifrado, pode-se supor que são correspondentes.



A Enigma foi usada pelos alemães na Segunda Guerra Mundial e era parecida com uma máquina de escrever antiga, conforme Figura 4, composta de um teclado e um painel luminoso com as letras do alfabeto. Se fosse teclada, por exemplo, a letra “M”, no painel acendia a letra correspondente que seria a codificação. Assim, combinava sistemas mecânicos e elétricos e seu segredo estava no uso de rotores que podiam oferecer protocolos diferentes, a cada combinação deles, aliados à técnica de substituição. As peças móveis da máquina mudavam de posição a cada vez que uma letra era pressionada, então se essa mesma letra fosse teclada, provavelmente teria uma cifra diferente. Com isso, evitaria a repetição de letras e garantiria imunidade aos métodos tradicionais de análise de frequência.

Figura 4: Máquina Enigma



Fonte: https://s2.glbimg.com/TWCzUx2XAQ7deE24oL11dyMP_u0=/e.glbimg.com/og/ed/f/original/2019/08/30/69714272_1347536952068161_513362189462011904_n.jpg.

Ainda, havia um painel de plugues que conectava duas letras através de fios elétricos que também deveriam ser mudados de posição diariamente. De acordo com Cimino (2018), havia no total cerca de 10.000.000.000.000.000 possíveis permutações para ajustes dos rotores e do painel de conexão. Devido a isso, para quebrar o código da Enigma foi necessário o roubo das chaves usadas pelos alemães, espionagem e um intenso trabalho de uma equipe formada por criptólogos, matemáticos e engenheiros. Cimino (2018) e Singh (2020) citam alguns nomes que se destacaram nessa tarefa: Marian Rejewski, Henryk Zygalski, Jerzy Rózycki, Alan Turing, Peter Twinn e



Tommy Flowers. O grupo teve êxito após construir o primeiro computador digital em grande escala, “o protótipo Colossus Mark I, com 1.500 válvulas” com o qual os criptoanalistas puderam decifrar mensagens com mais rapidez, garantindo a derrota alemã em muitas batalhas na Segunda Guerra Mundial.

Após ter contribuído para o resultado da guerra e para o nascimento do computador moderno, os criptoanalistas começaram a desenvolver e empregar a tecnologia computacional para quebrar cifras em alta velocidade e com a flexibilidade dos computadores programáveis. Ao mesmo tempo, os criptólogos se esforçavam para criar cifras mais seguras, iniciando, assim, uma batalha entre codificadores e decodificadores.

Como nas cifras manuais, a criptografia computadorizada pode utilizar, simultaneamente, a transposição e a substituição para torná-la mais segura. Além da segurança, a disseminação de computadores comerciais na década de 1960 apontaram a necessidade de um sistema civil de codificação padronizado. Como cita Singh (2020, p. 272), “uma empresa poderia usar um sistema particular de cifragem para garantir a segurança nas comunicações internas, mas não poderia enviar uma mensagem secreta para uma organização externa, a menos que o receptor usasse o mesmo sistema de cifragem”. O primeiro deles foi o Padrão de Criptografia de Dados (DES), baseado no criptosistema Lúcifer criado por Horst Feistel que trabalhava com Don Coppersmith na International Business Machines Corporation (IBM) nos anos de 1970.

O DES é um exemplo de cifra simétrica, ou seja, o emissor e o receptor comungam da mesma chave para codificar e decodificar mensagens. Essa chave precisava ser compartilhada e armazenada de forma segura. No entanto, esse tipo de criptografia não garante a identidade de quem enviou ou recebeu a mensagem. Por isso, os cientistas começaram a estudar as funções de mão única (funções fáceis de fazer, mas praticamente irreversíveis) e a aritmética modular (campo da Matemática rico em funções de mão única) para elaborar um sistema de criptografia assimétrico, ou seja, que utilizasse chaves diferentes para cifrar e decifrar mensagens. Um produto dessas pesquisas foi o sistema RSA, uma das cifras mais influentes da criptografia moderna e seu nome corresponde as iniciais do nomes: Ron Rivest e Adi Shamir e o matemático Leonard Adleman, cientistas responsáveis pela invenção.

Esse sistema é explicado por Cimino (2018) da seguinte forma (Alice e Bob, citados pelo autor, são os personagens do processo comunicativo):



[...] Ele usa uma função de mão única, como antes, mas aqui Alice cria uma chave multiplicando dois números primos grandes “ p ” e “ q ”: $p \times q = N$. Esses dois números são sua chave privada, e ela os guarda para si. O produto “ N ” faz parte da chave pública, que ela distribui a todo mundo junto com um número que chamaremos de “ e ”.

Num sistema computadorizado, o texto costuma ser codificado em ASCII ou alguma outra forma de código binário. Portanto, em essência o texto é um número. Chama-remos o texto original de número M e o texto cifrado, de número C . A função de mão única que usaremos é:

$$C = M^e \pmod{N}$$

Bob escolhe os números primos 17 como “ p ” e 11 como “ q ” e mantém ambos em segredo. mas divulga a chave pública N , que é $17 \times 11 = 187$, juntamente com $e = 7$, digamos. Digamos também que a mensagem de Alice e Bob seja simplesmente a letra inicial de seu nome, A, que é 65 em ASCII. Assim, ela codifica a mensagem:

$$C = 65^7 \pmod{187} = 142$$

Para decifrar a mensagem, Bob tem de descobrir sua chave de decodificação d usando a fórmula:

$$d = 1 \pmod{(p-1) \cdot (q-1)} / e$$

portanto,

$$d = 1 \pmod{16 \cdot 10} / 7 = 1 \pmod{160} / 7 = 23$$

Para decodificar a mensagem de Alice, Bob usa a fórmula:

$$M = C^d \pmod{187}$$

$$M = 142^{23} \pmod{187}$$

$$M = 65, \text{ ou seja, A em ASCII (CIMINO, 2018, p. 187).}$$

2.1 A criptografia como motivação para abordar conteúdos matemáticos em sala de aula

Com o objetivo de adicionar o embasamento necessário para o desenvolvimento da pesquisa e direcionar intervenções diferenciadas para a sala de aula, foi feito um levantamento no site da Biblioteca Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e no catálogo da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) de trabalhos sobre o tema, utilizando a frase: Criptografia e Matemática na Educação Básica. Foram selecionados vinte e quatro dissertações defendidas entre os anos de 2013 e 2019. A análise dessas dissertações revelou que a criptografia pode servir como motivação para abordar diversos conteúdos matemáticos na Educação Básica, como Funções, Matrizes, Análise Combinatória, Aritmética Modular (Divisão Euclidiana, Congruência, Sistema RSA).

Dentre os trabalhos analisados, onze deles relacionam criptografia e funções. Partem da premissa que é necessário tornar as aulas de matemática mais contextualizadas e significativas e, em geral, têm o mesmo objetivo: motivar o ensino aprendizagem dessa disciplina por meio da criptografia. Dessa forma, espera-se que, ao contextualizar o conteúdo com uma temática atual e utilizada cotidianamente, o estudante perceba a aplicabilidade do conteúdo e se interesse pelo saber matemático. No Quadro 1 apresentamos os autores que consideramos mais relevantes para esta pesquisa, assim como título dos trabalhos, metodologia de ensino e atividades.



Quadro 1: Pesquisas que Relacionam Criptografia e o Conteúdo Função

Autor e Título	Metodologia de Ensino/Atividades Desenvolvidas
1. Jaqueline de Moraes Rodrigues – Criptografia e conteúdos de matemática no Ensino Fundamental, 2013.	Tem como ponto de partida as dificuldades dos alunos do 9 ano na aprendizagem de funções e apresenta uma proposta que tem como metodologia a engenharia didática. As atividades aplicadas relacionam criptografia e funções, nas quais, inicialmente, o professor explica que existem dois tipos de criptografia: simétrica e assimétrica e, em seguida, são apresentadas três atividades. A primeira usa a Cifra de Chiqueiro para codificar e decodificar mensagens entre os alunos e a segunda apresenta um criptograma, uma adição que os alunos deveriam descobrir quais números correspondiam a cada letra. A terceira atividade consistia em codificar o nome da escola a partir da função $f(x) = 2x + 5$.
2. José Luiz dos Santos – A arte de cifrar, criptografar, esconder e salvar como fontes mediadoras para atividades de matemática básica, 2013.	São citados exemplos que correlacionam matemática e criptografia, como os conceitos de função aplicados às técnicas de cifragem por substituição e transposição. O autor faz uso da metodologia de resolução de problemas e propõe atividades para estudantes do Ensino Médio, tendo como base o conjunto de competências e habilidades definidas pela matriz de referência do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).
3. Ana Paula Ganassoli e Fernanda Ricardo Schankoski – Criptografia e matemática, 2015.	Propõem atividades para o Ensino Médio com situações-problema do tipo: “Cifre a mensagem que Carla escreveu para sua amiga Isabela: FESTA SURPRESA PARA A BIA, utilizando a seguinte regra: valor da letra +2” (GANASSOLI; SCHANKOSKI, 2015, p. 41). Para resolver essa questão o estudante deve olhar os valores das letras da mensagem original e adicionar 2, ou seja, utilizando a fórmula: $y = x + 2$, x representa o valor da letra da mensagem inicial e y da letra cifrada. As demais perguntas seguem essa mesma organização, porém utilizando outras funções e aumentando gradativamente o grau de complexidade.
4. Dayane Silva dos Santos – Uso da criptografia como motivação para o ensino básico de matemática, 2015.	Tem por objetivo compreender como as atividades envolvendo problemas de criptografia podem auxiliar os alunos na exploração das ideias associadas à função afim. De acordo com a autora, o trabalho tem como relevância a busca por metodologias diversificadas para o ensino da Matemática, a valorização dos conhecimentos prévios dos estudantes e a elaboração de atividades instigantes e desafiadoras que relacionam conhecimentos matemáticos e criptografia, pois estas são escassas.



6. Moisés de Oliveira Moura – A criptografia motivando o estudo das funções no 9º ano do ensino fundamental, 2019.	O trabalho é justificado pelo fato da criptografia estar presente no cotidiano dos alunos por meio de recursos digitais e, também, de favorecer conexões com outras áreas. A aplicação das atividades aconteceu em seis encontros com aplicação de diversas atividades envolvendo criptografia e funções bijetora e inversa.
7. Solange Mariano da Silva Santos – Aprendizagem das funções polinomiais do 1 e 2 grau mediada pelo jogo “Trilha Matemática Criptografada”: uma abordagem sob a perspectiva Vygotskiana, 2019.	Baseou-se na teoria Vigotskyana sobre os níveis de desenvolvimento e aprendizagem e na taxonomia de Bloom ² para desenvolver uma proposta que trabalha com funções polinomiais do 1 e 2 grau, com alunos do Ensino Médio, por meio do jogo “Trilha Matemática Criptografada”. Esse jogo consiste em um tabuleiro com cartas-perguntas criptografadas em forma de <i>QR CODES</i> .

Fonte: Elaboração dos autores (2021).

Nem todos os trabalhos analisados foram aplicados em sala de aula para verificar os resultados com os estudantes e/ou professores, mas todos avaliam as propostas de forma positiva, tendo em vista que podem tornar as aulas mais atrativas, instigando os estudantes a questionar, investigar e procurar soluções.

O diálogo com esses autores, a análise das atividades realizadas e os resultados encontrados contribuíram para adicionar o embasamento necessário para o desenvolvimento desta pesquisa e direcionar intervenções diferenciadas para a sala de aula.

3 Metodologia

A pesquisa aqui apresentada teve caráter qualitativo, sendo utilizados como instrumentos para a produção dos dados: questionários contendo questões abertas e fechadas, as observações da pesquisadora e um conjunto de atividades envolvendo criptografia e matemática. Sobre a pesquisa qualitativa, Marconi e Lakatos (2007, p. 269) mencionam que “preocupa-se em analisar e

²De acordo com Santos (2019), a Convenção Americana de Psicologia (APA) de 1948, realizada em Boston, reuniu um grupo de psicólogos que demonstraram interesse em discutir, definir e elaborar uma taxonomia dos objetivos dos processos educacionais. Liderados por Benjamim Bloom desenvolveram três deles: cognitivo, afetivo e psicomotor.



interpretar aspectos mais profundos, descrevendo a complexidade do comportamento humano, fornece análise mais detalhada sobre investigações, hábitos, atitudes, tendências de comportamento, etc”.

Os dados analisados foram obtidos por meio de uma intervenção desenvolvida em uma escola pública municipal, com 33 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, na época, com idade entre 13 e 15 anos. Devido à pandemia da COVID-19, as atividades foram realizadas de forma remota. Por isso, optou-se pela Sala de Aula Invertida (SAI) como metodologia de ensino, pois ela pode permitir que os alunos se apropriassem do conteúdo antecipadamente e participassem mais ativamente dos encontros pelo *Google Meet*. Neste sentido, Sant’ana (2021, p. 228), cita:

Vale destacar a grande distinção da sala de aula do ensino tradicional, no qual o professor transmite as informações ao aluno durante a aula, e em casa, realizar o estudo referente ao material abordado e as atividades (tarefas) de avaliação solitariamente, para assimilação do conteúdo. Já na SAI o estudante recebe orientação on-line para o estudo prévio, ficando a abordagem na sala de aula o lugar de aprendizagem ativa, onde há perguntas, discussões, trabalhos em equipe e atividades práticas.

De acordo com esta autora, a SAI é uma ferramenta que tem suas origens no Ensino Híbrido, o qual significa misturado, mesclado, combinado, sendo desenvolvido a partir de experiências *e-learning*. Essa forma de ensinar e aprender ainda é muito discutida, principalmente no cenário das atividades remotas, tem defensores no Brasil e utiliza as tecnologias com foco num processo educacional mais personalizado.

A proposta de intervenção foi apresentada inicialmente a direção e coordenação da escola, sendo analisadas alternativas para desenvolver o projeto de forma que não comprometesse somente as aulas de matemática. Assim, ficou combinado que seriam concedidas todas as aulas, durante uma semana, para a realização da pesquisa. Foi cogitado desenvolver o projeto no turno oposto, mas os estudantes poderiam ficar sobrecarregados, comprometendo os resultados tanto da pesquisa quanto das aulas normais. Com essa decisão, a pesquisadora, a direção e a coordenação reuniram-se com os alunos e responsáveis, de forma presencial, para apresentar a pesquisa: objetivos, metodologia e duração. Para cumprir com os aspectos éticos, definidos pelas diretrizes e normas regulamentadoras de pesquisas envolvendo seres humanos, foi solicitado que os participantes e seus responsáveis assinassem um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido e um Termo de Autorização de Imagens.



4 Apresentação e Análise dos Dados

A intervenção foi realizada por meio de uma sequência de cinco planos de aula com uma carga horária prevista de 20 horas, distribuída em atividades síncronas e assíncronas com o uso de tecnologias digitais, conforme mostra o Quadro 2.

Quadro 2: Encontros para aplicação da intervenção

Encontros	Atividades Síncronas	Atividades Assíncronas
1º	Conversa inicial; Questionário Inicial; Mensagem Secreta com <i>QR Codes</i> (resolução de problemas envolvendo equação do 1º grau em grupos).	Leitura do prólogo do Mangá: Mitani e Sato – The Manga Guide to Cryptography-No Starch Press, 2018; Assistir a videoaula: https://www.youtube.com/watch?v=V2V9v089eng (MATEMÁTICA-PRÓ, 2021a); Filme: O Jogo da Imitação (https://my.mail.ru/mail/ikki.phenix/video/_myvideo/303.html); Jogo “Perseguição do labirinto: jogando com a história da criptografia” (https://wordwall.net/play/21137/642/225) (SILVA, 2022b).
2	Conversa sobre criptografia e a Cifra de César; Elaboração e descoberta de mensagens secretas usando a Cifra de César (resolução de situações problemas em grupos usando kit de encriptação).	Assistir a videoaula: https://www.youtube.com/watch?v=cI08HSYIzwM (MATEMÁTICA-PRÓ, 2021b) e estudar o texto sobre funções elaborado pela professora; Jogando com as funções: https://wordwall.net/play/21138/567/227 (SILVA, 2022a).
3º	Conversa sobre função, função bijetora e função inversa; Usando Funções Para Cifrar e Decifrar Mensagens (resolução de situações problemas em grupos).	Assistir aos vídeos: youtu.be/3jR62Mew8X4 (TODA A MATEMÁTICA, 2015) e youtu.be/GAR1Ur_2IGk sobre RSA (FÁBRICA DE NOOBS, 2016); Participar do jogo: https://wordwall.net/play/21139/212/458 envolvendo a criptografia RSA.
4º	Conversa sobre o método RSA; Usando o RSA para criptografar mensagens (atividades em grupos envolvendo o passo a passo do método).	Pesquisa e elaboração de um vídeo, em grupo, sobre outros métodos de criptografia.
5º	Gincana criptográfica.	Questionário final.

Fonte: Elaborado pelos autores (2021).



Neste artigo, será feito um relato e uma análise do segundo encontro da intervenção, pois as atividades propostas foram avaliadas pelos estudantes³ como as mais interessantes.

De acordo com os dados do questionário aplicado, a maioria dos estudantes que participaram da pesquisa afirmou que gosta de Matemática, e percebe a sua presença no cotidiano, todavia, com base nos dados coletados e nas observações, identificamos que muitos têm dificuldades de aprendizagem. Em relação à criptografia, menos da metade evidenciou alguma familiaridade com o termo, um quantitativo maior do que esperado, o que foi considerado como satisfatório, visto que muitos deles se interessaram em investigar sobre o tema quando a pesquisadora comentou sobre a proposta durante aulas e reunião que antecederam a realização da intervenção.

O segundo encontro da intervenção foi iniciado pelo *Google Meet*, com uma conversa sobre a história da criptografia a partir dos registros que os estudantes fizeram sobre a leitura do mangá, do vídeo que assistiram e dos resultados do jogo: Perseguição no Labirinto. Ao serem questionados sobre os pontos que acharam mais interessantes, não houve muito consenso e acabaram citando a esteganografia e todas as cifras citadas no vídeo. Dessa forma, debateu-se brevemente sobre todos os métodos de criptografia citados.

Inicialmente, planejou-se para esse encontro a construção de um kit de criptografia, conforme o citado por Carvalho (2016), mas como as atividades foram desenvolvidas de forma remota, o kit da Figura 5 foi entregue pronto a cada estudante na reunião para apresentação da pesquisa.

Figura 5: Kit de Encriptação



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Neste kit um dos alfabetos ficaria fixo, combinou-se que seria o azul, enquanto o outro seria deslocado de acordo com um dado número x , que representava a chave da criptografia. Como exemplo, considere $x = 3$, então gira o copo rosa, “pulando” três letras. Dessa maneira, o A ficaria

³Os participantes serão identificados como A1, A2, ..., A33 para manter o sigilo quanto à identidade e às respostas apresentadas.



alinhado com o D, o B com o E e assim por diante. Criptografando a palavra ESCOLA com $x = 3$, obtemos: HVFROD.

Foi explicado, através de exemplos, como o kit seria utilizado para cifrar e decifrar mensagens de acordo com o código de César. Logo após, os grupos, formados desde o primeiro encontro, reuniram-se através do *Google Meet* para a realização da atividade que também fez uma breve abordagem sobre congruências. Isso foi explanado através da codificação da palavra PAZ, usando a cifra de César e um deslocamento igual a 3. De acordo com o alfabeto dado, somamos o número correspondente a cada letra com o 3:

$$P = 15 + 3 = 18, \text{ que correspondia a letra S;}$$

$$A = 0 + 3 = 03, \text{ que correspondia a letra D;}$$

$$\text{e } Z = 25 + 3 = 28.$$

Nesse ponto, foi questionado a que letra correspondia o 28, sendo que no alfabeto dado (conforme Quadro 3, as letras estavam numeradas de 0 a 25). Alguns deram a resposta por meio do kit de encriptação, então perguntou-se o que fariam se não tivessem esse instrumento. Com as discussões, eles perceberam que deveriam contar conjuntos de 26 letras e registrar o resto quando o resultado da soma que estavam efetuando fosse superior a 25. Assim, o 28 seria dividido por 26 e considerariam o resto 2, cuja letra correspondente seria o C. Logo, 18-03-02 ou SDC correspondia à codificação da palavra PAZ. Para uma melhor compreensão, foi aplicado esse mesmo raciocínio nas horas de um relógio, no qual há um conjunto de 12 horas. Tomando como exemplo, 13h corresponde a 1h: 13 dividido por 12, deixa resto 1. Dados esses e outros exemplos, mostrou-se como representá-los na linguagem das congruências: $28 \equiv 2 \pmod{26}$, $13 \equiv 1 \pmod{12}$, e foi indicado o vídeo do Programa de Iniciação Científica da OBMEP ⁴ para uma melhor compreensão do conteúdo.

⁴<https://youtu.be/SswU5Qmc3pg>



Quadro 3: Alfabeto utilizado na atividade sobre a cifra de César

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Durante a atividade, um dos grupos demonstrou uma certa confusão quando utilizaram os copos para fazer o deslocamento das letras, não conseguiam diferenciar entre o alfabeto que representava a mensagem original e o que seria usado para cifragem. No entanto, na reunião da professora com o grupo, pelo *Google Meet*, conseguiram elucidar as dúvidas e todos conseguiram concluir o exercício.

Após essa atividade, conversamos sobre as questões propostas, dificuldades, pontos positivos e negativos, avaliaram positivamente a atividade e, no questionário final, apontaram como a mais interessante de toda a intervenção, provavelmente porque manusearam um material concreto para auxiliar na solução dos problemas propostos. A motivação para essa atividade foi importante para a compreensão do conceito de função, pois na cifra de César os estudantes conseguiram cifrar e decifrar mensagens utilizando uma regra que pode ser expressada como a lei de formação de uma função.

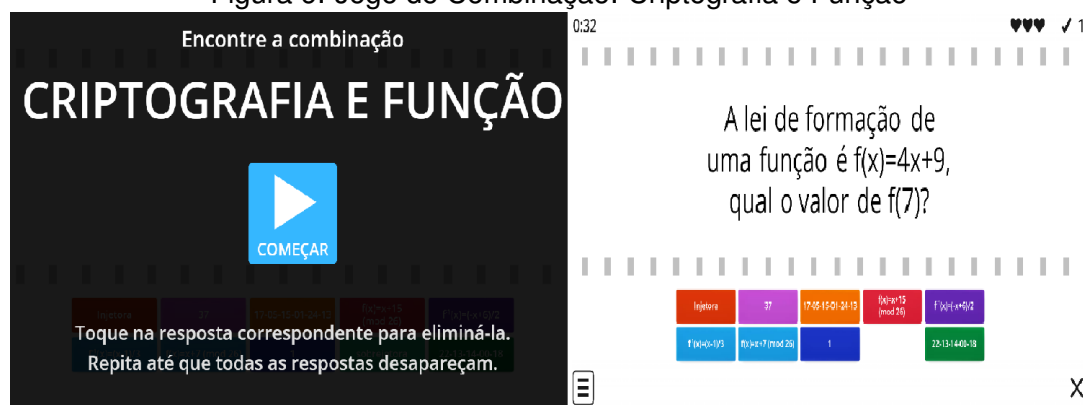
Como atividade pré-classe, foi solicitado que os participantes assistissem ao vídeo gravado pela professora ⁵ e disponibilizado no Google Sala de Aula. Nele, a cifra de César foi usada para abordar a ideia de função, lei de formação, valor de $f(x)$, Função Injetora, Sobrejetora, Bijetora e Inversa. Também, foi disponibilizado o texto que serviu de base para elaboração do vídeo, a fim de que pudessem fazer a leitura e rever os exemplos dados. Foi orientado que fizessem as anotações necessárias para participar do próximo encontro e para responder ao *quiz* elaborado no *Wordwall* ⁶ em forma de jogo de combinação (Encontre a combinação: criptografia e função), conforme Figura 6, envolvendo função e a Cifra de César.

⁵<https://www.youtube.com/watch?v=cI08HSYIzwM>

⁶<https://wordwall.net/play/21138/567/227>



Figura 6: Jogo de Combinação: Criptografia e Função



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Os resultados desse jogo mostraram que os discentes identificaram que a função seria o algoritmo utilizado para cifrar mensagens e já demonstravam uma certa noção de congruência, visto que, dadas as transformações $f(x) = x + 13 \pmod{26}$ e $f(x) = 5x \pmod{26}$, cerca de 72% deles conseguiram responder corretamente como ficariam a cifragem das palavras ESCOLA e UNIÃO, respectivamente, por meio dessas expressões. No entanto, 50% se equivocaram ao identificar as funções que correspondiam a codificação das palavras ESTUDO e COLEGA, demonstrando dificuldade em associar uma dada situação a linguagem algébrica, nesse caso, a lei de formação da função. Diante disso, preparamos mais exemplos para serem discutidos no encontro seguinte.

Nas questões que abordaram o cálculo de $f(x)$, a classificação da função em injetora ou sobrejetora e função inversa, o nível de acertos foi superior a 81%, revelando que os discentes podem ter se apropriado do material de estudo com uma certa dedicação, pois, como se tratava da introdução de conceitos, seria compreensível um percentual maior de erros. Outro ponto a ser ressaltado é que as questões eram objetivas, então, é possível que tenham “chutado” respostas, por isso, foram elaboradas perguntas abertas para a atividade colaborativa que seria aplicada na etapa posterior, como o exemplo a seguir:

Para responder as questões que seguem, você deverá utilizar o quadro seguinte:

(Quadro 3)

Clara deseja enviar uma mensagem codificada para Bia. Sabendo que o conteúdo da mensagem será: ENCONTRE-ME NA PRAÇA DAS ARTES e que a regra será: valor da letra +9, ajude Clara nesta missão.

a) Reescreva a regra na linguagem matemática, atribuindo ao valor da letra da mensagem ori-



ginal a variável x e ao valor da letra cifrada y .

b) Utilizando o valor de cada letra na tabela acima, cifre a mensagem.

c) Encontre a função inversa que Bia deverá utilizar para decifrar a mensagem de Clara.

Os conceitos de função injetora, sobrejetora e bijetora são objetos de conhecimento do 1º ano do Ensino Médio, mas devido à pandemia, não tivemos a oportunidade de desenvolver a pesquisa com esse público e consideramos importante essa abordagem, feita com linguagem acessível e sem a preocupação de detalhar o conteúdo, para que os alunos compreendessem melhor os processos de codificação e decodificação de uma mensagem.

Os estudantes avaliaram de forma positiva as atividades desenvolvidas e no questionário final citaram poucos aspectos negativos como cansaço (cerca de 10%) e dificuldade em algumas questões (cerca de 13%).

A1: As atividades em grupos foram muito boas pois uns estavam ajudando aos outros, e assim todo mundo entende o assunto. Eram “muitas” questões, então acabava que as vezes era cansativo.

A16: Eu simplesmente amei, o ponto negativo é que achei algumas coisas difíceis mais quando fui fazer vi que não era tão difícil assim tirando isso eu amei muito e desenvolvi bastante coisa!!!

A7: Foi incrível a semana aprendendo criptografia e função, apesar de ter sido cansativa. Foi ótimo estudar pois era uma área que eu não sabia quase nada e com as aulas e atividades aprendi muito ...

Percebe-se que, apesar de citar os aspectos negativos, os estudantes falam sobre a aquisição de novos conhecimentos e que, de certa forma, o processo foi prazeroso. Em relação ao cansaço, já era esperado em razão das atividades terem sido planejadas para serem desenvolvidas durante cinco dias consecutivos (de segunda a sexta-feira), mas no decorrer da aplicação ainda foram utilizadas mais duas aulas de matemática. As dificuldades de alguns alunos também fazem parte de todo processo de ensino e de aprendizagem, uma vez que nem todos aprendem da mesma forma e, no ensino remoto, acompanhar essas dificuldades também foi mais desafiador, sendo necessários *feedbacks* constantes, usando o *Classroom*, o *WhatsApp* e a reunião dos grupos no *Google Meet*.

Os demais participantes não citaram aspectos negativos e, consoante as respostas mencionadas anteriormente, elogiaram as atividades desenvolvidas, citando que as intervenções auxiliaram na compreensão do conteúdo e que se divertiram ao longo da semana.



5 Considerações Finais

Os estudos e as análises realizados ao longo deste trabalho, mostraram que a criptografia está atrelada às necessidades humanas de proteção e segurança de dados e que pode contextualizar o ensino e a aprendizagem de diversos conteúdos matemáticos conferindo significância, uma vez que é possível observar a aplicação dos conhecimentos abordados.

Apesar das atividades terem sido desenvolvidas de forma remota e dos obstáculos (problemas de conexão com a internet, necessidade de ampliar o tempo dedicado ao acompanhamento virtual de cada estudante, dificuldades de alguns alunos em resolver tarefas coletivas, entre outros), considera-se que as atividades foram pertinentes para estimular o interesse pela Matemática, além de contribuir para o desenvolvimento de competências e habilidades que favorecem o letramento na área.

É importante salientar a relevância da metodologia de ensino da Sala de Aula Invertida e dos meios virtuais utilizados para alcançar resultados que consideramos positivos. Quase todas as atividades (a única exceção foram as produções de vídeos) projetadas por meio da SAI foram eficientes em seus propósitos, visto que contribuíram para desenvolver nos discentes o interesse pela aprendizagem do conteúdo abordado. Dentre elas, tiveram uma recepção melhor por parte dos alunos as atividades em grupos, em especial a que trabalhou com a cifra de César e que serviu de alicerce para introdução do conceito de função.

Mesmo logrando êxito no objetivo alvitrado, sugerimos o desenvolvimento das atividades com estudantes do Ensino Médio para que seja trabalhado de forma mais detalhada os conceitos de função injetora, sobrejetora e bijetora.

Por fim, já existem várias contribuições de pesquisas envolvendo criptografia e matemática, entretanto espera-se que esta não seja só mais uma e sim inspiração para que docentes possam, além de usar ou adaptar as atividades propostas, buscar outros temas para tornar o processo de ensino e de aprendizagem mais dinâmico e significativo.

Referências

BAHIA. Secretaria da Educação do Estado da Bahia. **Documento Curricular Referencial da Bahia para a Educação Infantil e Ensino Fundamental**. Rio de Janeiro: FGV Editora, 2019.



BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2017. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/abril-2018-pdf/85121-bncc-ensino-medio/file>. Acesso em: 22 abr. 2020.

CARVALHO, L. R. **O uso de elementos da criptografia como estímulo matemático na sala de aula**. Orientadora: Erika Capelato. 2016. 78 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual Paulista, 2016. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/138879>. Acesso em: 23 fev. 2023.

CIMINO, A. **A História da Quebra dos Códigos Secretos: Dos Antigos Códigos Secretos à Criptografia Quântica**. São Paulo, SP: Makron Books do Brasil, 2018.

COSTA, C. J. da; FIGUEIREDO, L. M. **Introdução à criptografia**. v. 1. Rio de Janeiro: UFF/CEP-EB, 2010. Disponível em: <https://canal.cecierj.edu.br/recurso/4687>. Acesso em: 31 jul. 2020.

FÁBRICA DE NOOBS. Criptografia-Criptografia RSA. YouTube, 18 mar. 2016. Disponível em: youtu.be/GAR1Ur_2IGk. Acesso em: 20 fev. 2022.

FRANÇA, W. B. de A. **A utilização da criptografia para uma aprendizagem contextualizada e significativa**. Orientador: Rui Seimetz. 2014. 63 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade de Brasília, Instituto de Ciências Exatas, Brasília, 2014. Disponível em: <https://repositorio.unb.br/handle/10482/16864>. Acesso em: 29 dez. 2022.

GANASSOLI, A. P.; SCHANKOSKI, F. R. **Criptografia e matemática**. 2015. 102 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2015.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Metodologia científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

MATEMÁTICA-PRÓ Ana Lourdes. **Criptografia: História e Fundamentos**. YouTube, 12 set. 2021. Disponível em: <https://youtu.be/V2V9v089eng>. Acesso em: 20 fev. 2022.

MATEMÁTICA-PRÓ Ana Lourdes. **Função e Criptografia**. YouTube, 13 set. 2021. Disponível em: <https://youtu.be/cI08HSYIzwM>. Acesso em: 20 fev. 2022.

MITANI, Massaki; SATO, Shinichi. **The Manga Guide to Cryptography**. Tradução: DUMAS, Raechel; SHIBATA, Assumi. San Francisco: No Starch Press, 2018.

MOURA, M. de O. **A criptografia motivando o estudo das funções no 9º ano do ensino fundamental**. Orientadora: Keidna Cristiane Oliveira Souza. 2019. 92f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal do Tocantins, Arraias, 2019. Disponível em: <http://repositorio.uft.edu.br/handle/11612/1373>. Acesso em: 21 fev. 2023.

RODRIGUES, J. de M. **Criptografia e conteúdos de matemática no ensino fundamental**. Orientador: Pedro Luiz Aparecido Malagutti. 2013. 34 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e da Terra) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/5947>. Acesso em: 29 dez. 2022.

SANT'ANA, G. Proposta metodológica na pós-graduação com o uso da sala de aula invertida. In: SANTOS, P. V. (Ed.). **Metodologias ativas: modismo ou inovação?** Quirinópolis, GO: Editora IGM, 2021.



SANTOS, J. L. dos. **A arte de cifrar, criptografar, esconder e salvaguardar como fontes motivadoras para atividades de matemática básica.** 2013. 81 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal da Bahia, 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufba.br/handle/ri/22928>. Acesso em: 30 dez. 2022.

SANTOS, S. M. da S. **Aprendizagem das funções polinomiais do 1º e 2º grau mediada pelo jogo - Trilha Matemática Criptografada: uma abordagem sob a perspectiva Vygotskyana.** Orientadora: Zenaide de Fátima Dante Correia Rocha. 2019. 183 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2019. Disponível em: <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/4562>. Acesso em: 21 fev. 2023.

SANTOS, D. S. dos. **Uso da criptografia como motivação para o ensino básico de matemática.** Orientador: Éder Mateus de Souza. 2015. 58 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Sergipe, 2015. Disponível em: <http://ri.ufs.br/jspui/handle/riufs/6484>. Acesso em: 23 fev. 2023.

Silva, Ana Lourdes Moreno Rodrigues Silva. **A criptografia como estímulo à aprendizagem Matemática.** Orientador: Fernando dos Santos Silva. 2021. 168 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade do Sudoeste da Bahia, 2021. Disponível em: http://www2.uesb.br/ppg/profmat/wp-content/uploads/2022/02/Dissertacao_Ana_Lourdes_Moreno_Rodrigues_Silva.pdf. Acesso em: 23 fev. 2023.

SILVA, Ana Lourdes Moreno Rodrigues. Encontre a combinação: criptografia e função. **Wordwall.** Disponível em: <https://wordwall.net/play/21138/567/227>. Acesso em: 20 fev. 2022.

SILVA, Ana Lourdes Moreno Rodrigues. Perseguição do labirinto: jogando com a história da criptografia. **Wordwall.** Disponível em: <https://wordwall.net/play/21137/642/225>. Acesso em: 20 fev. 2022.

SINGH, S. **O livro dos códigos.** Rio de Janeiro: Record, 2020.

TODA A MATEMÁTICA. Criptografia RSA. YouTube, 10 nov. 2015. Disponível em: youtu.be/3jR62Mew8X4. Acesso em: 20 fev. 2022.

