



# Construções hiperbólicas interativas: relações métricas e bilhares

## Interactive hyperbolic constructions: metric relations and billiards

### Construcciones hiperbólicas interactivas: relaciones métricas y billarísticas



Isabelle Siqueira da Costa<sup>1</sup>

Universidade Federal do Pará (UFPA), Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Belém, PA, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-7864-6384>,  <http://lattes.cnpq.br/0048257402577122>

Marcel Vinhas Bertolini<sup>2</sup>

Universidade Federal do Pará (UFPA), Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Belém, PA, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-1528-7660>,  <http://lattes.cnpq.br/1495009615949354>

**Resumo:** Este trabalho explora a geometria do plano hiperbólico e, mais geralmente, de planos neutros, por meio de construções com retas e circunferências executadas no disco de Poincaré através do software GeoGebra. Verificam-se no plano hiperbólico os Teoremas de Ceva e de Euler, além de relações métricas associadas a baricentros e ortocentros. A técnica usual de se dobrar e desdobrar trajetórias de bilhar, em regiões poligonais, é estabelecida no plano neutro, motivada pelo traçado de poligonais minimizantes como, por exemplo, no problema de Fagnano. Essa ferramenta viabiliza descrições de bilhares em faixas e parcialmente em triângulos acutângulos, mostrando como suas propriedades se relacionam com o plano ser euclidiano ou hiperbólico. É feita uma demonstração elementar de uma propriedade de unicidade da trajetória órtica em triângulos hiperbólicos acutângulos, e são apresentadas provas completas acerca de triângulos órticos em planos neutros.

**Palavras-chave:** Construções Geométricas; Plano Hiperbólico; Plano Neutro; Relações Métricas; Bilhares.

**Abstract:** This paper explores the geometry of hyperbolic and, more generally, neutral planes, through straightedge and ruler constructions executed in the Poincaré disk in the software GeoGebra. The Theorems of Ceva and Euler are verified in the hyperbolic plane, besides metric relations associated to centroids and orthocenters. The usual technique of folding and unfolding billiards trajectories in polygonal regions is established in the neutral plane, motivated by the drawing of minimizing polygonal paths as, for example, in Fagnano's problem. This tool makes possible to describe billiards in stripes and, partially, in acutangle triangles, showing how its properties relate with the plane being euclidean or hyperbolic. An elementary proof is provided of an uniqueness property of the orthic trajectory in hyperbolic acutangle triangles, and complete proofs are given about orthic triangles in neutral planes.

<sup>1</sup>**Currículo sucinto:** Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Pará. **Contribuição de autoria:** Análise Formal, Escrita – Primeira Redação, Investigação, Metodologia, Software, Validação e Visualização. **Contato:** [isabelle.costa@icen.ufpa.br](mailto:isabelle.costa@icen.ufpa.br).

<sup>2</sup>**Currículo sucinto:** Doutor em Matemática pela Universidade de São Paulo. Docente Adjunto da Universidade Federal do Pará. **Contribuição de autoria:** Administração do Projeto, Análise Formal, Conceituação, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação, Metodologia, Software, Supervisão, Validação e Visualização. **Contato:** [marcelvb@ufpa.br](mailto:marcelvb@ufpa.br).



**Keywords:** Geometric Constructions; Hyperbolic Plane; Neutral Plane; Metric Relations; Billiards.

**Resumen:** Este trabajo explora la geometría del plano hiperbólico y, más en general, de los planos neutros, a través de construcciones con líneas y círculos ejecutadas en el disco de Poincaré utilizando el software GeoGebra. Se verifican los Teoremas de Ceva y Euler en el plano hiperbólico, además de relaciones métricas asociadas a baricentros y ortocentros. La técnica habitual de plegar y desplegar trayectorias de billar, en regiones poligonales, se establece en el plano neutro, motivada por el trazado de poligonales minimizantes, como, por ejemplo, en el problema de Fagnano. Esta herramienta permite descripciones de billares en bandas y parcialmente en triángulos agudos, mostrando cómo sus propiedades se relacionan con si el plano es euclidiano o hiperbólico. Se hace una demostración elemental de una propiedad de unicidad de la trayectoria órtica en triángulos hiperbólicos agudos y se presentan demostraciones completas sobre triángulos órticos en planos neutros.

**Palabras clave:** Construcciones Geométricas; Plano Hiperbólico; Plan Neutro; Proporciones Métricas; Billar.

**Data de submissão:** 31 de março de 2022.

**Data de aprovação:** 22 de outubro de 2022.

## 1 Introdução

Certas construções com retas e circunferências, amplamente conhecidas na geometria euclidiana plana, mantêm-se válidas quando consideradas no plano hiperbólico. É suficiente para isso que a validade seja estabelecida por um conjunto de axiomas de geometria plana neutra, uma vez que eles são verdadeiros em ambos os casos. Por exemplo, a mediatriz de um segmento dado é traçada como a reta determinada pelos pontos de interseção de um par de circunferências centradas nas extremidades do segmento. E, dados uma reta  $r$  e um ponto  $X$ , o reflexo de  $X$ , com relação a  $r$ , é determinado pela interseção de quaisquer duas circunferências distintas, com centros em  $r$ , e passando por  $X$ . Em Goodman-Strauss (2001), protocolos de construção básicos foram formulados e realizados no disco de Poincaré, por meio de um software, a fim de esclarecer o traçado de certos ladrilhamentos hiperbólicos. Isto também pode ser visto em Colombo e Sousa (2019). Este trabalho prossegue nessa linha, reunindo construções neutras ou hiperbólicas e realizando-as por meio de uma implementação do disco de Poincaré no GeoGebra.

As construções apresentadas possuem finalidades diversas. Algumas investigam centros de triângulos hiperbólicos, conforme proposto em Venema (2013), e verificam relações métricas tais como os Teoremas de Ceva e de Euler hiperbólicos. Análogos como esses de Teoremas euclidianos clássicos parecem estar esparsos na literatura, mesmo que provavelmente sejam conhecidos



há muito tempo. São construídas também, no plano neutro, poligonais minimizantes em faixas; e é resolvido o problema de Fagnano, de se inscrever em um triângulo acutângulo um triângulo de perímetro mínimo. As soluções desses problemas determinam trajetórias de bilhar nas respectivas regiões. São analisados bilhares em faixas delimitadas por retas disjuntas, e é estabelecido sinteticamente um tipo de unicidade da trajetória óptica de um triângulo acutângulo hiperbólico. Em ambos os casos reconhece-se o impacto das diferentes geometrias na análise. O principal recurso técnico utilizado são as isometrias de um plano neutro. E o artigo inclui uma demonstração (com base nelas) da propriedade de reflexão do triângulo óptico de um triângulo acutângulo, bem como da determinação de seu ortocentro como ponto de encontro das alturas.

Quaisquer instrumentos utilizados para se traçar retas e circunferências euclidianas são o bastante para o traçado de suas contrapartes hiperbólicas no disco de Poincaré. O software GeoGebra pode então ser utilizado no estudo dessa geometria, conforme promovido em Ribeiro e Gravina (2013). Nesse software, uma vez implementado um conjunto de ferramentas básicas, o número de passos de cada construção é reduzido, agilizando sua realização com relação ao que poderia ser feito com régua e compasso no papel. Ganha-se também a interatividade, sendo possível variar os dados de uma construção durante e após sua realização. E é facilitada a verificação de relações métricas, que na geometria hiperbólica, via de regra, se expressam por meio de funções transcendentais. A opção pelo GeoGebra se deu também por conta de sua ampla adoção, tendo em vista que efetivamente se realizem as construções apresentadas. Todavia, não há nada nas construções que as restrinjam a um software específico e a implementação das ferramentas pode ser feita de diversas outras maneiras – por exemplo, veja em Millman e Parker (1991) a menção a um software com finalidades similares um tanto anterior ao utilizado aqui. Esse modo de se familiarizar com a geometria hiperbólica deve contribuir para sua popularização, de interesse devido a importância dessa geometria na matemática contemporânea, que extrapola sua relevância nos fundamentos da geometria. Além disso, a apresentação de bilhares em um contexto de construções geométricas, tende a favorecer sua introdução a um público mais amplo.

Preferencialmente a leitura deste artigo deve ser acompanhada pela execução das construções. Em algumas demonstrações optamos por argumentos mais longos a fim de desenvolvê-los construtivamente. Começamos fixando notações e resumindo resultados necessários.



## 1.1 Planos Neutros

Designamos por *plano neutro* um conjunto  $M$  de *pontos*, munido de: um conjunto de subconjuntos de  $M$  chamados de *retas*, uma função distância  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ , e uma medida angular, a respeito dos quais é verdadeiro um conjunto de axiomas dos tipos de incidência, régua, separação do plano, transferidor e congruência de triângulos. Esses axiomas e demais conceitos de geometria plana encontram-se em Martin (1975) (onde  $M$  é dito um plano *absoluto*), Millman e Parker (1991) e Harvey (2015). Utilizamos a notação  $XY = d(X, Y)$ . Um plano neutro  $M$  é *euclidiano* se, para quaisquer retas  $r$  e ponto  $X \notin r$ , existe uma única reta  $s$ , tal que  $X \in s$  e  $s \cap r = \emptyset$ . Caso contrário,  $M$  é *hiperbólico*. Em cada um desses casos é possível provar que  $M$  é isométrico a modelos padrão dessas geometrias planas. Particularmente no caso hiperbólico, a menos de uma mudança de escala,  $M$  é isométrico ao disco de Poincaré. Não há prejuízo para nossos propósitos em entender que um plano neutro é simplesmente um plano euclidiano ou hiperbólico definido analiticamente como em Beardon (1983), no caso hiperbólico.

## 1.2 Isometrias

Seja  $M$  um plano neutro, e  $d$  sua função distância. Uma *isometria de  $M$*  é uma bijeção  $\varphi : M \rightarrow M$ , tal que  $d(\varphi(X), \varphi(Y)) = d(X, Y)$  para quaisquer  $X, Y \in M$ . O conjunto de todas as isometrias de  $M$ , munido da composição de funções, é um grupo que será denotado  $\text{Isom } M$ . Na generalidade da geometria neutra, as propriedades de isometrias encontram-se em Martin (1975). Observamos que na literatura não há uma definição padrão de “*translação*”.

**Definição 1.1.** Para cada reta  $r$ , em um plano neutro  $M$ , a *reflexão baseada em  $r$*  é a isometria  $\rho_r$  de  $M$  definida por: se  $X \notin r$ , então  $\rho_r(X)$  é o único ponto, tal que  $r$  é a mediatriz entre  $X$  e  $\rho_r(X)$ ; e  $\rho_r(X) = X$  para todo  $X \in r$ .

**Lema 1.2.** Seja  $\rho_r$  a reflexão baseada em uma reta  $r$  de um plano neutro. Então,  $\rho_r = \rho_r^{-1}$  e, se  $s$  é uma reta tal que  $\rho_r(s) = s$ , então  $s = r$  ou  $s$  é perpendicular a  $r$ .

**Definição 1.3.** Uma *translação de um plano neutro  $M$*  é uma isometria  $\tau : M \rightarrow M$  da forma  $\tau = \rho_r \circ \rho_s$ , onde  $r$  e  $s$  são retas distintas e perpendiculares a uma reta  $t$ . Qualquer reta  $t$  com essa propriedade é chamada de *eixo de  $\tau$* .

**Lema 1.4.** Se  $\tau$  é uma translação de um plano hiperbólico, então seu eixo é único, e é precisamente o conjunto dos pontos  $X$  tais que a distância de  $X$  a  $\tau(X)$  é mínima. Se  $s$  é uma reta tal que  $\tau(s) = s$ , então  $s = t$  ou  $s$  é perpendicular a  $t$ . Além disso,  $\tau^{-1}$  é uma translação com o mesmo eixo que  $t$ .



**Definição 1.5.** Uma translação com reflexão de um plano neutro  $M$  é uma isometria  $\tau : M \rightarrow M$  da forma  $\tau = \rho_t \circ \rho_r \circ \rho_s$ , onde  $r, s$  e  $t$  são retas tais que  $t$  é perpendicular a  $r$  e a  $s$ , e  $r \neq s$ . A reta  $t$  é chamada de eixo de  $\tau$ .

**Lema 1.6.** Sejam  $M$  um plano neutro e  $\tau : M \rightarrow M$  uma translação com reflexão como na Definição 1.5. Então, o eixo  $t$  de  $\tau$  é a única reta tal que  $\tau(t) = t$ , e é precisamente o conjunto de pontos  $X$ , tais que a distância de  $X$  a  $\tau(X)$  é mínima. Além disso,  $\tau = \rho_r \circ \rho_s \circ \rho_t$  e  $\tau^{-1} = \rho_t \circ \rho_s \circ \rho_r$ . Em particular, a inversa de  $\tau$  é uma reflexão com translação com o mesmo eixo que  $\tau$ .

**Definição 1.7.** Isometrias  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  de um plano neutro são conjugadas se existir uma isometria  $\psi$  do plano neutro tal que:

$$\varphi_2 = \psi \circ \varphi_1 \circ \psi^{-1}. \quad (1)$$

Para todo subconjunto  $S$  do plano neutro, tal que  $\varphi_1(S) = S$ , a equação (1) implica que:  $\varphi_2(\psi(S)) = \psi(S)$ .

### 1.3 Triângulos Órticos

**Definição 1.8.** Seja  $ABC$  um triângulo não-retângulo em um plano neutro. O triângulo órtico de  $ABC$  é o triângulo cujos vértices são os pés das alturas de  $ABC$ .

Em um plano neutro, um triângulo órtico de um triângulo acutângulo também possui certas propriedades que são bastante conhecidas no plano euclidiano. Entretanto, uma prova parece ser de difícil localização na literatura. A seguir, ela será feita por meio de propriedades de isometrias, em uma adaptação do argumento feito no plano euclidiano em Philippakis (2002). Dele segue a concorrência das três alturas, de um triângulo acutângulo qualquer, que destacamos no Corolário 1.10.

**Teorema 1.9.** Sejam  $ABC$  um triângulo não-retângulo em um plano neutro, e  $a, b$  e  $c$  as retas que contém os lados opostos aos vértices  $A, B$  e  $C$ , respectivamente. Seja  $\tau$  uma composição das reflexões  $\rho_a, \rho_b$  e  $\rho_c$  na qual cada uma delas aparece exatamente uma vez. Então,  $\tau$  é uma translação com reflexão e seu eixo contém dois pés distintos de alturas de  $ABC$ . Mais especificamente, sendo  $D \in a, E \in b$  e  $F \in c$  os pés das alturas do triângulo  $ABC$ , temos:



<i>Translação com Reflexão</i>	<i>Eixo</i>
$\rho_c \circ \rho_b \circ \rho_a, \rho_a \circ \rho_b \circ \rho_c$	<i>DF</i>
$\rho_a \circ \rho_c \circ \rho_b, \rho_b \circ \rho_c \circ \rho_a$	<i>DE</i>
$\rho_b \circ \rho_a \circ \rho_c, \rho_c \circ \rho_a \circ \rho_b$	<i>EF</i>

Consequentemente,  $\rho_a(DE) = DF$ ,  $\rho_b(DE) = EF$  e  $\rho_c(DF) = EF$ . Se  $ABC$  é acutângulo, então suas alturas contém as bissetrizes internas de seu triângulo órtico  $DEF$ .

**Prova.** Começamos argumentando sobre  $\tau = \rho_c \circ \rho_b \circ \rho_a$ . Como  $a$  e  $b$  concorrem em  $C$ ,  $\rho_b \circ \rho_a = \rho_{b'} \circ \rho_{a'}$  se  $a'$  e  $b'$  são quaisquer retas concorrendo em  $C$  tais que o ângulo orientado de  $a'$  a  $b'$  coincide com o de  $a$  a  $b$ . Tome as retas  $a'$  e  $b'$  tais que  $b'$  é perpendicular a  $c$ . Isto é, sendo  $\varphi_1$  a rotação centrada em  $C$  de ângulo orientado  $ACF$ ,  $a' = \varphi_1(a)$  e  $b' = \varphi_1(b)$ . Com isso,  $\tau = \rho_c \circ \rho_{b'} \circ \rho_{a'}$ .

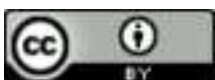
Observe que  $b'$  e  $c$  concorrem em  $F$ , de modo que  $\rho_c \circ \rho_{b'} = \rho_{c'} \circ \rho_{b''}$ , onde  $b''$  pode ser tomada perpendicular a  $a'$ . Isto é, sendo  $F'$  a projeção ortogonal de  $F$  sobre  $a'$ , e  $\varphi_2$  a rotação de ângulo orientado  $CF'F'$  centrada em  $F$ ,  $b'' = \varphi_2(b')$  e  $c' = \varphi_2(c)$ . Como  $b''$  é perpendicular a  $c'$ ,  $\rho_{c'} \circ \rho_{b''} = \rho_{b'''} \circ \rho_{c'}$ . Portanto,  $\tau = \rho_{b'''} \circ \rho_{c'} \circ \rho_{a'}$ , e  $\tau$  é uma translação com reflexão, uma vez que  $b'''$  é também perpendicular a  $a'$ , e  $c' \neq a'$ .

É claro que  $F$  pertence ao eixo  $b'''$  de  $\tau$ . Para garantir que  $D \in b'''$ , aplicamos a construção acima a  $\tau^{-1} = \rho_a \circ \rho_b \circ \rho_c$ , para expressá-la como  $\tau^{-1} = \rho_{b'_1} \circ \rho_{a'_1} \circ \rho_{c'_1}$ , com  $D \in b'_1$ . Mas  $b'_1 = b'''$ , pois os eixos de uma translação com reflexão e de sua inversa coincidem. Assim,  $D \in b'''$ , e  $b'''$  é a reta  $DF$ . As outras duas linhas da tabela do enunciado são obtidas analogamente.

Com relação a afirmação seguinte, se  $\tau$  é uma translação com reflexão,  $t$  é seu eixo, e  $\varphi$  é uma isometria qualquer, então  $\varphi \circ \tau \circ \varphi^{-1}$  é uma translação com reflexão, e  $\varphi(t)$  é seu eixo. Em particular, segue de  $\rho_a \circ \rho_c \circ \rho_b = \rho_a \circ \rho_c \circ \rho_b \circ \rho_a \circ \rho_a^{-1}$  que  $\rho_a(DF) = DE$ . As outras igualdades são análogas.

Para a afirmação final, observe, por exemplo, que o ângulo  $ADE$  é oposto pelo vértice à imagem do ângulo  $ADF$  por  $\rho_a$  e, portanto, esses ângulos são congruentes. As duas outras congruências são análogas.

A caracterização da bissetriz de um ângulo, como lugar geométrico dos pontos que equidistam dos lados do ângulo, é válida em um plano neutro qualquer. Consequentemente as bissetrizes internas, de qualquer triângulo  $ABC$ , concorrem em um ponto chamado de *incentro de  $ABC$* . Se



$ABC$  é acutângulo e  $DEF$  é seu triângulo órtico, então o Teorema 1.9 estabelece a determinação do *ortocentro de  $ABC$*  como, por definição, o incentro de  $DEF$ . Fica provado:

**Corolário 1.10.** *As alturas de um triângulo acutângulo qualquer, em um plano neutro, concorrem em um ponto.*

#### 1.4 Bilhares

Considere uma região poligonal  $\mathfrak{R}$  de um plano neutro<sup>1</sup>. A grosso modo, uma *trajetória de bilhar* em  $\mathfrak{R}$  é um caminho poligonal contido em  $\mathfrak{R}$  com a propriedade de que, ao atingir sua fronteira em um ponto interior a um de seus lados, o caminho prossegue simetricamente com relação à perpendicular ao lado pelo ponto de encontro. Por exemplo, veja as Figuras 3 e 4. Uma definição mais precisa será dada na seção 2.3. Se uma trajetória se auto-intersecta em um ponto, voltando a ele com a mesma direção com que o tinha deixado, então a trajetória é dita *periódica*. O comportamento a longo prazo das trajetórias, é um tópico de interesse em sistemas dinâmicos, tendo uma história considerável no caso euclidiano, conforme citado por Masur e Tabachnikov (2002) e Boldrighini, Keane e Marchetti (1978), mas também sendo estudado no caso hiperbólico – por exemplo por Nagar e Singh (2021) e referências aí contidas.

Nas construções geométricas o *problema do bilhar* pede que se trace uma trajetória de bilhar, dados dois pontos e uma sequência de retas, nas quais a trajetória deve rebater (YAGLOM, 1975). Esse problema está relacionado ao *problema da iluminação* (TABACHNIKOV, 2005), no qual não se especifica a sequência de lados. Uma solução do primeiro em certas regiões corresponde a uma técnica usual de se dobrar e desdobrar trajetórias de bilhar, bastante valiosa na também análise de propriedades dinâmicas de bilhares poligonais. Basicamente relaciona-se o rebatimento de uma trajetória em um lado do polígono com seu prolongamento, através do reflexo da região poligonal relativamente a esse lado. Essa técnica será detalhada na demonstração do Teorema 2.7.

#### 1.5 Disco de Poincaré

O conjunto de pontos do disco de Poincaré é o interior de um disco euclidiano unitário, enquanto que as retas do disco de Poincaré são os diâmetros e os arcos de circunferência abertos perpendiculares à fronteira (euclidiana) do disco. Dados pontos distintos  $X$  e  $Y$ , sejam  $X_\infty$  e  $Y_\infty$

<sup>1</sup>Para nossos propósitos não é necessário adentrar nas eventuais dificuldades de se definir o que é uma região poligonal.



pontos sobre a fronteira do disco, tais que  $X_\infty X Y Y_\infty$  é um arco de circunferência sobre o qual os pontos estão nessa ordem. Denotando por  $[XY]$  a distância euclidiana, a distância hiperbólica entre  $X$  e  $Y$  é definida por:

$$d(X, Y) = \ln \frac{[X_\infty Y][X Y_\infty]}{[X_\infty X][Y_\infty Y]}. \quad (2)$$

As reflexões euclidianas baseadas nos diâmetros, e as inversões baseadas nas circunferências que contém os arcos, quando restritas ao disco, definem bijeções. A distância hiperbólica é tal que elas são as reflexões baseadas nas respectivas retas. A menos de uma normalização, a distância é, na verdade, determinada por essa propriedade. É notável que circunferências no disco de Poincaré são circunferências euclidianas, porém com centros e raios em geral distintos (BEARDON, 1983).

Alternativamente pode-se partir de uma definição analítica da distância no disco de Poincaré como ínfimos de comprimentos hiperbólicos, a maneira como é feito na geometria diferencial – veja em Beardon (1983). Nessa abordagem, deduz-se que as retas mencionadas acima são geodésicas da métrica hiperbólica e que as reflexões são como dito acima.

Note que, ainda que a seguir nos concentremos na realização de construções no disco de Poincaré, elas podem ser adaptadas a outros modelos populares do plano hiperbólico, tais como o semi-plano superior.

## 1.6 Ferramentas básicas

A fim de realizar as construções apresentadas, utilizamos um kit de ferramentas básicas para o disco de Poincaré, implementadas no software GeoGebra, tal como o disponível em GeoGebra (2022). O kit deve conter os análogos de ferramentas euclidianas como as de estudos introdutórios de construções geométricas (WAGNER; CARNEIRO, 2007). São elas os traçados de: retas dados dois de seus pontos distintos, circunferências dados seu centro e um de seus pontos, mediatrizes e pontos médios de segmentos dados, projeções ortogonais de pontos sobre segmentos dados, bissetrizes de ângulos dados, imagens de pontos dados por reflexões baseadas em retas dadas, além de transportes de segmentos e de ângulos dados. Protocolos de construção dessas ferramentas são sumarizados em Goodman-Strauss (2001) e Colombo e Sousa (2019). Sua implementação no GeoGebra pode ser feita, graças ao recurso de ferramentas customizadas, como indicado em Venema (2013). Além disso, distâncias hiperbólicas podem ser calculadas no GeoGebra pela fórmula (2) e, portanto, é possível verificar relações métricas. Observe, todavia, que a implementação extra de ferramentas é apenas uma questão de abreviação, já que todas elas se reduzem às ferramentas euclidianas que já vêm por padrão no GeoGebra.



## 2 Resultados e discussões

Começamos apresentando construções cujo caráter é o de caráter de comprovação de teoremas. Em seguida, resolvemos construtivamente alguns problemas de minimização de comprimento de poligonais. Para isso, estabelecemos em planos neutros a técnica de se “dobrar”/“desdobrar” poligonais, possibilitando a análise de alguns bilhares na seção seguinte.

### 2.1 Relações métricas e propriedades de incidência em triângulos

Nos enunciados a seguir, por “plano hiperbólico” entende-se um plano neutro isométrico ao disco de Poincaré. Nos demais planos hiperbólicos é necessário corrigir a fórmula considerando-se uma mudança de escala na métrica. Para demonstrações dos Teoremas 2.1 e 2.2, consulte Papadopoulos e Su (2017). O Teorema 2.3 foi extraído de Bottema (1958), enquanto que o Teorema 2.4 encontra-se em Horváth (2014).

**Teorema 2.1** (Teorema de Ceva). *Seja  $ABC$  um triângulo no plano hiperbólico e sejam  $D, E, F$  pontos sobre os lados  $BC, AC, AB$  respectivamente. Os segmentos hiperbólicos  $AD, BE, CF$  são concorrentes em um ponto se, e somente se:*

$$\frac{\sinh AF}{\sinh FB} \cdot \frac{\sinh BD}{\sinh DC} \cdot \frac{\sinh CE}{\sinh EA} = 1. \quad (3)$$

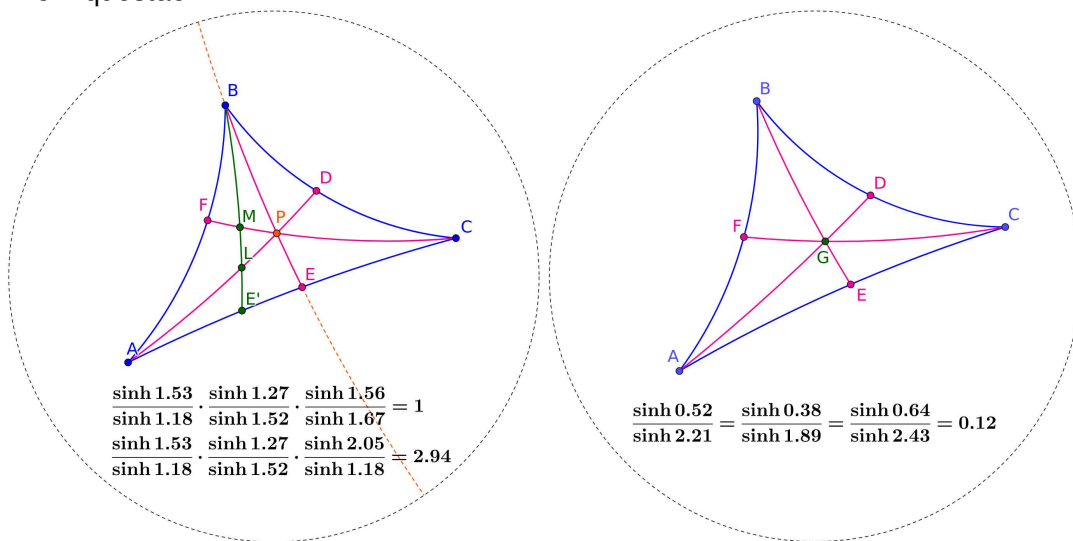
**Prova** (Construção). *A fim de constatar a relação estabelecida pelo teorema, devemos começar determinando o ponto de interseção das cevianas  $AD, BE, CF$ , como ilustrado na Figura 1. Utilizando a ferramenta distância hiperbólica podemos obter as medidas dos segmentos  $AF, FB, BD, DC, CE, EA$  e calcular os respectivos senos hiperbólicos desses valores. Para verificarmos a validade da volta do teorema, basta tomar um ponto variável  $E' \in AC, E' \neq E$ , definir as quantidades relevantes, e notar que a ceviana  $BE'$  de fato não concorre com as outras duas quando não vale (3).*

1. Tomar pontos  $D$  e  $F$  sobre os lados  $BC$  e  $AB$ .
2. Traçar as cevianas  $AD$  e  $CF$  e tomar sua interseção, determinando o ponto  $P$ .
3. Traçar a reta  $BP$ , tomar a interseção da  $BP$  com o lado  $AC$  do triângulo, determinando o ponto  $E$  e traçar a ceviana  $BE$ .
4. Determinar as medidas hiperbólicas dos segmentos  $AF, FB, BD, DC, CE, EA$ , e calcular o produto do lado esquerdo de (3), verificando a igualdade.



5. Tomar um ponto  $E' \neq E, E' \in AC$ , e traçar a ceviana  $BE'$ .
6. Tomar a interseção entre  $BE', AD$  e  $CF$ , determinando os pontos  $L$  e  $M$ .
7. Determinar as medidas hiperbólicas dos segmentos  $AF, FB, BD, DC, CE', E'A$ , e calcular o respectivo produto do lado esquerdo de (3), verificando que não vale a igualdade.

Figura 1 – Verificação dos Teoremas de Ceva e de Euler, à esquerda; e da relação métrica do bari-centro, à direita. No inferior temos as respectivas fórmulas particularizadas ao triângulo em questão.



Fonte: Elaboração dos autores.

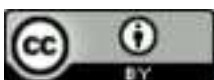
De modo análogo verifica-se o seguinte, também contemplado na Figura 1.

**Teorema 2.2** (Teorema de Euler). *Seja  $ABC$  um triângulo no plano hiperbólico e sejam  $D, E, F$  pontos sobre os lados  $BC, AC, AB$ , respectivamente. Se as retas  $AD, BE, CF$  são concorrentes em um ponto  $P$ , então:*

$$\alpha\beta\gamma = \alpha + \beta + \gamma + 2 \tag{4}$$

onde  $\alpha = \frac{\tanh AP}{\tanh PD}, \beta = \frac{\tanh BP}{\tanh PE}$  e  $\gamma = \frac{\tanh CP}{\tanh PF}$ .

Como no caso euclidiano, as três medianas de um triângulo qualquer possuem um ponto em comum, que chamamos de “baricentro do triângulo”. Isso é uma consequência da recíproca do Teorema de Ceva, pois o lado esquerdo de (3), claramente é igual a 1, nesse caso. Na geometria euclidiana, o baricentro  $G$  de um triângulo  $ABC$ , com mediana  $AD$ , determina a razão  $\frac{GD}{AD} = \frac{1}{3}$  entre os segmentos  $GD$  e  $AD$ . Com a construção do baricentro de um triângulo hiperbólico, podemos investigar se a razão entre os segmentos hiperbólicos  $GD$  e  $AD$  nos fornece um resultado



equivalente, conforme sugerido em Colombo e Sousa (2019). Nesse caso, as razões entre os segmentos equivalentes, determinados pelo baricentro de um triângulo euclidiano, e o baricentro de um triângulo hiperbólico, não coincidem. Mas vale o seguinte:

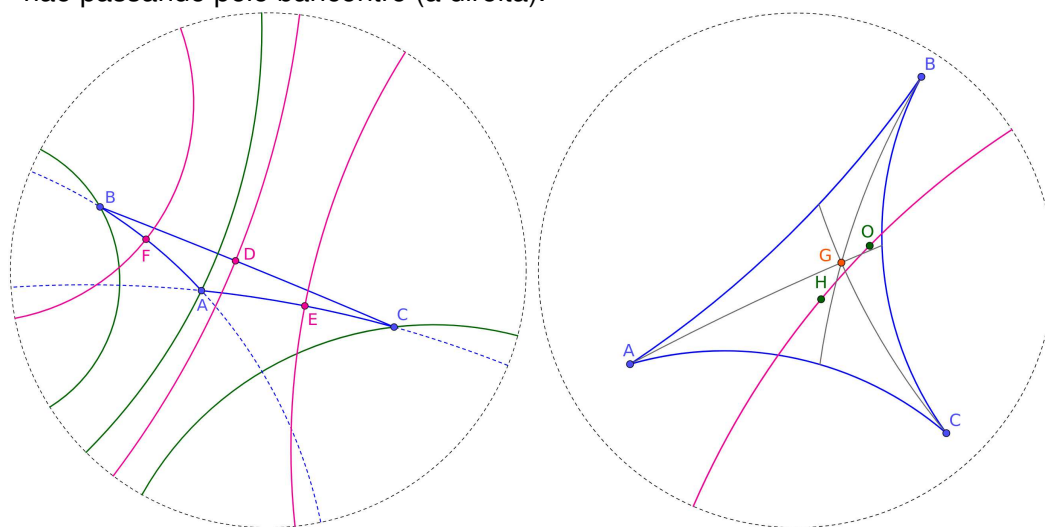
**Teorema 2.3** (Baricentro). *Dado um triângulo hiperbólico ABC, com baricentro G e medianas AD, BE e CF, é válida a seguinte relação:*

$$\frac{\sinh GD}{\sinh AD} = \frac{\sinh GE}{\sinh BE} = \frac{\sinh GF}{\sinh CF} = \{2(\cosh BC + \cosh AC + \cosh AB) + 3\}^{-\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

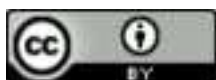
*Construção.* Tomar os pontos médios dos lados do triângulo e traçar suas respectivas medianas, comprovando que concorrem em G. Calculando as quantidades envolvidas, verifica-se (5). Veja a Figura 1. □

Por outro lado, no plano hiperbólico não necessariamente as alturas ou as mediatrizes de um triângulo são concorrentes. Sugerimos que se construam esses objetos da maneira usual e, variando o triângulo, sejam visualizadas as diversas possibilidades. Uma delas está na Figura 2. Uma condição suficiente para que as alturas sejam concorrentes é que o triângulo seja acutângulo (Corolário 1.10). Todavia, quando isso ocorre, vale a relação métrica do Teorema 2.4 a seguir, que pode ser checada de modo análogo a do baricentro. Com relação às mediatrizes, se elas são concorrentes para um triângulo qualquer de um plano neutro, então o plano é euclidiano. Uma demonstração encontra-se em Martin (1975), e mais detalhes, a respeito dos possíveis casos, podem ser consultados em Greenberg (1993).

Figura 2 – Alturas, em verde, e mediatrizes, em rosa, não concorrendo (à esquerda). Reta de Euler não passando pelo baricentro (à direita).



Fonte: Elaboração dos autores.



**Teorema 2.4** (Ortocentro). *Suponha que as alturas  $AD$ ,  $BE$  e  $CF$ , de um triângulo hiperbólico  $ABC$ , concorram em um ponto  $H$ . Então:*

$$\tanh HA \cdot \tanh HD = \tanh HB \cdot \tanh HE = \tanh HC \cdot \tanh HF \tag{6}$$

Não há na literatura um consenso a respeito de o que deve se chamar de reta de Euler hiperbólica. De acordo com Strzheletska (2003), essa reta  $r_0$  do triângulo nem sempre pertence a essa reta, como ilustrado na Figura 2. Já em Akopyan (2009), é sugerida uma definição alternativa para a reta de Euler, e mostra-se que também a *circunferência de Euler* (ou *circunferência dos nove pontos*), ao menos com sua definição usual, não possui as mesmas características que sua versão euclidiana.

## 2.2 Poligonais minimizantes

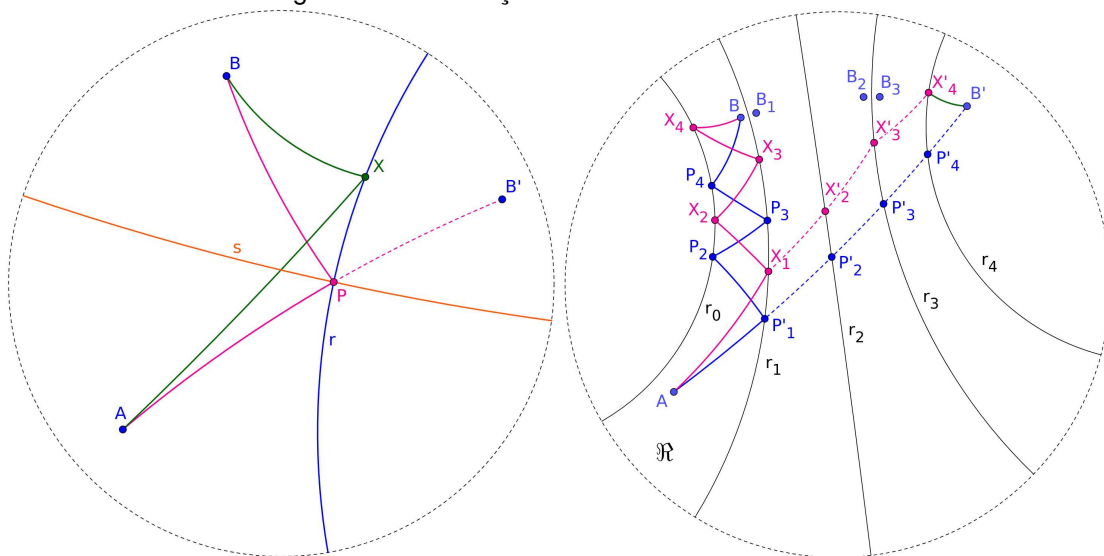
Começamos estabelecendo a versão neutra de um conhecido princípio de reflexão:

**Teorema 2.5.** *Em um plano neutro, dados pontos  $A$  e  $B$ , do mesmo lado de uma reta  $r$ , sejam  $\rho_r$  a reflexão baseada em  $r$ ,  $B' = \rho_r(B)$ , e  $P$  o ponto de interseção do segmento  $AB'$  com  $r$ . Então:*

$$AP + PB \leq AX + XB \quad \forall X \in r, \tag{7}$$

*valendo a igualdade somente se  $X = P$ . Além disso, a reta perpendicular a  $r$  pelo ponto  $P$  é a bissetriz do ângulo  $APB$ .*

Figura 3 – Construções dos Teoremas 2.5 e 2.7.



Fonte: Elaboração dos autores.



**Prova.** Veja a Figura 3. Note que o ponto  $P$  está bem definido, pois  $A$  e  $B'$  estão em lados opostos de  $r$ , uma vez que  $A$  e  $B$  estão do mesmo lado. A fim de comparar os lados de (7), tome  $X \in r$ . Como  $\rho_r$  é isometria e  $\rho_r(X) = X$ ,  $AX + XB = AX + XB'$ . O lado direito dessa igualdade, para  $X = P$ , é igual a  $AP + PB' = AB'$ , pois  $P$  está entre  $A$  e  $B'$ . Enquanto que, se  $X \neq P$ ,  $AXB'$  é um triângulo e, pela desigualdade triangular,  $AB' < AX + XB'$ . A afirmação final segue de maneira análoga a do final da demonstração do Teorema 1.9.

**Definição 2.6.** Sejam  $r_0$  e  $r_1$  retas disjuntas de um plano neutro. A faixa delimitada por  $r_0$  e  $r_1$  é a região do plano  $\mathfrak{R} = r_0 \cup r_1 \cup (\mathcal{H}_0 \cap \mathcal{H}_1)$ , onde  $\mathcal{H}_0$  e  $\mathcal{H}_1$  são os semi-planos de  $r_1$  e de  $r_0$ , respectivamente, tais que  $r_0 \subset \mathcal{H}_0$  e  $r_1 \subset \mathcal{H}_1$ .

**Teorema 2.7.** Seja  $\mathfrak{R}$  uma faixa delimitada por retas disjuntas  $r_0$  e  $r_1$  em um plano neutro. Dados pontos  $A$  e  $B$  em  $\mathfrak{R}$ , e uma sequência finita  $\omega = \{\omega_j\}_{j=1}^N$  das retas  $r_0$  e  $r_1$  tais que retas sucessivas são distintas, podem ser construídos pontos  $P_j \in \omega_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , tais que:

$$AP_1 + P_1P_2 + \dots + P_NB \leq AX_1 + X_1X_2 + \dots + X_NB, \quad \forall X_j \in \omega_j, \quad (8)$$

valendo a igualdade somente se  $X_j = P_j$  para cada  $j = 1, \dots, N$ . Além disso, a reta perpendicular a cada  $\omega_j$  por  $P_j$  é a bissetriz do ângulo formado pela poligonal nesse ponto.

**Prova.** Veja a Figura 3 Consideremos uma poligonal  $\Gamma$  da forma  $AX_1 \dots X_NB$ , com  $X_j \in \omega_j$ , denotando por  $|\Gamma|$  seu comprimento, isto é, a quantidade a direita de (8). Iremos definir uma poligonal  $\Gamma' = AX'_1 \dots X'_NB'$ , com  $|\Gamma'| = |\Gamma|$  “desdobrando”  $\Gamma$  mediante a aplicação de uma sequência de reflexões. Sem perda de generalidade, suponha que  $\omega_1 = r_1$ , de modo que  $X_1 \in r_1$ . Sejam  $\rho_1 = \rho_{r_1}$ , e  $r_2 = \rho_1(r_0)$ . Defina  $X'_1 = X_1 \in r_1$ , e  $X'_2 = \rho_1(X_2) \in r_2$ . Ou seja,  $\Gamma'$  tem o segmento inicial  $AX'_1$  em comum com o segmento inicial  $AX_1$  de  $\Gamma$  e, a partir de  $X_1$ , no lugar de seguir em direção de  $X_2$ ,  $\Gamma'$  vai na direção do reflexo desse ponto com relação a  $r_1$ . Daí em diante,  $\Gamma'$  é definida analogamente. Por exemplo,  $X'_3 = \rho_2(X_3) = \rho_2 \circ \rho_1(X_3)$ , onde  $\rho_2 = \rho_{r_2}$ , estando portanto  $X'_3$  na reta  $r_3 = \rho_2(r_1)$ . Em geral, para cada  $2 \leq n \leq N$ ,  $r_n = \rho_{n-1}(r_{n-2})$ ,  $\rho_n = \rho_{r_n}$ , e  $X'_n = \rho_{n-1} \circ \dots \circ \rho_1(X_n)$ . Finalmente,  $B' = \rho_N \circ \dots \circ \rho_1(B)$ . Uma vez que cada aresta de  $\Gamma'$  é a imagem de uma aresta correspondente de  $\Gamma$  por uma isometria,  $|\Gamma'| = |\Gamma|$ .

Todavia, é claro que  $|\Gamma'| \geq AB'$ , valendo a igualdade somente se  $\Gamma'$  coincide com o segmento  $AB'$ . Por sua vez, esse segmento coincide com a poligonal  $\Gamma'_0 = AP'_1 \dots P'_NB'$ , onde cada  $P'_j$  é a interseção de  $AB'$  com  $r_j$ . Note que os pontos  $P'_j$  estão bem definidos devido a propriedades de separação do plano por retas. Por fim, “dobramos”  $\Gamma'_0$  para obter a poligonal  $\Gamma_0 = AP_1 \dots P_NB$  desejada, definindo  $P_n = \rho_1 \circ \dots \circ \rho_{n-1}(P'_n)$ . Com isso,  $|\Gamma_0| = |\Gamma'_0| \leq |\Gamma'| = |\Gamma|$ , que é equivalente a (8). A afirmação final do enunciado é garantida por  $\Gamma_0$  ser minimizante.



Observe que cada  $r_n$  pode ser traçada a partir de  $r_0$  e  $r_1$ , assim como  $B'$  e, conseqüentemente, as interseções de  $AB'$  com as  $r_n$ . Isso possibilita o protocolo de construção sumarizado a seguir:

1. Sendo  $\rho_1 = \rho_{r_1}$ , trace  $r_2 = \rho_1(r_0)$  e  $B_1 = \rho_1(B)$ . Para cada  $2 < n \leq N$ , trace  $r_n = \rho_{n-1}(r_{n-2})$  e, sendo  $\rho_n = \rho_{r_n}$ ,  $B_n = \rho_n(B_{n-1})$ . Denote  $B' = B_N$ .
2. Trace o segmento  $AB'$  e tome  $P'_n \in AB' \cap r_n$ ,  $1 \leq n \leq N$ .
3. Trace os pontos  $P_n = \rho_1 \circ \dots \circ \rho_{n-1}(P'_n)$ .

No plano euclidiano, o problema de se inscrever em um triângulo acutângulo um triângulo de perímetro mínimo é conhecido como “Problema de Fagnano” (COXETER; GREITZER, 1967). A seguir garantimos no plano neutro a validade da solução euclidiana.

**Teorema 2.8.** *Dado um triângulo acutângulo  $ABC$  em um plano neutro, seu triângulo órtico  $DEF$  é o triângulo de perímetro mínimo inscrito em  $ABC$ .*

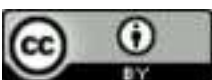
**Prova.** *Veja a Figura 4. O traçado de  $DEF$  pode ser realizado nos moldes da seção 2.1, projetando-se ortogonalmente os vértices de  $ABC$  em seus lados opostos. A construção e o argumento a seguir se prestam a esclarecer que de fato esse triângulo tem a propriedade enunciada.*

Sejam  $X, Y$  e  $Z$  pontos sobre os lados  $BC, CA$  e  $AB$ , respectivamente, e denote por  $\Gamma$  o triângulo  $XYZ$ , sendo  $|\Gamma| = XY + YZ + ZX$  seu perímetro. Vamos “desdobrar”  $\Gamma$  de modo análogo ao da Construção 2.7. Sejam  $a, b$  e  $c$  as retas que contém os lados  $BC, CA$  e  $AB$ , respectivamente. Tome  $\rho_1 = \rho_a$ , denotando:  $a_1 = \rho_1(a) = a$ ,  $b_1 = \rho_1(b)$ ,  $c_1 = \rho_1(c)$ ; e  $X_1 = \rho_1(X) = X$ ,  $Y_1 = \rho_1(Y)$ , e  $Z_1 = \rho_1(Z)$ . Em seguida, tomamos  $\rho_2 = \rho_{b_1}$  e a aplicamos sobre as retas e pontos de índice igual a 1 para obter  $a_2 = \rho_2(a_1)$ ,  $X_2 = \rho_2(X_1)$ , etc. Finalmente, aplicamos a cada um desses objetos a reflexão  $\rho_3 = \rho_{c_2}$ . Considere a poligonal  $\Gamma' = XY_1Z_2X_3$ , de comprimento  $|\Gamma'| = XY_1 + Y_1Z_2 + Z_2X_3$ . Como cada  $\rho_i$  é isometria ( $i = 1, 2, 3$ ), segue que  $|\Gamma'| = |\Gamma|$ . É claro que  $|\Gamma'| \geq XX_3$ , a igualdade ocorrendo somente se os pontos  $Y_1$  e  $Z_2$  estão, nessa ordem, sobre o segmento  $XX_3$ . Portanto, fica demonstrado que  $|\Gamma|$  é pelo menos a distância de  $X$  a sua imagem pela isometria  $\psi = \rho_3 \circ \rho_2 \circ \rho_1$ .

Vamos utilizar a relação  $\rho_{\varphi(r)} = \varphi \circ \rho_r \circ \varphi^{-1}$ , e que cada reflexão é sua própria inversa, para re-expressar  $\psi$ . Por simplicidade, o símbolo  $\circ$  será omitido a seguir. Por definição,  $\rho_1 = \rho_a$ , enquanto que:

$$\rho_2 = \rho_{b_1} = \rho_{\rho_1(b)} = \rho_1 \rho_b \rho_1 ; \tag{9}$$

$$\rho_3 = \rho_{\rho_2(c_1)} = \rho_2 \rho_{c_1} \rho_2 = \rho_2 \rho_{\rho_1(c)} \rho_2 = \rho_2 \rho_1 \rho_c \rho_1 \rho_2 . \tag{10}$$



Portanto,

$$\psi = \rho_3\rho_2\rho_1 = \rho_1\rho_b\rho_1\rho_1\rho_c\rho_1\rho_2\rho_2\rho_1 = \rho_a\rho_b\rho_c. \tag{11}$$

De acordo com o Teorema 1.9,  $\psi$  é uma translação com reflexão e seu eixo é a reta  $FD$ . Além disso, pelo Lema 1.6, a distância de cada ponto  $W$  a  $\psi(W)$  é minimizada precisamente quando  $W$  pertence ao eixo de  $\psi$ . Logo,

$$|\Gamma| \geq XX_3 \geq DD_3 = DE_1 + E_1F_2 + F_2D_3 = DE + EF + FD. \tag{12}$$

Isso mostra que o perímetro de  $DEF$  é mínimo dentre os triângulos inscritos em  $ABC$ . Para garantir que é o único com essa propriedade, observe que seu perímetro é estritamente menor que  $XX_3$  se  $X \neq D$ , os casos  $Y \neq E$  e  $Z \neq F$  podendo ser tratados analogamente.

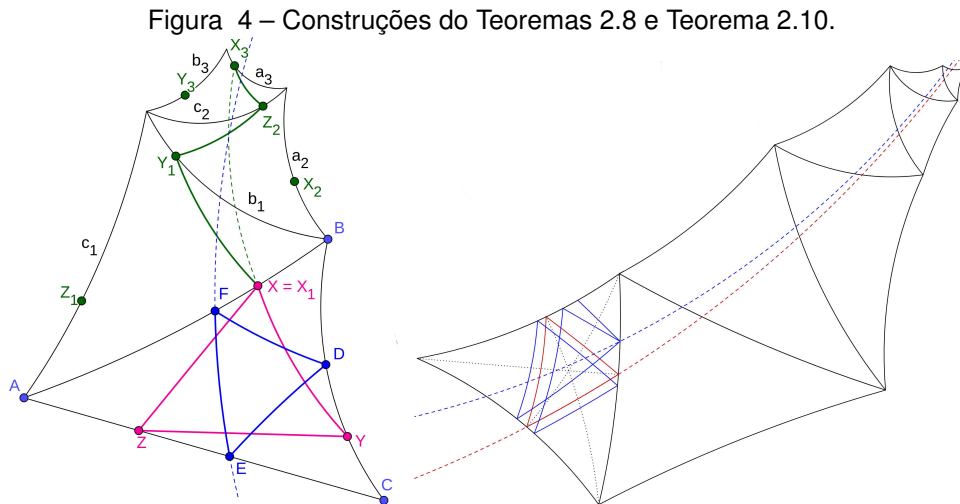


Figura 4 – Construções do Teoremas 2.8 e Teorema 2.10.

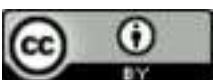
Fonte: Elaboração dos autores.

### 2.3 Trajetórias de bilhar

Formalmente, trajetórias de bilhar e seus trechos são definidos pela seguinte construção. As poligonais minimizantes obtidas na seção anterior são trechos de trajetórias de bilhar, o triângulo órtico de um triângulo acutângulo determinando uma trajetória periódica (Figuras 3 e 4).

*Construção.* Dada uma região poligonal  $\mathfrak{R}$  em um plano neutro  $M$ , e pontos distintos  $P'_0, P'_1 \in \mathfrak{R}$  não sobre um mesmo lado de  $\mathfrak{R}$ , e tais que o segmento  $P'_0P'_1$  está contido em  $\mathfrak{R}$ , a trajetória de bilhar  $\Gamma$  de  $\mathfrak{R}$  determinada por  $P'_0$  e  $P'_1$  é definida a seguir. A sequência de lados  $\omega = \{\omega_n\}$ , onde  $n$  percorre um intervalo de inteiros  $N$ , nesta construção é chamada de *tipo de  $\Gamma$* .

1. Trace a semi-reta  $P'_0P'_1$ . Se ela está contida no interior de  $\mathfrak{R}$ , então o trecho final de  $\Gamma$  é essa semi-reta. Se não, existe um primeiro encontro  $P_1$  com a fronteira de  $\mathfrak{R}$ . Se  $P_1$  não é interior

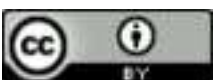


- a um lado de  $\mathfrak{R}$ , então  $P_1$  é o ponto final de  $\Gamma$ , e  $\omega_1$  não está definido. Se  $P_1$  é interior a um lado de  $\mathfrak{R}$ , então este lado é único. Denote-o por  $\omega_1$ . Considere o ângulo  $\alpha_1$  formado em  $P_1$  por  $P_1P'_1$  e a perpendicular a  $\omega_1$  por  $P_1$ . Transportando esse ângulo, trace a semi-reta  $\gamma_1$  com origem  $P_1$ , oposta a semi-reta  $P_1P'_1$  com relação a perpendicular a  $\omega_1$ , e formando com ela ângulo igual a  $\alpha_1$ . Possivelmente  $\alpha_1 = 0$ . Nesse caso, e somente nele,  $P'_0$  pertence a  $\gamma_1$ .
2. Repita o passo anterior utilizando  $\gamma_1$  no lugar de  $P'_0P'_1$ , e assim sucessivamente, possivelmente produzindo uma sequência de pontos  $P_n$  sobre lados  $\omega_n$  de  $\mathfrak{R}$ , onde  $n$  percorre um intervalo de inteiros positivos.
  3. Execute os passos anteriores partindo da semi-reta  $P'_1P'_0$ , possivelmente produzindo uma sequência de pontos  $P_n$  sobre lados  $\omega_n$  de  $\mathfrak{R}$ , onde  $n$  percorre um intervalo de inteiros não-negativos. Caso o processo pare, fica definido um “trecho inicial” de  $\Gamma$ .

□

**Exemplo 2.9.** *Suponha que  $\mathfrak{R}$  é uma faixa do plano neutro delimitada por retas disjuntas  $r_0$  e  $r_1$ . Alternativamente, dados pontos em  $\mathfrak{R}$  como acima, a trajetória de bilhar  $\Gamma$  associada pode ser traçada “dobrando” como no Teorema 2.7 a reta  $s$  determinada por esses pontos. Para tanto, considere o grupo  $G = \langle \rho_0, \rho_1 \rangle$  gerado pelas reflexões  $\rho_i$  baseadas em  $r_i, i = 1, 2$  (isto é, o menor subgrupo de  $\text{Isom } M$  que contém  $\rho_0$  e  $\rho_1$ ). Note que as isometrias empregadas no Teorema 2.7 pertencem a  $G$ , de modo análogo ao que ocorre no Teorema 2.8. A coleção  $\{w(\mathfrak{R}) \subset M \mid w \in G\}$  tem a propriedade de ladrilhar  $M$ , no sentido de que o decompõem em faixas isométricas a  $\mathfrak{R}$  dispostas lado a lado. Como consequência, existe uma sequência  $w_n \in G$ , com  $n$  percorrendo um intervalo  $N$  de inteiros, tal que  $s = \cup_n (s \cap w_n(\mathfrak{R}))$ . Então  $\Gamma = \Gamma(s) = \cup_n w_n^{-1}(s \cap w_n(\mathfrak{R}))$ . Os sucessivos encontros de  $s$  com imagens de  $r_0$  e de  $r_1$  por elementos de  $G$  são registrados no tipo  $\omega$  de  $\Gamma$ . Em particular, dados  $A, B \in \mathfrak{R}$ , e uma sequência  $w'$  admissível pelo Teorema 2.7, a poligonal minimizante associada determina  $\Gamma(s)$ , onde  $s$  é a reta passando por  $A$  e  $w'(B)$  para algum  $w' \in G$ .*

*Se  $M$  é euclidiano e  $s$  não é paralela a  $r_0$ , então  $N$  não é limitado nem superiormente, nem inferiormente, e  $\omega$  é da forma  $\dots r_0 r_1 \dots$ . Para todo  $w \in G, w \neq \text{id}$ , e  $X \in \mathfrak{R}$ , a reta  $s$  que passa por  $X$  e  $w(X)$  é perpendicular a  $r_0$  e a  $r_1$ . Logo, se uma trajetória se auto-intersecta em  $X$ , ela é perpendicular aos lados de  $\mathfrak{R}$  e, portanto, periódica (Lema 1.4). Há então infinitas trajetórias periódicas distintas em uma faixa e, em um plano neutro, isso é suficiente para que o plano seja euclidiano, conforme veremos a seguir.*



Se  $M$  é hiperbólico, suponha adicionalmente que existe uma perpendicular  $s_0$  comum a  $r_0$  e  $r_1$ . Note que  $s_0$  é única, caso contrário haveria um retângulo em  $M$ . Então  $\Gamma(s_0)$  tem tipo  $\cdots r_0 r_1 \cdots$ , e essa reta é a única desse tipo. Pois, se  $s \neq s_0$ , no disco de Poincaré  $s$  tem uma “extremidade”  $A_\infty$  na fronteira do disco que não é extremidade de  $s_0$ . Logo, na direção de  $A_\infty$ ,  $s$  intersecta apenas um número finito de ladrilhos  $w_n(\mathfrak{R})$ . Isto é, ou  $N$  é limitado superiormente, ou inferiormente; e  $\Gamma(s)$  tem um trecho inicial ou final igual a uma semi-reta com interior contido no interior de  $\mathfrak{R}$ . Ambos ocorrem simultaneamente se a outra “extremidade” de  $s$  também não é extremidade  $s_0$ , resultando em  $\Gamma$  de tipo finito. Do contrário,  $\Gamma(s)$  encontra cada uma das  $r_i$  infinitas vezes, em pontos que se acumulam nas interseções de  $s_0$  com a fronteira de  $\mathfrak{R}$ . Se um ponto  $A$  pertence a  $s_0$ , então  $s_0$  é a reta que passa por  $A$  e  $w(A)$  para todo  $w \in G$ ,  $w \neq \text{id}$ , pois  $s_0 = w(s_0)$ . E, se  $A$  não pertence a  $s_0$ , essa reta é distinta de  $s_0$ . Observe também que o comprimento de  $\Gamma(s_0)$  é mínimo dentre as trajetórias. Outra distinção com relação ao caso euclidiano é a existência de trajetórias que não encontram  $r_0$  e  $r_1$ , podendo ou não separá-las, no sentido de elas estarem ou não em semi-planos distintos determinados por  $\Gamma$ . A análise do caso em que  $r_0$  e  $r_1$  não possuem uma perpendicular comum segue as mesmas linhas. Nele, não há trajetórias periódicas, e há trechos conectando pontos a si mesmos com comprimento total arbitrariamente pequeno.

Considere agora uma região  $\mathfrak{R}$  de um plano neutro  $M$  delimitada por um triângulo acutângulo  $ABC$ . Nesse caso, se  $G$  é o grupo gerado pelas reflexões baseadas nos lados de  $ABC$ , a coleção  $\{w(\mathfrak{R}) \mid w \in G\}$  não necessariamente ladrilha  $M$ . Por exemplo, se um dos ângulos internos de  $ABC$  não é comensurável com  $\pi$ , então existem rotações  $w \in G$  centradas nos vértices de  $ABC$  tais que os interiores de  $w(\mathfrak{R})$  e de  $\mathfrak{R}$  se intersectam. Assim, em geral, há obstruções em se aplicar o método do Exemplo 2.9. Porém, é possível aplicá-lo parcialmente para tirar conclusões a respeito do bilhar em  $ABC$ , como será feito a seguir.

Seja  $DEF$  o triângulo órtico de  $ABC$ , com  $D$ ,  $E$  e  $F$  nos lados opostos aos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente. Pelo Teorema 1.9,  $DEF$  determina uma trajetória periódica de tipo  $\cdots abc \cdots$ , que se desdobra como no Teorema 2.8 sobre o eixo  $FD$  da translação com reflexão  $\psi = \rho_a \rho_b \rho_c$ . Ao longo desse eixo, sucessivas imagens de  $\mathfrak{R}$  são dispostas lado a lado como em um ladrilhamento.

Considere um ponto  $X_0$  no interior do lado  $a$ , e um trecho de trajetória de bilhar  $\Gamma = X_{-1} X_0 X_1 X_2 X_3$  de tipo  $cabca$  com  $X_3 = X_0$ . Nesse caso,  $\Gamma$  se desdobra sobre a reta  $s$  determinada por  $X_0$  e  $X'_0 = \psi(X_0)$ , que encontra o lado  $c$  no ponto  $X_{-1}$ . Reciprocamente, se  $s$  tem essa propriedade, seu segmento de extremidades  $X_{-1}$  e  $\psi(X_0)$  se dobra sobre  $\Gamma$ . Realizando a construção e variando  $X_0$ ,



verifica-se que o trecho  $\Gamma$  não contém uma trajetória periódica se  $X_0 \neq D$ . Vamos demonstrar essa propriedade, que contrasta com o que ocorre no caso euclidiano.

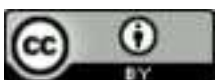
**Teorema 2.10.** *Seja  $\mathfrak{R}$  uma região de um plano hiperbólico delimitada por um triângulo acutângulo  $ABC$ . A trajetória órtica é a única trajetória periódica do bilhar em  $\mathfrak{R}$  que encontra sucessivamente os lados  $a, b$  e  $c$ .*

**Prova.** *Iremos mostrar que se um trecho de trajetória finito se auto-intersecta em  $X_0 \neq D$ , após encontrar sucessivamente a sequência de lados  $a, b$  e  $c$ , então ele retorna com uma direção diferente da de partida. De início a discussão segue na generalidade neutra.*

*Por  $\psi$  ser uma translação com reflexão de eixo  $FD$ , o segmento de extremidades  $X_0$  e  $\psi(X_0)$  encontra  $FD$  em um ponto  $O$ . Denote  $D' = \psi(D)$ , e considere os triângulos  $DX_0O$  e  $D'X'_0O$ . Seus ângulos internos em  $O$  têm uma medida comum  $\beta$ , pois são opostos pelo vértice. Considere o caso em que  $X_0$  está entre  $D$  e  $C$  – o argumento para o outro caso é similar. Então, como  $X_{-1} \in AB$ , o ângulo  $\theta_1 = \angle X_{-1}X_0B$  é menor que o ângulo  $\angle AX_0B$ , que é inferior a  $\pi/2$  por conta de  $X_0 \neq D$ . Consequentemente,  $\theta_1$  é ângulo externo a  $DX_0O$ . Sendo  $\theta_0$  seu ângulo interno em  $D$ , por  $\psi$  ser uma translação com reflexão,  $\theta_0$  é externo a  $D'X'_0O$ . Finalmente, note que o ângulo  $\theta_2$  interno a  $D'X'_0O$  é igual a  $\angle X_2X_3B$ . Pelo Teorema do Ângulo Externo,  $\theta_0 + \beta \leq \theta_1$  e  $\theta_2 + \beta \leq \theta_0$ . Logo,  $\theta_2 + 2\beta \leq \theta_1$ , e  $0 < 2\beta \leq \theta_1 - \theta_2$ . Em particular,  $\theta_1 \neq \theta_2$ . Assim, fica provado que são diferentes os ângulos com os quais  $\Gamma$  chega a  $X_0$  na primeira e segunda vezes. No caso euclidiano,  $2\beta = \theta_1 - \theta_2$ .*

*Ainda considerando  $X_0$  sobre o lado  $a$ , considere agora um trecho  $\Gamma = X_{-1} \cdots X_6$  com de tipo  $cabcabca$  com  $X_6 = X_0$ . Veja a Figura 4. Seja  $\tau = \psi \circ \psi$ , e denote  $X'_0 = \tau(X_0)$ . Nesse caso,  $\Gamma$  se desdobra sobre a reta  $s$  determinada por  $X_0$  e  $X'_0$ , que encontra  $c$  em  $X_{-1}$ , valendo aqui uma recíproca, como no caso anterior. Suponha que  $X_0 \neq X$ , e observe que  $\tau$  é uma translação. Logo,  $DD'X'_0X_0$  é um quadrilátero convexo. Considere o caso em que  $X_0$  está entre  $D$  e  $C$ , de modo que a medida  $\theta_1$  do ângulo interno de  $DD'X'_0X_0$  em  $X_0$  é igual a  $\angle X_{-1}X_0B$  (e inferior a  $\pi/2$ ). Sendo  $\theta_0$  o ângulo interno de  $DD'X'_0X_0$  em  $D$ , seu ângulo interno em  $D'$  é igual a  $\pi - \theta_0$ , pois  $\tau$  é uma translação. Já o ângulo interno em  $X_0$  é  $\pi - \theta_2$ , onde  $\theta_2$  é o ângulo  $\angle X_5X_6B$ . Portanto,  $\theta_0 + \pi - \theta_0 + \theta_1 + \pi - \theta_2 \leq 2\pi$ , isto é,  $\theta_1 - \theta_2 \leq 0$ . Vale a igualdade se, e somente se,  $M$  é euclidiano e, nesse caso,  $\Gamma$  é periódica, paralela a trajetória órtica, e de tipo  $abcabc$ . Portanto,  $\theta_1 \neq \theta_2$  no caso hiperbólico.*

*Uma vez que as composições  $\psi^k$ ,  $k \geq 1$ , são elas próprias translações com reflexões, ou translações, o caso geral segue dos casos  $k = 1, 2$  acima. Isso conclui a prova do Teorema.*

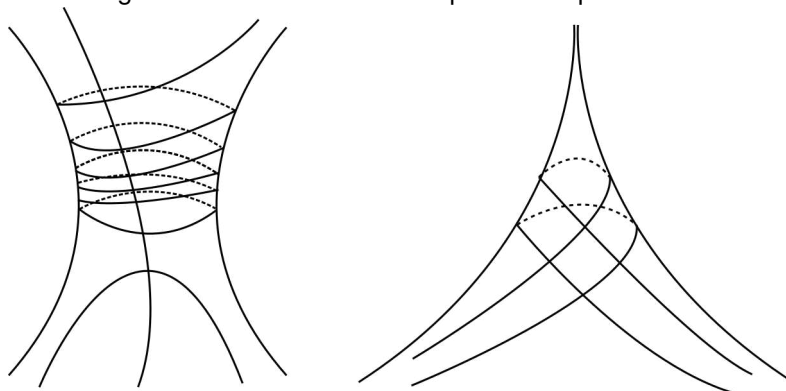


### 3 Considerações Finais

Prosseguindo com as construções, diversas outras verificações são possíveis como quando se busca trechos de trajetórias de bilhar relativamente curtos, ou auxílio na visualização de argumentos gerais. Por exemplo, facilmente se constrói um quadrilátero hiperbólico de lados  $a, b, c, d$  com uma trajetória periódica de tipo  $\dots abcd\dots$ , independentemente de o quadrilátero ser inscritível, que é uma condição necessária conhecida no caso euclidiano (TABACHNIKOV, 2005).

Concluimos mencionando uma consequência geométrica interessante do estudo dos bilhares em faixas, que é a descrição de geodésicas em superfícies hiperbólicas topologicamente equivalentes a cilindros. A Figura 5 contém superfícies que são obtidas no contexto do Exemplo 2.9, identificando-se a reta  $r_0$  com sua imagem por  $\rho_1$ , de modo que  $\mathbb{R} \cup \rho_1(\mathbb{R})$  se torna um cilindro sobre o qual as trajetórias se deslocam. Para mais detalhes, consulte Beardon (1983).

Figura 5 – Geodésicas em superfícies hiperbólicas.



Fonte: Elaboração dos autores.

### Referências

AKOPYAN, A. V. On some classical constructions extended to hyperbolic geometry.

**Matematicheskoe prosveshenie**. Tre'tya seriya, v. 13, p. 155-170, 2009. DOI:

<https://doi.org/10.48550/arXiv.1105.2153>.

BEARDON, A. F. **The geometry of discrete groups**. Graduate Texts in Mathematics, v. 91, New York: Springer-Verlag, 1983.

BOLDRIGHINI, C.; KEANE, M.; MARCHETTI, F. Billiards in polygons. **The Annals of Probability**, v. 6, n. 4, p. 532-540, 1978. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2243120>. Acesso em: 21 dez. 2022.

BOTTEMA, O. On the medians of a triangle in hyperbolic geometry. **Canadian Journal of Mathematics**, v. 10, p. 502-506, 1958. DOI: <https://doi.org/10.4153/CJM-1958-049-5>.



COLOMBO, J.; DE SOUSA, D. D. Régua e Compasso na Geometria Hiperbólica. *In: BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA*, 9., 2019, Juazeiro do Norte. **Anais [...]**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2019. Notas de Oficina. Disponível em: [https://www.professores.uff.br/jcolombo/wp-content/uploads/sites/124/2019/07/of04\\_-\\_compasso\\_hiperbolico\\_IX\\_bienal\\_SBM\\_2019.pdf](https://www.professores.uff.br/jcolombo/wp-content/uploads/sites/124/2019/07/of04_-_compasso_hiperbolico_IX_bienal_SBM_2019.pdf). Acesso em: 19 dez. 2022.

COXETER, H. S. M.; GREITZER, S. L. **Geometry revisited**. Washington: The Mathematical Association of America, 1967.

GEOGEBRA. Materiais Didáticos. **Hyperbolic Geometry in the Poincaré Disk**. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/R5e9AggU>. Acesso em: 30 mar. 2022.

GOODMAN-STRAUSS, C. Compass and Straightedge in the Poincaré Disk. **The American Mathematical Monthly**, Washington, D.C., v. 108, n. 1, p. 38-49, 2001. DOI: <https://doi.org/10.1080/00029890.2001.11919719>.

GREENBERG, M. J. **Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and history**. Berlin: Macmillan, 1993.

HARVEY, M. **Geometry illuminated: an illustrated introduction to euclidean and hyperbolic plane geometry**. MAA Press Textbooks. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, 2015.

HORVÁTH, A. G. On the hyperbolic triangle centers. **Studies of the University of Zilina. Mathematical Series**. v. 2014, p. 1-25, 2014. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1410.6735>.

MARTIN, G. E. **The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane**. New York: Springer-Verlag, 1975.

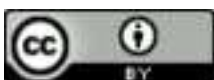
MASUR, H.; TABACHNIKOV, S. Rational billiards and flat structures. *In: HASSELBLATT, B.; KATOK, A. Handbook of Dynamical Systems*, v. 1A, Amsterdã: Elsevier Science, 2002. p. 1015-1089.

MILLMAN, R. S.; PARKER, G. D. **Geometry: a metric approach with models**. 2. ed. Berlin: Springer Science & Business Media, 1991.

NAGAR, A.; SINGH, P. Finiteness in polygonal billiards on hyperbolic plane. **Topological Methods in Nonlinear Analysis**. v. 58, n. 2, p. 481-520, 2021. DOI: <https://doi.org/10.12775/TMNA.2021.003>.

PAPADOPOULOS, A.; SU, W. On hyperbolic analogues of some classical theorems in spherical geometry. *In: FUJIWARA, K.; OHSHIKA, K.; KOJIMA, S. (ed.) Hyperbolic geometry and geometric group theory*, Advanced Studies of Pure Mathematics, n. 73. Tokyo: Mathematical Society of Japan, 2017. p. 225-253. Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01630212>. Acesso em: 16 dez. 2022.

PHILIPPAKIS, A. The Orthic Triangle and the O.K. Quadrilateral. **The American mathematical monthly**, Washington, D.C., v. 109, n. 8, p. 704-728, 2002. DOI: <https://doi.org/10.1080/00029890.2002.11919903>.



RIBEIRO, R.; GRAVINA, M. Disco de Poincaré: uma proposta para explorar geometria hiperbólica no GeoGebra. **Revista Professor de Matemática Online**, Rio de Janeiro, v. 1, n. 1, p. 53-66, 2013. DOI: <https://doi.org/10.21711/2319023x2013/pmo15>.

STRZHELETSKA, E. **The Euler Line in non-Euclidean geometry**. 2003, 63 f. Dissertação (Master of Arts in Mathematics) - California State University, San Bernardino, 2003. Disponível em: <https://scholarworks.lib.csusb.edu/etd-project/2443>. Acesso em: 16 dez. 2022.

TABACHNIKOV, S. **Geometry and billiards**. v. 30, 1. ed. Providence: American Mathematical Society, 2005.

VENEMA, G. A. **Exploring Advanced Euclidean Geometry with GeoGebra**. Washington, D.C.: American Mathematical Society, 2013.

WAGNER, E.; CARNEIRO, J. P. Q. **Construções geométricas**. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.

YAGLOM, I. M. **Geometric transformations I**. Tradução: A. Shields. Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 1975. DOI: <https://doi.org/10.5948/UP09780883859254.001>.

## Agradecimentos

Os autores dedicam agradecimentos especiais à Professora Cristina Lúcia Dias Vaz e ao Professor Marcos Monteiro Diniz pelo gentil incentivo à produção deste trabalho, e agradecem à Universidade Federal do Pará, onde este trabalho foi realizado.

