Do termo geral à soma de Gauss: uma abordagem olímpica sobre progressões aritméticas

From the general term to the sum of Gauss: an olympic approach about arithmetic progressions

Desde el término general hasta la suma de Gauss: un enfoque olímpico de las progresiones aritméticas

Érick Caetano Alves do Nascimento[1]
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, PE, Brasil
https://orcid.org/0000-0002-4713-6525, http://lattes.cnpq.br/0975672330526007

Marcos Miguel da Silva Filho[2]
Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE), Recife, PE, Brasil
https://orcid.org/0000-0001-9598-6383, http://lattes.cnpq.br/8360093239768815

Thiago Yukio Tanaka[3]
Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE), Recife, PE, Brasil
https://orcid.org/0000-0002-6586-127X, http://lattes.cnpq.br/3394446426392577

Jogli Gidel da Silva Araújo[4]
Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE), Recife, PE, Brasil
https://orcid.org/0000-0002-0367-0339, http://lattes.cnpq.br/4973757767035923

Resumo: O objetivo deste trabalho é abordar a progressão aritmética (PA) de primeira e segunda ordem no contexto das Olimpíadas de Matemática. Para isso, desenvolvemos os principais resultados envolvendo as PAs, como as propriedades da razão, as expressões para os termos geral e generalizado e a soma de Gauss, no intuito de aplicá-los na resolução de questões olímpicas. Com o propósito de complementar essa formação, exploramos o conteúdo das PAs de segunda ordem que não é tão abordado na Educação Básica. Os problemas foram selecionados das Olimpíadas Matemáticas nacionais e internacionais de destaque, como

[1]**Currículo sucinto**: Licenciado em Matemática pela Universidade Federal Rural de Pernambuco, mestrando em Matemática pela Universidade Federal de Pernambuco. **Contribuição de autoria**: Conceituação, Curadoria de Dados, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação, Metodologia. **Contato**: erick.alves@ufpe.br.

[2]**Currículo sucinto**: Licenciado em Matemática pela Universidade Federal Rural de Pernambuco. **Contribuição de autoria**: Conceituação, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação, Metodologia. **Contato**: marcosbo123@hotmail.com.

[3]**Currículo sucinto**: Licenciado, mestre e doutor em Matemática pela Universidade Federal de Pernambuco e docente da Universidade Federal Rural de Pernambuco. **Contribuição de autoria**: Administração do Projeto, Análise Formal, Conceituação, Curadoria de Dados, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação, Metodologia, Supervisão, Validação e Visualização. **Contato**: thiago.tanaka@ufrpe.br.

[4]**Currículo sucinto**: Bacharel, mestre e doutor em Matemática pela Universidade Federal de Campina Grande e docente da Universidade Federal Rural de Pernambuco. **Contribuição de autoria**: Análise Formal, Conceituação, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação, Supervisão, Validação e Visualização. **Contato**: jogli.silva@ufrpe.br.

NASCIMENTO, Érick Caetano Alves do; SILVA FILHO, Marcos Miguel da; TANAKA, Thiago Yukio; ARAÚJO, Jogli Gidel da Silva. Do termo geral à soma de Gauss: uma abordagem olímpica sobre progressões aritméticas. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 1, p. e3001, 3 de janeiro de 2023. https://doi.org/10.35819/remat2022v9i1id5727.

a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), a *American Mathematics Competitions* (AMC) e a *International Mathematical Olympiad* (IMO). Durante as soluções desses problemas, procuramos enfatizar o conceito trabalhado de modo a destacar a importância deste conteúdo na preparação de docentes e discentes envolvidos com treinamentos olímpicos.

Palavras-chave: Progressão Aritmética; Olimpíadas de Matemática; Educação.

Abstract: The objective of this work is to approach the arithmetic progression (AP) of first and second order in the context of the Mathematical Olympiads. For this, we will develop the main results involving the APs, such as the properties of the ratio, the expressions for the general and generalized terms and the Gauss sum, in order to apply them in the resolution of Olympic questions. In order to complement this training, we explored the content of second-order APs that is not so addressed in Basic Education. The problems were selected from prominent national and international Mathematical Olympiads, such as the Brazilian Mathematical Olympiad (OBM), the Brazilian Mathematical Olympiad of Public Schools (OBMEP), the American Mathematics Competitions (AMC) and the International Mathematical Olympiad (IMO). During the solutions of these problems, we tried to emphasize the concept worked in order to highlight the importance of this content in the preparation of teachers and students involved with olympic training.

Keywords: Arithmetic Progression; Mathematics Olympiads; Education.

Resumen: El propósito de este trabajo es abordar la progresión aritmética (PA) del primer y segundo orden en el contexto de los Juegos Olímpicos de Matemáticas. Con este fin, desarrollaremos los principales resultados relacionados con el PAs, como las propiedades de la razón, las expresiones para los términos generales y generalizados y la suma de Gauss, para aplicarlas para resolver preguntas olímpicas. Con el propósito de complementar esta formación, explotamos el contenido de los PAs de segundo orden que no se aborda tanto en la Educación Básica. Los problemas fueron seleccionados de las Olimpiadas Matemáticas nacionales e internacionales, como la Olimpiadas de Matemáticas Brasileña (OBM), Olimpiadas de las Escuelas Públicas Brasileñas (OBMEP), el American Mathematics Competitions (AMC) y la International Mathematical Olympiad (IMO). Durante las soluciones de estos problemas, buscamos enfatizar el concepto trabajado para resaltar la importancia de este contenido en la preparación de maestros y estudiantes involucrados con la capacitación olímpica.

Palabras clave: Progresión Aritmética; Olimpiadas de Matemáticas; Educación.

Data de submissão: 15 de fevereiro de 2022.

Data de aprovação: 22 de outubro de 2022.

1 Introdução

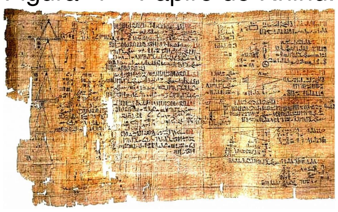
Uma sequência é uma função que tem por domínio o conjunto dos números naturais (sequência infinita) ou o conjunto dos números naturais menores do que ou igual a n (sequência finita, com n elementos). Por exemplo, são representações da mesma sequência:

- (a_n), com $a_n = 3n$, $n \in \mathbb{N}$;
- $(3n)_{n\in\mathbb{N}}$;
- $(3, 6, 9, ..., 3n, 3(n + 1), ...)$;
- $\begin{array}{rccc} a_n : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & a_n = 3n; \end{array}$
- (a_n) tal que $a_{k+1} - a_k = 3$ e $a_1 = 3$.

Aqui, diferente da grande maioria dos livros do Ensino Básico de Matemática, estamos considerando o conjunto dos números naturais como sendo o conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\ n, n+1, \ldots\}$, isto é, não estamos considerando o 0 (zero) como um número natural. Porém, em alguns momentos, será conveniente denotar o primeiro termo da sequência como sendo aquele com índice zero, a_0.

No Ensino Básico, podemos observar algumas sequências famosas com particularidades bem determinadas em suas *Leis de Formações* ou que são obtidas por meio de *Recorrências* como a *Progressão Geométrica* (PG), a *sequência de Fibonacci* e também a *Progressão Aritmética* (PA). Destacamos que as PAs têm seu cunho histórico firmado desde os povos antigos, como os egípcios, que nos mostram em alguns problemas no papiro de *Rhind*[1] a necessidade e o domínio de PA, perpassando por outros povos e também mais recentemente por Gauss (responsável pela fórmula da soma de finitos termos de uma PA) (VARGAS, 2019).

Figura 1 – Papiro de *Rhind.*



Fonte: Belluck (2010).

[1]Também conhecido como Papiro de Ahmes, em homenagem ao escriba que o copiou por volta de 1650 a.C. Neste, encontram-se diversos problemas matemáticos de tópicos como geometria e álgebra. Em particular, há o seguinte problema envolvendo PA: "Divida 100 pães entre 5 homens de modo que as partes recebidas estejam em Progressão Aritmética e que um sétimo da soma das três partes maiores seja igual à soma das duas menores" (LIMA *et al.*, 2004, p. 4).

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), no Ensino Básico, o estudo das sequências numéricas está sempre relacionado com a unidade temática “Álgebra” e acontece desde o 1º ano do Ensino Fundamental, a partir da identificação de padrões, como podemos ver na habilidade EF01MA10: “Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras” (BRASIL, 2018, p. 279). Já no 2º ano do Ensino Fundamental, espera-se que o estudante tenha seu primeiro contato com a construção de sequências ordenadas de números naturais, como indica a habilidade EF02MA09: “Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida” (BRASIL, 2018, p. 283).

O estudo das progressões aritméticas, ainda que não tenham recebido tal nomenclatura, é iniciado no 3º ano do Ensino Fundamental, de acordo com a habilidade EF03MA10: “Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes” (BRASIL, 2018, p. 287). Por fim, a primeira vez que vemos a relação entre sequências numéricas e expressões algébricas, essencial para o estudo das PAs, é no 7º ano do Ensino Fundamental, a partir da habilidade EF07MA15: “Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas” (BRASIL, 2018, p. 307).

O estudo das progressões aritméticas propriamente ditas só acontece no Ensino Médio, como podemos ver, ainda na BNCC, na Competência Específica 5, que diz:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018, p. 540).

Já a habilidade em que as PAs são citadas é a EM13MAT507: “Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas” (BRASIL, 2018, p. 541).

No Ensino Superior, estuda-se o conteúdo de sequências, em geral, em uma unidade temática nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral ou Análise na Reta (ou no $\mathbb{R}^N$). A primeira disciplina está preocupada, em sua maior parte, com aspectos computacionais relacionados à técnica, ou seja, os cálculos dos procedimentos envolvidos. Por outro lado, a segunda preocupa-se em fundamentar esses resultados, isto é, demonstrar de maneira rigorosa as propriedades ou resultados que são utilizados. Os conteúdos trabalhados são centrados nas propriedades gerais, como monotonicidade, limitação, operações e regularidade e nos critérios de convergência, como o Critério de Cauchy, o Teorema da Convergência Monótona e o Teorema de Bolzano-Weierstrass. Porém, pouco ou quase nenhum tratamento é direcionado para as PAs em si.

As Olimpíadas Matemáticas, além de reunir grandes nomes de matemáticos de todas as idades, também têm como objetivo encontrar grandes talentos para a Matemática, a exemplo do matemático Terence Tao, medalhista Fields (2006), que, ainda no início de sua adolescência, em 1988, conseguiu medalha de ouro na *International Mathematical Olympiad* (IMO), sendo, até a atualidade, o mais jovem a receber três medalhas na história da Olimpíada. Também temos como exemplo o jovem pernambucano Pedro Gomes Cabral que, aos 18 anos, na IMO 2020, alcançou uma medalha de ouro. No Brasil, existem algumas Olimpíadas Matemáticas, como a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), iniciada em 1979, e a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), criada em 2005. Ambas são aplicadas a partir do 6º ano do Ensino Fundamental e têm como objetivo em comum estimular e promover o estudo da Matemática em prol da melhoria do ensino da Matemática no Brasil, além de incentivar o aperfeiçoamento dos professores pela participação na Olimpíada. A OBM, em particular, também apresenta o objetivo de selecionar estudantes para representar o Brasil em competições internacionais.

Estudos apontam resultados positivos para a realização dessas competições nas escolas, não só com os alunos, mas também para professores de Matemática. Biondi, Vasconcellos e Menezes-Filho (2009, p. 3) evidenciam que “O estimador resultante é classificado como duplamente robusto e apontou para um impacto positivo e estatisticamente significativo nas notas médias de matemática dos estudantes de 8ª série na Prova Brasil 2007”. Assim, podemos concluir que as escolas que participam da OBMEP tendem a evoluir no desenvolvimento escolar e ter melhores notas nos sistemas de avaliação da educação no Brasil. Mais ainda, os dados estudados no artigo citado anteriormente mostram que, quanto mais vezes as escolas participavam das olimpíadas, mais positivos eram os resultados. Biondi, Vasconcellos e Menezes-Filho (2009, p. 11) afirmam que “Todas as estimativas do ATT apontam para resultados de impacto estatisticamente significativos e positivos, e sinalizam que quanto maior o número de participações nas edições da Olimpíada, maior o impacto na nota”.

Essas melhorias devem-se principalmente a questões olímpicas serem aplicadas na forma de problemas que fazem o aluno ter que pensar de maneira ativa na situação apresentada, por meio da criação de estratégias para chegar na solução e que envolvem conteúdos que nem sempre são vistos no Ensino Básico, mas que podem ser adquiridos por meio de treinamentos olímpicos. Podemos ver que a própria BNCC evidencia a importância do ensino ser proposto principalmente por meio da resolução de problemas.

> Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (BRASIL, 2018, p. 266).

Além da BNCC, alguns artigos também defendem a resolução de problemas como metodologia de ensino.

> Assim, o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos se defrontam com situações desafiadoras e trabalham para desenvolver estratégias de resolução. Daí a importância de tomar a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática e não mais como uma série de exercícios para aferir se os alunos apreenderam determinado conteúdo ou não (LEITE; ARAUJO, 2010, p. 3).

Portanto, é a partir de questões olímpicas que envolvem Progressão Aritmética que vamos construir este artigo, utilizando-se de suas respectivas resoluções como exemplos para a compreensão do assunto abordado.

Diversos trabalhos versam sobre Progressões Aritméticas e Olimpíadas de Matemática. Carvalho (2008) e Vargas (2019) abordam o ensino das PAs para estudantes do 1º ano do Ensino Médio. Carvalho (2008) apresenta uma pesquisa qualitativa para investigar em quais condições é possível fazer com que alunos generalizem termos de uma PA e constatou que, após momentos de observação e com o auxílio de sequências (numéricas ou representadas por figuras), foi possível fazer com que os alunos identificassem somas de termos das PAs ou até a generalização de seus termos, mas que isso não implicava diretamente na construção de suas respectivas fórmulas devido às dificuldades dos alunos com notações algébricas. Vargas (2019) investiga o ensino e a aprendizagem das PAs através da resolução de problemas, concluindo que a técnica de resolução de problemas como metodologia possibilitou que os alunos assimilassem os conteúdos de PA de maneira menos abstrata.

Maroski (2017) e Diógenes e Lima (2020) abordam as PAs com seu devido rigor matemático e apresentam o conceito de progressões aritméticas de ordem superior. Araujo e Monsores (2017), por sua vez, fizeram uma coleta de respostas de professores, de quase todas as unidades federativas, sobre suas percepções a respeito dos objetivos da OBMEP e se esses estão obtendo sucesso na escola em que cada professor atua, a fim de determinar em que medida a OBMEP induz um aprimoramento do ensino da Matemática. Já Souza e Amaro (2017) trazem um relato de experiência sobre os impactos do treinamento olímpico de Matemática para alunos da Educação Básica e concluem que a oferta de aulas com esta metodologia resulta em um melhor rendimento dos alunos participantes não só na Matemática como também em outras matérias, por estimular o raciocínio e a criatividade do estudante.

A divulgação das competições olímpicas colabora para a ampliação da participação dos alunos nesses eventos. Este artigo, por outro lado, traz uma abordagem inovadora por trabalhar com questões de Olimpíadas de Matemática, nacionais e internacionais, que estão relacionadas com o conceito das PAs, PAs de segunda ordem e PAs aplicadas em outras áreas da Matemática como Geometria e Teoria dos Números. Espera-se que este trabalho sirva como material de ensino e pesquisa para estudantes interessados no assunto e para professores que desejam trabalhar o conteúdo de PA através da metodologia da resolução de problemas olímpicos.

Este trabalho foi desenvolvido a partir da sondagem e seleção de questões de Olimpíadas de Matemática que abordassem o tema de Progressões Aritméticas. Para tanto, buscamos em olimpíadas nacionais (OBM e OBMEP), internacionais, como a *American Mathematics Competitions* (AMC), a *Olimpiada Matemática Española* (OME) e seus respectivos materiais, como o Banco de Questões da OBMEP, notas de aula dos treinamentos dos Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI-IMPA) e do Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC-OBMEP). Após a escolha dos problemas olímpicos, estudamos todo o referencial teórico sobre PA para resolver uma parte das questões selecionadas. Uma outra parte dessas questões foi direcionada para compor uma seção de problemas complementares, a fim de proporcionar uma extensão do conteúdo trabalhado no decorrer do artigo. O objetivo deste trabalho é servir como fonte de estudos para estudantes e docentes que desejam se preparar para competições, olimpíadas ou provas de Matemática que exploram as progressões aritméticas. Para isso, desenvolvemos uma sequência lógica que aborda os principais resultados e fórmulas que envolvem progressões desde a construção até a aplicação em provas olímpicas. Nos exemplos, trouxemos a resolução de questões de olimpíadas nacionais e internacionais, de modo a apresentar os resultados com linguagem clara para cumprir com o objetivo proposto. Além disso, adicionamos uma seção com problemas complementares que enriquecem este material.

Dividimos o trabalho em algumas seções para facilitar o entendimento do leitor sobre o assunto proposto. Primeiramente, na seção de número 2, definimos precisamente as sequências conhecidas como Progressões Aritméticas e resolvemos questões olímpicas relacionadas com as propriedades iniciais. Através de um argumento conhecido como Somas Telescópicas, obtemos a Fórmula Generalizada do Termo Geral e, consequentemente, a conhecida Fórmula do Termo Geral. Na terceira seção, iniciamos com as somas de PAs, desde sua curiosidade histórica acerca do matemático Gauss, até as demonstrações e aplicações da fórmula geral da soma em questões de olimpíadas. Na seção de número 4, são vistas PAs de segunda ordem, ou seja, as PAs dentro de PAs, que consistem em obter uma PA através das diferenças dos termos consecutivos de uma dada sequência. Por mais que seja incomum ver esse assunto ao se estudar PA, a seção dispõe de definições e demonstrações e nos traz questões provenientes de competições matemáticas. Na seção de número 5, buscamos trazer uma série de problemas complementares oriundos de Olimpíadas Matemáticas e outras de criação dos autores, para, de maneira geral, complementar e fixar os conteúdos abordados. Finalizando, na seção de número 6, trazemos a conclusão do trabalho.

2 Fundamentos Iniciais

É evidente que você leitor já teve contato com questões e problemas que envolviam PAs e pediam aplicação direta de alguma fórmula que talvez você nem soubesse o motivo de funcionar, tanto na técnica envolvida quanto na intuição do que estava acontecendo. Mostraremos que esse conteúdo pode ser explorado de diversas formas e relacionando diversos outros temas de Matemática, como divisibilidade, congruência modular e manipulações com desigualdades que, *a priori*, não parecem se relacionar com o tema central. Reforçamos que nossa intenção é apresentar como as PAs são abordadas em Olimpíadas de Matemática. Para isso, precisamos antes definir formalmente uma PA e então apresentar alguns resultados pertinentes para a nossa discussão.

Apresentaremos agora a definição central deste trabalho e provaremos algumas de suas propriedades a partir da definição.

Definição 2.1. *Uma sequência* $(a_n)_{n\in D}$ *é dita uma progressão aritmética se existe alguma constante* r *tal que*

$$a_{k+1} - a_k = r, \tag{1}$$

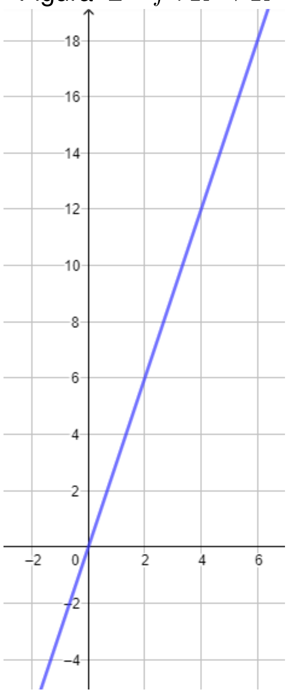
CC BY
NASCIMENTO, Érick Caetano Alves do; SILVA FILHO, Marcos Miguel da; TANAKA, Thiago Yukio; ARAÚJO, Jogli Gidel da Silva. Do termo geral à soma de Gauss: uma abordagem olímpica sobre progressões aritméticas. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 1, p. e3001, 3 de janeiro de 2023.
https://doi.org/10.35819/remat2022v9i1id5727.

para todo $k \in D$, onde D é um subconjunto de $\mathbb{N}$ e r é dita a razão da PA. Se $D = \mathbb{N}$, a progressão aritmética é infinita. Se $D = \{1, 2, ..., n\}$, a progressão aritmética é finita, com n termos.

Observação 2.2. *Ressaltamos que, na definição de PA acima, estamos considerando tanto as sequências finitas (com quantidade finita de termos) quanto sequências com infinitos termos.*

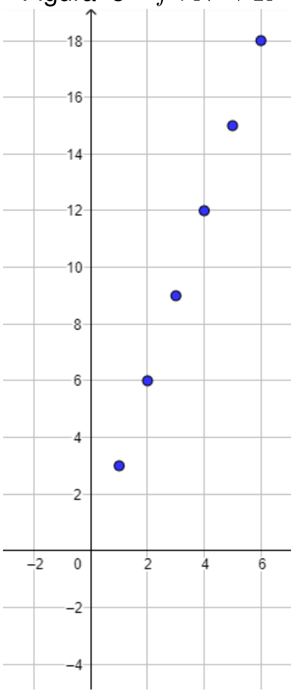
Já sabemos que uma sequência, em particular uma PA, é uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais (ou subconjunto dele). O curioso aqui é que, dada qualquer função polinomial de grau 1 (ou função afim) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, podemos encontrar uma PA a partir desta função fazendo a restrição $f|_{\mathbb{N}}$, onde denotaremos os termos da sequência por a_n e definiremos por $a_n = f(n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por exemplo, se tomarmos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x$, temos que $f|_{\mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética. Graficamente, temos (Figuras 2 e 3):

Figura 2 – $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Fonte: Elaboração dos autores.

Figura 3 – $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$



Fonte: Elaboração dos autores.

Nosso primeiro exemplo, relaciona conhecimentos de PA com Teoria dos Números e depende somente da definição da razão de uma PA. A questão foi selecionada do Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC-OBMEP), que convida participantes premiados da OBMEP a trabalhar com problemas matemáticos e oferece atividades ministradas por estudantes e professores universitários para ampliar o conhecimento científico dos participantes.

Exemplo 2.3 (PIC-OBMEP/2021)**.** *Podem os números $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ compor três termos consecutivos de uma progressão aritmética?*

Solução: Suponha, por absurdo, que $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ seja uma progressão aritmética. Dessa forma, existe uma razão r tal que

$$\sqrt{5} - \sqrt{3} = r = \sqrt{3} - \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{5} + \sqrt{2} = 2\sqrt{3}.$$

Elevando ambos os lados da última igualdade ao quadrado, obtemos

$$5 + 2\sqrt{5}\sqrt{2} + 2 = 4 \cdot 3 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\sqrt{10} = 12 - 7 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{10} = \frac{5}{2},$$

o que é um absurdo, uma vez que $\sqrt{10}$ é um número irracional. ■

Perceba que, até então, apresentamos uma PA apenas como uma sequência que respeita a condição (1). Isso significa que, para descobrir um a_{2022} de uma PA com primeiro termo $a_1 = 5 + \sqrt{3}$ e razão $r = -2 + 5\sqrt{3}$, precisaríamos ir somando a razão sucessivas vezes até chegar ao termo de posição 2022. Então, uma primeira pergunta que nos deparamos e que muitos de vocês sabem a resposta é: “Será que conseguimos determinar rapidamente o termo a_n em uma posição n qualquer desta sequência?”. A resposta é positiva e há duas maneiras. Sendo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma PA, então seu n-ésimo termo, a_n, pode ser obtido pela seguinte fórmula:

$$a_n = a_1 + (n-1)r, \tag{2}$$

em que a_1 é o primeiro termo e r é a razão da PA. Essa expressão é conhecida como *Fórmula do Termo Geral*. Outra maneira de encontrarmos o termo geral é conhecida por *Fórmula Generalizada do Termo Geral:*

$$a_n = a_k + (n-k)r, \tag{3}$$

com a_k sendo o k-ésimo termo ou termo da posição k. Em algumas circunstâncias, é favorável o uso de uma das duas fórmulas (2) ou (3), a primeira quando já tivermos o primeiro termo e a razão, e a segunda quando queremos estabelecer uma relação entre dois termos quaisquer da sequência. Tão importante quanto saber estas fórmulas iniciais é saber como encontrá-las. O procedimento que mostraremos a seguir é fundamental no estudo de sequências olímpicas e consiste no procedimento chamado *Somas Telescópicas*. Por definição, $a_k - a_{k-1} = r$ para todo $k \geq 2$. Assim, escrevendo

NASCIMENTO, Érick Caetano Alves do; SILVA FILHO, Marcos Miguel da; TANAKA, Thiago Yukio; ARAÚJO, Jogli Gidel da Silva. Do termo geral à soma de Gauss: uma abordagem olímpica sobre progressões aritméticas. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 1, p. e3001, 3 de janeiro de 2023. https://doi.org/10.35819/remat2022v9i1id5727.

todas as diferenças desde $a_n - a_{n-1}$ até $a_{k+1} - a_k$, vamos obter:

$$\begin{cases} a_n - a_{n-1} &= r, \\ a_{n-1} - a_{n-2} &= r, \\ \vdots & \vdots \ \vdots \\ a_{k+2} - a_{k+1} &= r, \\ a_{k+1} - a_k &= r. \end{cases}$$

É fácil ver que temos $(n-k)$ expressões acima, pois é a quantidade de termos entre a_{k+1} e a_n. Somando todas as equações, obtemos:

$$a_n \underbrace{-a_{n-1} + a_{n-1}}_{0} \underbrace{-a_{n-2} + a_{n-2}}_{0} - \dots \underbrace{-a_{k+2} + a_{k+2}}_{0} \underbrace{-a_{k+1} + a_{k+1}}_{0} - a_k = (n-k)r. \tag{4}$$

Perceba que, no somatório anterior, todos os termos intermediários se anulam e, portanto, do lado esquerdo da igualdade resta apenas $a_n - a_k$. Agora, somando a_k em ambos os lados da igualdade, obtemos a fórmula dada em (3). Para obtermos a fórmula em (2), basta fazer $k = 1$, pois isso equivale a repetir todo o processo anterior, desenvolvendo até a diferença $a_2 - a_1 = r$.

Somas como (4), em que os termos intermediários são cancelados, restando apenas o primeiro e último termo, são as citadas Somas Telescópicas. Faremos uso deste método novamente quando lidarmos com Progressões Aritméticas de segunda ordem.

Observação 2.4. *Agora que sabemos destas fórmulas, faremos uma observação interessante sobre o Exemplo 2.3. Na verdade, os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ não podem nunca pertencer a uma mesma PA e isso independe da posição desses números na sequência! Curioso, não? Suponha, por contradição, que exista uma tal PA com primeiro termo a_1, razão r e contendo $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ como termos dessa sequência. Dessa maneira, suponha que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ ocupam as posições $p+1$, $q+1$ e $s+1$ (adicionamos um apenas para facilitar os cálculos). Como os termos são distintos, então p, q e s também são distintos entre si. Pela expressão do termo geral,*

$$\begin{cases} \sqrt{2} = a_1 + pr, \\ \sqrt{3} = a_1 + qr, \\ \sqrt{5} = a_1 + sr. \end{cases} \tag{5}$$

Usando as duas primeiras equações de (5)*, podemos encontrar as expressões para a_1 e r em função de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, p e q*

$$r = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{q - p}, \quad a_1 = \sqrt{2} - p\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{q - p}. \tag{6}$$

NASCIMENTO, Érick Caetano Alves do; SILVA FILHO, Marcos Miguel da; TANAKA, Thiago Yukio; ARAÚJO, Jogli Gidel da Silva. Do termo geral à soma de Gauss: uma abordagem olímpica sobre progressões aritméticas. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 1, p. e3001, 3 de janeiro de 2023. https://doi.org/10.35819/remat2022v9i1id5727.

Combinando (6) *e a terceira equação de* (5)*,*

$$\begin{aligned}\sqrt{5} &= \sqrt{2} - p\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{q-p} + s\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{q-p} = \frac{\sqrt{2}(q-p) - p\sqrt{3} + p\sqrt{2} + s\sqrt{3} - s\sqrt{2}}{q-p} \\ &= \frac{\sqrt{2}q - p\sqrt{3} + s\sqrt{3} - s\sqrt{2}}{q-p} = \left(\frac{q-s}{q-p}\right)\sqrt{2} + \left(\frac{s-p}{q-p}\right)\sqrt{3},\end{aligned}$$

de onde concluímos que podemos escrever

$$\sqrt{5} = a\sqrt{2} + b\sqrt{3} \quad \textit{com} \quad a = \frac{q-s}{q-p} \quad \textit{e} \quad b = \frac{s-p}{q-p}. \tag{7}$$

Elevando a identidade (7) *ao quadrado e organizando a expressão, obtemos*

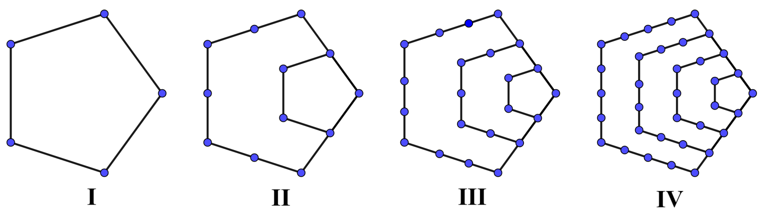
$$5 = 2a^2 + 2ab\sqrt{6} + 3b^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{6} = \frac{5 - 2a^2 - 3b^2}{2ab},$$

o que é um absurdo, pois escrevemos $\sqrt{6}$*, que é irracional, como quociente de números racionais.*

No contexto olímpico, uma questão que vai se utilizar da Fórmula do Termo Geral (2) pode aparecer de várias formas, algumas vezes mais diretamente e em outros momentos de forma que você necessita identificar que a questão se trata de uma PA, como é o caso do exemplo a seguir.

Exemplo 2.5 (Adaptado OBMEP, Banco de Questões, 1° ano do Ensino Médio, Módulo de Progressão Aritmética: Definição e Lei de Formação, Problema 5)**.** *A sequência dos números pentagonais está ilustrada na Figura 4:*

Figura 4 – Sequência pentagonal



Fonte: Elaboração dos autores.

Sendo a_1 *o número de pontos na borda externa do pentágono I,* a_2 *o número de pontos na borda externa do pentágono II e assim sucessivamente, determine quantos pontos possuem na borda externa do pentágono XX, isto é, determine* a_{20}*.*

Solução: Perceba que, em uma competição olímpica, não teríamos tempo hábil de resolver esta questão desenhando cada um dos pentágonos até chegarmos no XX e contar todos os pontos, sendo assim, desenvolveremos uma estratégia de contagem a qual veremos estar relacionada com

NASCIMENTO, Érick Caetano Alves do; SILVA FILHO, Marcos Miguel da; TANAKA, Thiago Yukio; ARAÚJO, Jogli Gidel da Silva. Do termo geral à soma de Gauss: uma abordagem olímpica sobre progressões aritméticas. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 1, p. e3001, 3 de janeiro de 2023. https://doi.org/10.35819/remat2022v9i1id5727.

uma PA. Contando os pontos da borda externa dos pentágonos presentes na Figura 4, vemos que $a_1 = 5, a_2 = 10$ e $a_3 = 15$. Essa construção tem um certo padrão; perceba que cada pentágono é construído através do seu antecessor, adicionando um ponto a cada borda externa, assim podemos notar que o número de pontos, em cada etapa, formam uma PA cuja razão é 5. Daí, sendo $a_1 = 5$ e $r = 5$, podemos encontrar facilmente o termo do pentágono XX que corresponde à vigésima posição. Assim, utilizando a fórmula (2):

$$a_{20} = 5 + (20 - 1)5 = 100.$$

■

É válido observar que, nesta questão, trabalhamos apenas com os pontos na borda externa da sequência dos pentágonos. Se considerarmos também os pontos internos na sequência, teríamos um outro tipo de regularidade, descrito em termos de uma PA de segunda ordem, tópico a ser discutido mais a frente. Ficará como Problema Complementar 12 descobrir o a_{20} considerando também os pontos internos.

O problema trabalhado a seguir foi selecionado da OME, que é a fase nacional da Espanha das Olimpíadas internacionais, isto é, os melhores classificados nessa prova podem representar a Espanha em competições internacionais. Perceba que, para solucionarmos o problema, iremos usar a Fórmula do Termo Geral (2).

Exemplo 2.6 (*OME*, 1994, Fase Nacional, Problema 1)**.** *Demonstre que se entre os infinitos termos de uma progressão aritmética de inteiros positivos existe um quadrado perfeito, então existem infinitos quadrados perfeitos na mesma progressão.*

Solução: Por hipótese, a PA é composta por termos positivos, assim podemos considerar $a_1 > 0$ o primeiro termo da PA e $r > 0$ sua razão. Como a PA contém um quadrado perfeito, considere $x > 0$ tal que x^2 é um termo da PA; dessa forma existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x^2 = a_1 + kr$. Note agora que

$$(x + r)^2 = x^2 + 2xr + r^2 = a_1 + kr + 2xr + r^2 = a_1 + (k + 2x + r)r.$$

Logo, encontramos um novo quadrado perfeito maior que x^2 que também pertence à mesma PA. Perceba que poderíamos afirmar que $(x + 2r)^2$ também pertence à PA, pois

$$(x + 2r)^2 = x^2 + 4xr + 4r^2 = a_1 + kr + 4xr + 4r^2 = a_1 + (k + 4x + 4r)r.$$

Analogamente, repetindo o mesmo argumento, podemos afirmar que a PA contém todos os termos do conjunto infinito $\{(x+nr)^2; n \in \mathbb{N}\}$, o que mostra que a PA contém uma infinidade de quadrados perfeitos. ■

No exemplo a seguir, selecionado de um material de Álgebra do projeto Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI) do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), vemos como a utilização da fórmula (3) pode ser eficiente.

Exemplo 2.7 (POTI, 2012, Álgebra, Nível 2, Aula 4, Problema 15)**.** *Em uma PA, temos* $a_p = q$ *e* $a_q = p$*, com* $p \neq q$*. Determine* a_1 *e* a_{p+q}*.*

Solução: Usando diretamente a Fórmula do Termo Generalizado (3)

$$a_p = a_q + (p-q)r.$$

Como $a_p = q$ e $a_q = p$, segue que

$$q = p + (p-q)r \quad \Rightarrow \quad q - p = (p-q)r \quad \Rightarrow \quad p - q = -(p-q)r \quad \Rightarrow \quad r = -\frac{p-q}{p-q} \quad \Rightarrow \quad r = -1.$$

Sendo $r = -1$ a razão, podemos utilizar novamente (3), usando a_p ou a_q (usaremos o primeiro), e obter

$$a_{p+q} = a_p + [(p+q) - p]r = q + q(-1) = 0.$$

Por fim, novamente por (3), utilizando a_p ou a_q (usaremos a_q)

$$a_1 = a_q + (1-q)r \quad \Rightarrow \quad a_1 = p + (1-q)(-1) \quad \Rightarrow \quad a_1 = p + q - 1.$$

■

Perceba que, no Exemplo 2.7, a utilização da Formula Generalizada do Termo Geral na primeira etapa nos permite encontrar rapidamente a razão e, em seguida, o termo a_{p+q}. Por outro lado, o uso da Fórmula do Termo Geral nos daria um sistema, representado pelas expansões de a_p e a_q.

3 A famosa Soma de Gauss

Quando estamos lidando com uma sequência, podemos nos questionar sobre o valor da soma de uma quantidade finita de seus termos. A critério de curiosidade, este problema torna-se verdadeiramente interessante quando somamos uma quantidade infinita de termos, que é o que conhecemos por convergência de séries numéricas. Para exemplificar, há o caso da soma dos infinitos termos de uma Progressão Geométrica (PG) cuja razão é um número que em valor absoluto é menor do que um, mas há diversos outros casos[2] de tais somatórios, os quais não abordaremos aqui. Essa questão é pertinente até mesmo no nosso dia a dia, como quando queremos saber o quanto nos deslocamos ao total de um mês durante uma sequência de corridas de bicicleta ao longo de uma semana ou mesmo em descobrir o montante total quando fazemos investimentos com aportes mensais. Problemas envolvendo a soma dos termos de uma PA são recorrentes em diversas olimpíadas. O resultado que nos permite calcular essas somas rapidamente é conhecido como *Soma de Gauss*.

Reza a lenda que Gauss, aos 10 anos de idade, para resolver um exercício proposto por sua professora, utilizou uma técnica que viria a ser exatamente o passo a passo da demonstração desse resultado: sua professora estaria, a princípio, ocupada querendo resolver algumas pendências durante a aula e pediu para que a turma encontrasse o valor da soma dos cem primeiros números naturais, $1+2+3+4+5+\ldots+98+99+100$, pois assim levariam um bom tempo ocupados em silêncio tentando resolver, mas em poucos minutos o menino Gauss deu sua resposta: 5050. A professora, incrédula pois havia gasto demasiado tempo procurando pela solução, perguntou ao jovem como ele chegou em tal resultado. Em sua resposta, ele afirmou que a soma do primeiro e último termo ou a soma de quaisquer dois termos equidistantes, como o segundo e o penúltimo, tinha sempre como resultado o número 101, e de 1 a 100 haviam 50 pares de somas desse tipo, dessa forma, o resultado seria igual a $50 \cdot 101 = 5050$. Para ficar claro que este procedimento funciona, usaremos o recurso da escrita matemática. Sendo S o valor de tal soma, vamos reescrever S de duas maneiras.

$$\begin{cases} S &= & 1 &+& 2 &+& \ldots &+& 99 &+& 100, \\ S &= & 100 &+& 99 &+& \ldots &+& 2 &+& 1. \end{cases}$$

[2]Em uma PG com primeiro termo a_1 e razão q satisfazendo $|q| < 1$, a soma dos infinitos termos denotada por S_∞ é dada por $S_\infty = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} + \ldots = \dfrac{a_1}{1-q}$. O número de Euler e número Pi (π) também podem ser expressos como somas infinitas, a saber $e = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{k!} + \dfrac{1}{(k+1)!} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \dfrac{1}{i!}$ e $\pi = 4 - \dfrac{4}{3} + \ldots + \dfrac{4}{2k-1} - \dfrac{4}{2k+1} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dfrac{4}{2i+1}$.

Como a soma dos termos alinhados é sempre igual a 101, e como há 100 termos em cada linha, segue que

$$2S = 101 \cdot 100 \quad \Rightarrow \quad S = \frac{101 \cdot 100}{2} = 101 \cdot 50 = 5050.$$

É visível que este procedimento engenhoso é muito menos trabalhoso do que o cálculo da soma inicial termo a termo. Sugerimos o Problema Complementar 1 para um melhor entendimento desta estratégia.

Antes de demonstrar o resultado principal, provaremos dois resultados auxiliares que tratam sobre soma de dois termos equidistantes.

Proposição 3.1. *Seja* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma PA de razão* r *com* $r \neq 0$*, então*

$$a_p + a_q = a_x + a_y \quad \Leftrightarrow \quad p + q = x + y.$$

Demonstração: Utilizando a Fórmula Generalizada do Termo Geral (3) para a_p em função de a_x e a_q em função de a_y, temos que

$$\begin{cases} a_p = a_x + (p - x)r, \\ a_q = a_y + (q - y)r. \end{cases}$$

Somando as duas linhas do sistema acima, obtemos

$$a_p + a_q = a_x + a_y + (p + q - x - y)r,$$

e daqui segue o resultado. ■

Segue imediatamente o seguinte corolário:

Corolário 3.2. *Seja* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma PA de razão* r *com* $r \neq 0$*, então vale que*

$$a_{1+k} + a_{n-k} = a_1 + a_n, \quad \forall\, k \geq 1 \text{ e } n > k.$$

Demonstração: Perceba que os índices satisfazem a relação

$$(1 + k) + (n - k) = 1 + n, \quad \forall k \geq 1 \text{ e } n > k.$$

O resultado segue então pela Proposição 3.1. ■

NASCIMENTO, Érick Caetano Alves do; SILVA FILHO, Marcos Miguel da; TANAKA, Thiago Yukio; ARAÚJO, Jogli Gidel da Silva. Do termo geral à soma de Gauss: uma abordagem olímpica sobre progressões aritméticas. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 1, p. e3001, 3 de janeiro de 2023. https://doi.org/10.35819/remat2022v9i1id5727.

Observação 3.3. *Esta propriedade descrita na Proposição 3.1 pode ser generalizada para uma maior quantidade de termos somados, mas obviamente não temos mais a noção de termos equidistantes. Por exemplo, utilizando a mesma ideia é possível mostrar que em uma PA de razão não nula,*

$$a_i + a_j + a_k = a_x + a_y + a_z,$$

desde que $i + j + k = x + y + z$.

Proposição 3.4 (Soma dos termos de uma PA ou Soma de Gauss)**.** *Dada* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma PA de razão* r *e seja*

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n,$$

a soma dos seus n *primeiros termos. Então, vale que*

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}. \tag{8}$$

Demonstração: Note que

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \tag{9}$$

e, inspirado na história da soma de Gauss, considere esta mesma soma na ordem invertida

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1. \tag{10}$$

Somando (9) e (10) e, em seguida, utilizando o Corolário 3.2, obtemos

$$\begin{aligned} 2S_n &= (a_1 + a_n) + \underbrace{(a_2 + a_{n-1})}_{=a_1+a_n} + \ldots + \underbrace{(a_{n-1} + a_2)}_{=a_1+a_n} + (a_n + a_1) \\ &= \underbrace{(a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n)}_{n \text{ vezes}} = n(a_1 + a_n), \end{aligned} \tag{11}$$

donde

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

■

As questões de Olimpíadas dificilmente vão pedir para calcular diretamente a soma dos n primeiros termos de uma PA, mas o conhecimento geral dessa soma pode acabar nos auxiliando na resolução dessas questões, como podemos ver no exemplo a seguir, selecionado de uma prova de nível 3 da OBM, que utiliza os conceitos de PA para solucionar um problema da Teoria dos Números.

Exemplo 3.5 (OBM, 2007, $1°$ fase, Nível 3, Problema 8)**.** *Qual dos inteiros positivos abaixo satisfaz a seguinte equação:*

$$\frac{4}{n^4} + \frac{5}{n^4} + \frac{6}{n^4} + \ldots + \frac{n^4 - 6}{n^4} + \frac{n^4 - 5}{n^4} + \frac{n^4 - 4}{n^4} = 309?$$

CC BY

(a) 2007 *(b)* 309 *(c)* 155 *(d)* 25 *(e)* 5

Solução: Tentar encontrar um inteiro n que satisfaça o que é pedido, de forma analítica, seria muito trabalhoso. Também não é aconselhável calcular esta soma diretamente para cada alternativa dada no enunciado, uma vez que n^4 seria um número grande e, consequentemente, haveriam muitas parcelas. Entretanto, utilizando os conhecimentos de soma de PA, podemos resolvê-la com menos trabalho e, consequentemente, em menos tempo, já que nas Olimpíadas o tempo é importante. Colocando $\frac{1}{n^4}$ em evidência na equação do enunciado, ficamos com:

$$\frac{1}{n^4}(4+5+6+\ldots+n^4-6+n^4-5+n^4-4)=309. \tag{12}$$

Percebemos que as parcelas da soma dentro dos parênteses formam uma PA $(4,5,6,\ldots,n^4-6,n^4-5,n^4-4)$ de razão $r=1$ com $a_1=4$. Considere q a quantidade de termos dessa PA, logo $a_q=n^4-4$. Então, por (2) temos

$$a_q=a_1+(q-1)r \quad \Rightarrow \quad n^4-4=4+(q-1) \quad \Rightarrow \quad n^4-7=q.$$

Além disso, da equação (12), utilizando a fórmula da soma (8) para os q termos dessa PA e o valor de q em função de n, obtemos

$$\frac{1}{n^4}S_q=\frac{1}{n^4}\frac{q(a_1+a_q)}{2}=309 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n^4}\frac{(n^4-7)(4+n^4-4)}{2}=309 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n^4}\frac{(n^4-7)n^4}{2}=309$$
$$\Rightarrow \quad n^4-7=618 \quad \Rightarrow \quad n=\sqrt[4]{625}=5.$$

A resposta correta é o item (*e*). ■

Questões olímpicas quase nunca serão solucionadas com a mera aplicação de uma fórmula, pois quase sempre envolvem diversos argumentos lógicos e dedutivos até que seja possível utilizá-la. Além disso, há questões que envolvem mais um de um conteúdo dentro da própria Matemática. Veremos no exemplo a seguir, selecionado do Banco de Questões da OBMEP, um problema que envolve a soma dos termos de uma PA e também o tema das desigualdades. O Banco de Questões da OBMEP e o Portal da OBMEP são fontes ricas em materiais contendo problemas olímpicos, suas soluções e material teórico para quem pretende participar das Olimpíadas.

Exemplo 3.6 (Portal da OBMEP, 2022, 1° ano do Ensino Médio, Módulo de Progressão Aritmética: Soma dos Termos de uma PA, Problema 12)**.** *Qual deve ser o número mínimo de termos consecutivos que devemos somar, a partir do primeiro, da sequência* $(-133,-126,-119,-112,\ldots)$ *para que a soma seja positiva?*

Solução: Note que $a_1 = -133$ e $r = 7$. Dessa forma, utilizando (2) e (8), temos que

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(-133 + (-133 + (n-1)7))}{2} = \frac{n(7n - 273)}{2}.$$

Daí, para $S_n > 0$ devemos ter $7n^2 - 273n > 0$, que é equivalente a $7n > 273$, e isso nos mostra que $n > 39$. Portanto, o menor inteiro positivo que satisfaz o que é pedido é $n = 40$. ■

Observação 3.7. *Uma curiosidade interessante que podemos extrair da fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PA (a_n) de razão r é a relação entre média aritmética e mediana*[3] *dos seus termos. Isso pode ser feito da seguinte forma: se n é ímpar, podemos escrevê-lo como $n = 2k + 1$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, logo $\frac{S_{2k+1}}{2k+1} = a_{k+1}$, onde a_{k+1} é a mediana e a fração a média aritmética desses termos. De fato, das equações* (3) *e* (8)*, temos*

$$\begin{aligned}\frac{S_{2k+1}}{2k+1} &= \frac{(2k+1)(a_1 + a_{2k+1})}{2(2k+1)} = \frac{(a_1 + a_{2k+1})}{2} = \frac{a_1 + a_1 + (2k+1-1)r}{2} = \frac{2a_1 + 2kr}{2} \\ &= a_1 + kr = a_{k+1}.\end{aligned}$$

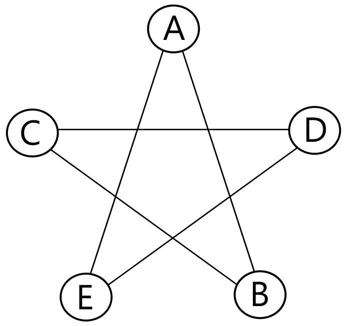
O caso para n par é um bom exercício para o leitor e se encontra proposto no Problema 3.

Faremos uso da fórmula provada na observação anterior para solucionar o problema a seguir, que foi selecionado da *American Mathematics Competitions* (AMC). A AMC é um programa da *Mathematical Association of America* (MAA) baseado em exames e materiais curriculares a fim de desenvolver, nos alunos do Ensino Fundamental e Médio, as habilidades de resolução de problemas e o conhecimento matemático necessário para alcançá-las. É também uma seletiva para a IMO.

Exemplo 3.8 (AMC, 2005, $10A$, Problema 17)**.** *Na estrela abaixo, as letras A, B, C, D e E serão trocadas pelos números 3, 5, 6, 7 e 9, não necessariamente nessa ordem. As somas dos números nos extremos dos segmentos AB, BC, CD, DE e EA formam uma PA, outra vez, não necessariamente nessa ordem. Qual o termo médio dessa PA?*

[3] *Valor central de uma sequência numérica ordenada. Se a sequência tiver uma quantidade ímpar de termos, a mediana é o termo central. Se tiver uma quantidade par, a mediana é a média aritmética dos dois termos centrais.*

Figura 5 – Estrela exemplificando a situação



Fonte: Elaboração dos autores.

Solução: Chame de a_m o termo médio (mediana) da sequência. Por hipótese, temos que $A+B, A+E, B+C, C+D, D+E$ estão em PA, não necessariamente nesta ordem. Perceba que tentar resolver de forma direta seria impraticável, uma vez que não sabemos a ordem em que os números estão. Contudo, pela observação 3.7, a_m pode ser encontrado por

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{A+B+A+E+B+C+C+D+D+E}{5} = \frac{2A+2B+2C+2D+2E}{5} \\ &= \frac{2(3+5+6+7+9)}{5} = \frac{60}{5} = 12. \end{aligned}$$

■

Um bom exercício seria tentar resolver este problema sem a utilização da Observação 3.7.

Na questão a seguir, selecionada da *International Mathematical Olympiad*, utilizamos os conhecimentos de aritmética modular. Caso o leitor não esteja familiarizado com o assunto, favor consultar Matos (2017).

Exemplo 3.9 (IMO, 1991, Primeiro Dia, Problema 2)**.** *Seja $n > 6$ um número inteiro positivo e seja $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ a sequência de todos os inteiros positivos menores que n que são relativamente primos com n. Prove que se a sequência $a_1, a_2, \ldots, a_k$ é uma progressão aritmética, então n é um número primo ou uma potência de 2.*

Solução: Primeiramente, note que $a_1 = 1$ e $a_k = n-1$, já que 1 e $n-1$ são inteiros positivos menores do que n, que são relativamente primos com n. Daí, considerando r a razão dessa progressão aritmética:

- Se $r = 1$, n é relativamente primo com $1, 2, \ldots, n-2, n-1$ daí, pelo sistema reduzido de resíduos, isto é equivalente a dizer que n é primo;

CC BY

NASCIMENTO, Érick Caetano Alves do; SILVA FILHO, Marcos Miguel da; TANAKA, Thiago Yukio; ARAÚJO, Jogli Gidel da Silva. Do termo geral à soma de Gauss: uma abordagem olímpica sobre progressões aritméticas. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 1, p. e3001, 3 de janeiro de 2023. https://doi.org/10.35819/remat2022v9i1id5727.

- Se $r = 2$, em particular, n é relativamente primo com todos os primos ímpares menores do que ele, ou seja, na decomposição primária de n aparece apenas o primo 2, logo n é uma potência de 2.

Considerando agora o caso $r \geq 3$, podemos notar que $a_1 = 1$ e $a_2 = 1 + r \geq 4$, daí é fácil ver que $3 \mid n$, já que não é relativamente primo com n. Utilizando a congruência módulo 3, temos:

1. $r \equiv 0 \bmod 3$. Como $n = 1 + a_k$, e pela fórmula do termo geral, $n = 1 + 1 + (k-1)r$, então $n \equiv 2 \bmod 3$, o que implica que n deixa resto 2 na divisão por 3, contrariando o fato de $3 \mid n$;
2. $r \equiv 1 \bmod 3$. Daí $a_3 = 1 + 2r \equiv 0 \bmod 3$, logo 3 é divisor comum de a_3 e n, contrariando o fato de a_3 ser relativamente primo com n;
3. $r \equiv 2 \bmod 3$. Então $a_2 = 1 + r \equiv 0 \bmod 3$, obtendo a mesma contradição do item anterior.

Desta forma, para todos os casos com $r \geq 3$, chegamos em uma contradição. Portanto $r = 1$ ou $r = 2$ e, consequentemente, n é primo ou potência de 2. ■

4 PAs dentro de PAs

A nível de curiosidade, vamos entrar agora no mundo das PAs de segunda ordem, que nada mais são do que sequências cujas diferenças dos seus termos consecutivos formam uma PA. O questionamento natural que podemos fazer é se existem fórmulas do termo geral e para a soma dos n primeiros de termos de uma PA de segunda ordem, assim como fizemos nas seções anteriores.

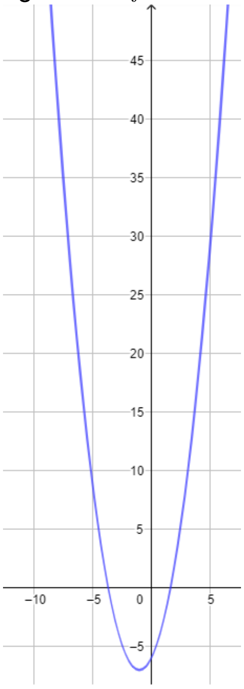
Definição 4.1 (Progressão Aritmética de Segunda Ordem). *Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência (a_n) na qual as diferenças $a_{n+1} - a_n$, entre cada termo e o termo anterior, formam uma progressão aritmética com razão não nula.*

Observação 4.2. *Assim como no caso das PAs, também podemos ver as PAs de segunda ordem como a restrição de uma função polinomial do segundo grau de números reais no conjunto dos números naturais. Por exemplo, tome a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + 2x - 6$ e considere $f|_{\mathbb{N}}$. Vemos que $f(1) = -3, f(2) = 2, f(3) = 9, f(4) = 18$ e assim por diante, e então, observando as primeiras diferenças, $f(2) - f(1) = 5, f(3) - f(2) = 7$ e $f(4) - f(3) = 9$, podemos perceber que estas diferenças formam uma PA, pois fazendo a diferença entre valores consecutivos obtidos acima (do maior para o menor) temos que $7 - 5 = 9 - 7 = 2$. Também seria verdade que $(f(n) - f(n -$*

NASCIMENTO, Érick Caetano Alves do; SILVA FILHO, Marcos Miguel da; TANAKA, Thiago Yukio; ARAÚJO, Jogli Gidel da Silva. Do termo geral à soma de Gauss: uma abordagem olímpica sobre progressões aritméticas. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 1, p. e3001, 3 de janeiro de 2023.
https://doi.org/10.35819/remat2022v9i1id5727.

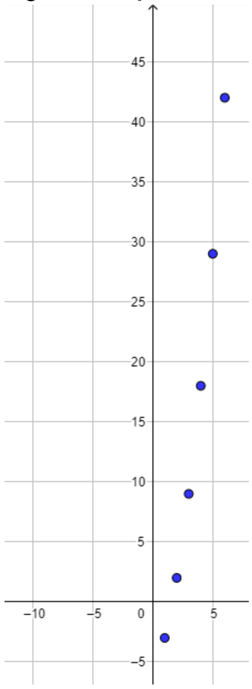
$1)) - (f(n-1) - f(n-2)) = 2$, para todo $n \geq 3$, o que garante que $f|_{\mathbb{N}}$ é de fato uma PA de segunda ordem. Graficamente, temos (Figuras 6 e 7):

Figura 6 – $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Fonte: Elaboração dos autores.

Figura 7 – $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$



Fonte: Elaboração dos autores.

Deixamos como um desafio para o leitor provar a propriedade mais geral para o fato apresentado na observação anterior: que a restrição de qualquer função quadrática ao conjunto dos números naturais define uma PA de segunda ordem. Isto pode ser visto no Problema 10.

Vamos agora buscar pelas fórmulas do termo geral e generalizado. Seja então (b_n) uma PA de segunda ordem. Dessa maneira, a sequência formada pelas diferenças sucessivas

$$(b_2 - b_1, b_3 - b_2, b_4 - b_3, \ldots, b_{k+1} - b_k, \ldots)$$

forma uma PA de primeira ordem (a_n) com $a_k = b_{k+1} - b_k$, cujo primeiro termo é $a_1 = b_2 - b_1$ e razão é r. Perceba que

$$\begin{cases} b_n - b_{n-1} & = & a_{n-1} = a_1 + (n-2)r, \\ b_{n-1} - b_{n-2} & = & a_{n-2} = a_1 + (n-3)r, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k+1} - b_k & = & a_k = a_1 + (k-1)r. \end{cases} \tag{13}$$

Das equações acima, podemos perceber três relações importantes (a terceira como consequência da segunda):

- Se a PA de segunda ordem é finita e tem n elementos, a PA (de primeira ordem) associada a ela terá $n-1$ elementos;

- Somando todas as equações de (13) e observando que a soma do lado esquerdo da igualdade é telescópica, obtemos

$$\begin{aligned} b_n - b_k &= a_k + a_{k+1} + \ldots + a_{n-1} = (a_1 + (k-1)r) + \ldots + (a_1 + (n-2)r) \\ &= (n-k)a_1 + [(k-1)r + kr + \ldots + (n-3)r + (n-2)r] \\ &= (n-k)a_1 + \frac{(n+k-3)(n-k)}{2}r, \end{aligned} \tag{14}$$

na qual, na última igualdade, utilizamos a soma de Gauss. Isolando b_n em (14), obtemos a *Fórmula Generalizada do Termo Geral da PA de Segunda Ordem*,

$$b_n = b_k + (n-k)a_1 + \frac{(n+k-3)(n-k)}{2}r. \tag{15}$$

Fazendo $k = 1$, obtemos a *Fórmula do Termo Geral da PA de Segunda Ordem*,

$$b_n = b_1 + (n-1)a_1 + \frac{(n-2)(n-1)}{2}r, \tag{16}$$

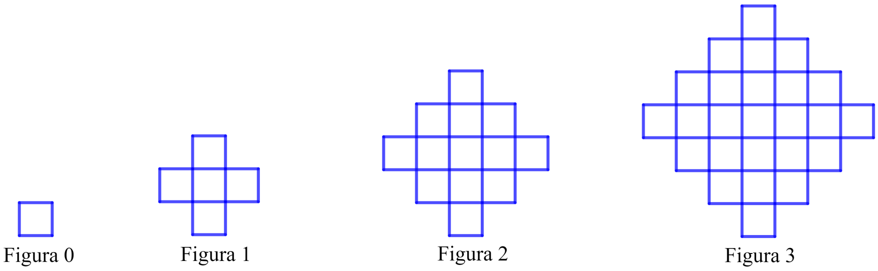
o que nos mostra que, para encontrar o termo geral da PA de segunda ordem, são necessários, além do primeiro termo b_1, o primeiro termo a_1 e a razão r da PA associada.

- Do item anterior, temos que o termo geral b_n de uma PA de ordem 2 pode ser expresso como uma função quadrática em n.

Podemos encontrar uma PA de segunda ordem em algumas questões vistas em diferentes olimpíadas matemáticas, onde pode ser necessário identificar se realmente é uma PA de segunda ordem, encontrar o termo desta PA, dentre outras situações.

Exemplo 4.3 (AMC, 2000, 10, Problema 12)**.** *As figuras* 0*,* 1*,* 2 *e* 3 *abaixo consistem de* 1*,* 5*,* 13 *e* 25 *quadrados não sobrepostos. Se esse padrão permanecer, qual deverá ser o número de quadrados da figura 100?*

Figura 8 – Sequência dos quadrados



Fonte: Elaboração dos autores.

(a) 10401 *(b)* 19801 *(c)* 20201 *(d)* 39801 *(e)* 40801

Solução: Primeiramente, note que $5-1=4$, $13-5=8$, $25-13=12$ e assim sucessivamente. Logo, o número de quadrados das figuras nos dão um indício de uma PA de segunda ordem, já que $4,\ 8,\ 12,\ldots$ é uma PA de primeira ordem de razão $r=4$. Iremos resolver este problema de duas maneiras.

A primeira maneira consiste em utilizar a expressão dada pela equação (16) para determinar o centésimo termo. Vamos denotar por (b_n) e (a_n) as PAs de segunda ordem e primeira ordem associada, respectivamente. Note que, diferente dos problemas anteriores, o índice inicial da figura é zero. Sendo assim, o termo b_n corresponde ao número de quadrados da figura $n-1$. Dessa forma, temos que $b_1=1$ e $a_1=r=4$. Portanto, devemos nos preocupar em calcular o b_{101} através da fórmula (16):

$$b_{101} = 1 + (101-1)4 + \frac{(101-2)(101-1)}{2}4 = 1 + 400 + 19800 = 20201.$$

A segunda maneira consiste em determinar a PA de segunda ordem através da função quadrática:

$$f(n) = an^2 + bn + c.$$

Aqui estamos assumindo como verdade o resultado do Problema 10. Do enunciado, temos que $f(0)=1$, o que implica diretamente que $c=1$. Daí, sendo $f(1)=5$ e $f(2)=13$, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a+b &= 4, \\ 4a+2b &= 12, \end{cases}$$

cuja solução é $a=b=2$. Portanto, a função quadrática é da forma $f(n)=2n^2+2n+1$ e, consequentemente, $f(100)=20000+200+1=20201$. A resposta é o item (*c*). ■

Seria inviável desenvolver a solução deste problema aplicando os resultados conhecidos nas progressões aritméticas ou geométricas. Tampouco seria possível solucionar atrasos de construções recorrentes até a figura 100. Dessa forma, apenas percebendo que trata-se de uma PA de segunda ordem e sabendo que seu termo geral se escreve como uma função quadrática, a resolução do problema se torna mais simples.

Observação 4.4. *É válido afirmar que, dada uma sequência, denotamos tal sequência uma Progressão Aritmética de Ordem n, quando a diferença de seus termos consecutivos formam uma nova*

PA de ordem $n-1$, que analogamente nos leva a uma PA de ordem $n-2$ e assim, sucessivamente, até obtermos uma PA da forma como comumente vemos. E assim, como comentado nos casos anteriores, também é possível obter PAs de ordem n a partir da restrição ao conjunto dos números naturais de funções polinomiais reais de grau n.

Neste ponto, já desenvolvemos as duas fórmulas para encontrar o termo geral de uma PA de segunda ordem. Podemos nos indagar se existe uma fórmula análoga para a Soma de Gauss considerando PAs de segunda ordem. Vamos em busca da resposta para este questionamento.

A fim de abordar diferentes tópicos presentes nas olimpíadas, vamos provar a soma de uma quantidade finita de termos de uma PA de segunda ordem através das propriedades de somatórios e de resultados conhecidos que podem ser provados por indução[4]. Este método de manipulação é famoso e bastante utilizado na resolução de problemas olímpicos; ver Silva (2015) para uma leitura complementar sobre indução.

Vimos em (16) que o termo geral de uma PA de segunda ordem (b_n), associada a uma PA de primeira ordem (a_n) com razão igual a r, pode ser expresso como:

$$b_n = b_1 + (n-1)a_1 + \frac{(n-2)(n-1)}{2}r.$$

Portanto, somando os k primeiros termos de ambos os lados, seguindo o sentido da igualdade, obtemos:

[4]A saber: $1+2+\ldots+n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$; e $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{k} b_n &= \sum_{n=1}^{k}\left(b_1+(n-1)a_1+\frac{(n-2)(n-1)}{2}r\right)\\
&= \sum_{n=1}^{k} b_1+\sum_{n=1}^{k}(n-1)a_1+\sum_{n=1}^{k}\frac{n^2-3n+2}{2}r\\
&= \sum_{n=1}^{k} b_1+a_1\sum_{n=1}^{k} n-\sum_{n=1}^{k} a_1+\left[\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k} n^2-\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{k} n+\sum_{n=1}^{k} 1\right]r\\
&= kb_1+a_1\frac{k(k+1)}{2}-ka_1+\left[\frac{k(k+1)(2k+1)}{12}-\frac{3k(k+1)}{4}+k\right]r\\
&= kb_1+\frac{k}{2}(a_1(k+1)-2a_1)+\left[\frac{k}{12}\left((k+1)(2k+1)-9(k+1)+12\right)\right]r\\
&= kb_1+\frac{k}{2}(a_1k-a_1)+\frac{rk}{12}\left[2k^2+3k+1-9k-9+12\right]\\
&= kb_1+\frac{a_1k(k-1)}{2}+\frac{rk}{6}(k^2-3k+2)\\
&= kb_1+\frac{a_1k(k-1)}{2}+\frac{rk}{6}(k-1)(k-2).
\end{aligned}
$$

Sugerimos os problemas complementares 9, 10 e 11, que abordam questões com PAs de segunda ordem.

5 Problemas Complementares

Esta seção é especial, pois propomos problemas olímpicos e outros, criados pelos autores, a respeito dos temas abordados nas seções anteriores a fim de dar continuidade aos estudos do leitor e servir como um pequeno banco de questões para auxiliar o professor em suas aulas.

Voltamos a ressaltar, como já dito na introdução, que a resolução de problemas como metodologia de ensino se mostra muito eficiente na construção dos conhecimentos para qualquer assunto matemático, o que é reforçado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) de Matemática (BRASIL, 1998). Na BNCC (BRASIL, 2018), a metodologia de resolução de problema é vista como um objeto e uma estratégia de aprendizagem durante o Ensino Fundamental, por isso é entendido como forma privilegiada na atividade matemática. O documento ainda aponta que:

> Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional (BRASIL, 2018, p. 266).

Dessa forma, é de fundamental importância que o leitor solucione os problemas propostos para uma maior contemplação do assunto.

Problema 1 (Elaboração dos autores)**.** *Encontre a soma dos n primeiros números naturais:*

(a) Pares *(b) Ímpares* *(c) Múltiplos de 5*

De duas maneiras:

(i) Por meio do processo dedutivo, utilizando o argumento da soma de termos equidistantes.

(ii) Utilizando a fórmula da Soma de Gauss.

Problema 2 (Adaptado de OBMEP, Banco de Questões, 1° ano do Ensino Médio, Módulo de Progressão Aritmética: Exercícios de Fixação, Problema 10)**.** *A soma dos primeiros termos de uma PA é dada por $S_n = 4n^2 - 2n$ com $n \in \mathbb{N}$. Qual o 10° termo dessa progressão?*

Problema 3 (Elaboração dos autores)**.** *Mostre que a relação entre a média aritmética e a mediana dos termos de uma PA (a_n) ainda é satisfeita quando a quantidade de termos é par. Isto é, dado algum $n = 2k$, mostre que*

$$\frac{S_{2k}}{2k} = \frac{a_k + a_{k+1}}{2}.$$

*(**Dica:** Siga as mesmas ideias do que fizemos no caso n ímpar).*

Problema 4. *(ThinkIIT), Se a, b, c estão em PA e $a - c = b$, encontre o valor de a em função de b.*

Problema 5. *(ThinkIIT) Se a, A_1, A_2, b estão em PA, então encontre $\dfrac{A_1}{A_2}$.*

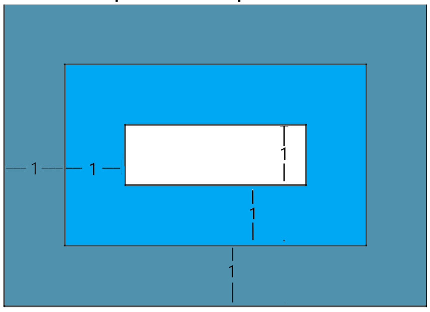
Problema 6 (Adaptado de OBMEP, Banco de Questões, 1° ano do Ensino Médio, Módulo de Progressão Aritmética: Definição e Lei de Formação, Problema 11)**.** *Na progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$, sabe-se que $a_2 + a_5 = 9$ e $a_5 - a_3 = 16$. Então, quanto vale $\dfrac{a_5}{a_2}$?*

Problema 7 (PIC-OBMEP/2021)**.** *Quantos são os inteiros positivos que estão entre 1 e 1000 e que são múltiplos de 2 e de 3 simultaneamente, e qual é a soma destes números?*

Problema 8 (Adaptado de PIC-OBMEP/2021)**.** *Considere uma função afim, $f(x) = ax + b$, e uma progressão aritmética (x_n). Mostre que $(f(x_n))$ também é uma progressão aritmética.*

Problema 9 (AMC, 2016, $10A$, Problema 10)**.** *Um tapete foi confeccionado de acordo com a figura abaixo. As três áreas de cores diferentes está em PA. O retângulo interno tem 1 metro de largura e cada uma das duas regiões sombreadas tem 1 metro de largura em todos os quatro lados. Qual é o comprimento em metros do retângulo menor?*

Figura 9 – Tapete exemplificando a situação



Fonte: Elaboração dos autores.

Problema 10 (Elaboração dos autores). *Considere uma função polinomial do segundo grau* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = ax^2 + bx + c$. *Prove, por indução, que* $f|_{\mathbb{N}}$, *ou seja,* $(f(n))$ *com* $n \in \mathbb{N}$ *é uma progressão aritmética de segunda ordem.*

Problema 11 (Elaboração dos autores). *Considere uma função polinomial do segundo grau* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *e uma progressão aritmética* $x_n = x_1 + (n-1)r$. *Mostre que* $(f(x_n))$ *é uma progressão aritmética de segunda ordem. (Generalização do problema 10.)*

Problema 12 (Elaboração dos autores). *Considere a construção desenvolvida no Exemplo 2.5.*

(a) *Considerando tanto os pontos externos quanto os pontos internos, determine o número de pontos no pentágono XX. (**Dica:** Note que os pontos em cada etapa possuem uma regularidade.)*

(b) *Suponha que você utilizou feijões para montar um esquema dos pentágonos em cada uma das etapas. Quantos feijões você utilizou para montar todos os pentágonos desde a etapa I até a etapa XX?*

Problema 13 (Elaboração dos autores). *Sejam* (c_n) *uma PA de primeira ordem com razão* s *e* (b_n) *uma PA de segunda ordem cuja PA de primeira ordem associada,* (a_n), *tem razão* r. *Prove que a sequência* (d_n), *definida por* $d_k = b_k + c_k, k \geq 1$, *também é uma PA de segunda ordem. Explicite* d_1 *e a razão da PA de primeira ordem associada a* (d_n).

6 Considerações Finais

Neste trabalho, abordamos os principais tópicos a respeito das Progressões Aritméticas por meio de problemas olímpicos. Trabalhamos com os conceitos iniciais da teoria, como a Fórmula do Termo Geral de uma PA, dados o termo inicial e a razão, e a Fórmula Generalizada do Termo Geral, que relaciona quaisquer dois termos distintos de uma PA de razão r. Também foi vista a Fórmula

CC BY

Geral da Soma dos primeiros termos de uma PA, a famosa Soma de Gauss. Por fim, passamos pelas PAs de segunda ordem, cujas diferenças de seus termos consecutivos formam uma PA de razão r, e, então, foram vistas versões análogas das Fórmulas do Termo Geral e da Soma para as PAs de segunda ordem. Todos esses conceitos foram associados com questões olímpicas nacionais e internacionais, a fim de exemplificar como essas competições abordam o assunto, deixando claro, em cada uma das soluções, a importância dos tópicos apresentados anteriormente.

Vimos a importância de trabalhar com problemas matemáticos como metodologia de ensino e apoiamos todo o conteúdo em volta das soluções desses problemas. Além disso, através das pesquisas citadas anteriormente, incentivamos e percebemos o quão importante é a participação das escolas nas Olimpíadas Matemáticas, pois, além de encontrar novos nomes para a Matemática, melhora o rendimento escolar dos alunos, não apenas na Matemática como também em outras disciplinas, e, consequentemente, aumenta as notas das escolas nos sistemas nacionais de avaliação.

Esperamos que o trabalho sirva de material teórico, uma referência de ensino e pesquisa para estudantes e professores que desejam trabalhar as PAs em um contexto olímpico ou baseado na metodologia de resolução de problemas. Por isso, criamos uma seção com problemas complementares para reforçar os estudos dos tópicos apresentados no trabalho.

Referências

AMC. **American Mathematics Competitions**. Disponível em: `https://www.maa.org/math-competitions`. Acesso em: 5 dez. 2020.

ARAUJO, Orlando de; MONSORES, Jomar Ferreira. Educação e competição: a OBMEP como fatorde aprimoramento do ensinoda Matemática. **Caleidoscópio**, Guarulhos, SP, v. 9, n. 1, p. 51-61, 2017. Disponível em: `https://ojs.eniac.com.br/index.php/Anais/article/view/484`. Acesso em: 2 dez. 2022.

BELLUCK, Pam. Math Puzzles'Oldest Ancestors Took Form on Egyptian Papyrus. **The New York Times**, 6 dez. 2010. Disponível em: `https://www.nytimes.com/2010/12/07/science/07first.html`. Acesso em: 25 out. 2021.

BIONDI, Roberta Loboda; VASCONCELLOS, Lígia; MENEZES-FILHO, Naércio Aquino. Avaliando o impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) no desempenho de matemática nas avaliações educacionais. *In*: ENCONTRO BRASILEIRO DE ECONOMETRIA, 31., Foz do Iguaçu, PR, 2009. **Anais** [...]. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Econometria, 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: `http://basenacionalcomum.mec.gov.br`. Acesso em: 28 dez. 2022.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 28 dez. 2022.

CARVALHO, César Augusto Sverberi. **O aluno do ensino médio e a criação de uma fórmula para o termo geral da progressão aritmética**. 2008. 254 f. Orientadora: Silvia Dias Alcântara Machado. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008. Disponível em: https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/11321. Acesso em: 2 dez. 2022.

DIÓGENES, Rafael Jorge Pontes; LIMA, Erika Joyce Silva. Progressões Aritméticas de Ordem Superior e Recorrências Lineares. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 6, n. 1, p. 1-12, 2020. DOI: https://doi.org/10.35819/remat2020v6i1id3700.

IMO. International Mathematical Olympiad. **Problems**. Disponível em: http://www.imo-official.org/problems.aspx. Acesso em: 17 nov. 2020.

LEITE, Angelita de Souza; ARAUJO, Maria Cristina Souza de. Resolução de problemas X metodologia de ensino: como trabalhar matemática a partir da resolução de problemas. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais** [...]. São Paulo: SBEM, 2010.

LIMA, Valéria Scomparim de; SILVA, Acácio Reis da; CÔA, Alexandre; CARRARA, Ariane; FURLAN, Carla Roberta; GRANDINO, Edi Francisco; ASSARICE, Fernando Spessotto; ALONSO, Gilson A. Saldibas; TAVARES, Márcia Cristina; NATAL, Nathália Garcia; PIMENTA, Patrícia Gomes; RIZZO, Paulo Rogério. Progressões Aritméticas e Geométricas: história, conceitos e aplicações. **Intellectus Revista Acadêmica Digital**, Jaguariúna, SP, v. 2, p. 34-68, jan.-jul. 2004. Disponível em : http://www.revistaintellectus.com.br/artigos/2.12.pdf. Acesso em: 4 dez. 2022.

MAROSKI, Marcelo Wachter. Termo geral de uma progressão aritmética de k-ésima ordem. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 3, n. 2, p. 116-123, 2017. DOI: https://doi.org/10.35819/remat2017v3i2id2410.

MATOS, Jair da Silva. **Aritmética e Aplicações**. Orientador: Nilomar Vieira de Oliveira. 2017. 59 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2017. Disponível em: https://tede.ufam.edu.br/handle/tede/6123. Acesso em: 2 dez. 2022.

OBM. Olimpíada Brasileira de Matemática. **Provas e Gabaritos**. Disponível em: https://www.obm.org.br/como-se-preparar/provas-e-gabaritos. Acesso em: 17 nov. 2020.

OBMEP. Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. **Banco de Questões**. Disponível em: http://www.obmep.org.br/banco.htm. Acesso em: 25 nov. 2020.

OBMEP. Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. **Portal da OBMEP**: Módulos de Ensino. Disponível em: https://portaldaobmep.impa.br. Acesso em: 20 nov. 2020.

OME. Olimpiada Matemática Española. **Problemas propuestos y resultados**. Disponível em: http://www.olimpiadamatematica.es/platea.pntic.mec.es/_csanchez/olimprab.htm. Acesso em: 5 dez. 2020.

POTI. Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo. **Recorrências**. Disponível em: https://poti.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=21. Acesso em: 18 nov. 2020.

SILVA, Bruno Thiago da. **Indução matemática: discussão teórica e uma proposta de ensino**. Orientador: Marcelo Gomes Pereira. 2015. 98f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2015. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/handle/123456789/19744. Acesso em: 4 dez. 2022.

SOUZA, Douglas Nobre; AMARO, Diana Terezinha. Impactos do treinamento olímpico matemático a alunos da educação básica: um relato de experiência. *In*: CONGRESSO DE EXTENSÃO, 5., MOSTRA DE ARTE E CULTURA, 4., 2017, Cubatão, SP. **Anais** [...]. Cubatão: IFSP, 2017. Disponível em: http://ocs.ifsp.edu.br/index.php/vi-conemac/ivconemac/paper/viewFile/3425/594. Acesso em: 28 dez. 2022.

THINKIIT. Pre-Foundation. Class 10. **Arithmetic Progression**. Disponível em: https://www.thinkiit.in/ntse-and-olympiad-question-bank/english/class-10/mathematics/all/arithmetic-progression. Acesso em: 9 set. 2021.

VARGAS, Claudia Vieira de. **O ensino e a aprendizagem da progressão aritmética através da resolução de problemas**. Orientadora: Fabiane Cristina Hopner Noguti. 2019. 138 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2019. Disponível em: https://repositorio.ufsm.br/handle/1/18987. Acesso em: 28 dez. 2022.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) no projeto Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI), Polo Recife.