Equações diofantinas e alocação otimizada de recursos financeiros de pequenos investidores no mercado acionário brasileiro

Diophantine equations and optimal financial resources allocation of small investors on the Brazilian stock market

Ronie Peterson Dario[1]
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Curitiba, PR, Brasil
https://orcid.org/0000-0002-9064-5421, http://lattes.cnpq.br/1655126205943070

Resumo: Este trabalho tem como resultado principal a proposição de um método de cálculo para alocações de recursos financeiros em uma carteira de investimentos composta por ações de duas empresas listadas na bolsa de valores (B3). O objetivo principal é obter a plena utilização dos recursos disponíveis, de forma a otimizar o processo para pequenos investidores. Para tal fim, é utilizada a Teoria Elementar dos Números. Em especial, são úteis os resultados básicos acerca das equações diofantinas lineares de duas variáveis.

Palavras-chave: Mercado Acionário; Teoria Elementar dos Números; Educação Financeira; Equações Diofantinas Lineares.

Abstract: The main result of this work is to propose a method of calculation for allocation of financial resources in an investment portfolio composed of shares of two companies listed on the stock exchange (B3). The main objective is the full use of available resources in order to optimize the process for small investors. For this purpose, the Elementary Theory of Numbers applies. In particular, the basic results of the linear Diophantine equations in two variables are helpful.

Keywords: Stock Market; Elementary Number Theory; Financial Education; Linear Diophantine Equations.

Data de submissão: 13 de janeiro de 2022.

Data de aprovação: 4 de abril de 2022.

1 Introdução

De acordo com o Relatório sobre Pessoa Física (B3, 2021) da bolsa de valores (B3), no segundo trimestre de 2021, o número de investidores pessoa física atingiu 3,8 milhões. Boa parte deste número é composta por pequenos investidores que, naturalmente, investem em um pequeno número de ativos. De fato, no mesmo relatório consta que 15% dessas contas têm no máximo dois

[1] **Currículo sucinto**: Licenciado em Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), mestre em Matemática pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), doutorado em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). **Contato**: ronie@utfpr.edu.br.

títulos (*tickers*) em carteira. Ainda, no mês de junho de 2021, dos 104 mil novos participantes do mercado, a mediana do valor inicialmente investido foi de R$ 352,00.

O advento de corretoras que não cobram taxas de corretagem na compra ou venda de ações beneficia diretamente pequenos investidores, pois reduz substancialmente os custos das operações no mercado fracionário, ambiente de negociação no qual se pode comprar até mesmo uma única ação de uma empresa.

Um outro aspecto que certamente beneficia esse público é a utilização total, ou da maior parte possível, dos recursos disponíveis para investimento. Basta observar que se uma carteira de investimentos possui valor total próximo à referida mediana de R$ 352,00 e não estão alocados R$ 30,00, então já há 8,52% do capital parado.

Percentuais elevados e não investidos do capital podem surgir devido à não divisibilidade das ações no mercado brasileiro. De fato, em mercados acionários mais desenvolvidos, como no caso dos Estados Unidos, é possível comprar pequenas frações de ações, de forma a utilizar todo o capital disponível (BONANI, 2020). Já no caso do Brasil, só é possível alocar o capital em um número inteiro de ações, o qual será positivo na posição comprada, ou negativo no caso da posição vendida. Isso tudo já assumindo a negociação no mercado fracionário, dado que no mercado integral a quantidade de títulos negociados deve ser um múltiplo de 100. Para resolver esse problema, não se pode contar com a clássica Teoria das Carteiras (*Portfolio Theory*) (CAPINSKI; ZASTAWNIAK, 2006). Por conveniência na execução dos cálculos ou no desenvolvimento de algoritmos, tal teoria estabelece hipóteses iniciais restritivas. Uma delas refere-se à natureza do número de ações ou títulos que compõem uma carteira. A hipótese da divisibilidade (*Assumption* 1.3 de Capinski e Zastawniak (2006)) diz que tal número pode ser um número real qualquer, e isto não é muito realista, ao menos no mercado brasileiro.

Assim, mostra-se útil desenvolver uma ferramenta que ao mesmo tempo determine os valores exatos da alocação total, assim como o número de ações de cada empresa a ser comprado, facilitando a tomada de decisão sobre o valor disponível para o investimento, no sentido de minimizar valores não alocados, apenas por meio da escolha mais acertada da quantidade de títulos a ser negociada. Nosso objetivo neste trabalho é estabelecer a teoria necessária para tal ferramenta.

Vamos nos restringir a posições compradas, dado que não é muito aderente ao contexto deste trabalho, analisar carteiras que permitam vendas a descoberto (posições vendidas). Não excluímos da nossa análise os *Brazilian Depositary Receipts* (BDRs), ativos por meio dos quais é possível negociar, na B3, ações de empresas estrangeiras.

Utilizaremos a Teoria Elementar dos Números (HEFEZ, 2014; SANTOS, 2020), especialmente no contexto das equações diofantinas lineares (EDLs) em duas variáveis. Na segunda seção, lembramos resultados básicos de EDLs sobre o conjunto dos números inteiros e também sobre o conjunto dos números naturais. Os dois contextos serão necessários para determinar soluções do **Problema de Alocação** exposto na terceira seção. A solução minimal deste problema, quando existente, pode ser utilizada como alocação ótima de acordo com os objetivos desejados. É também na terceira seção que expomos detalhadamente o método proposto e mostramos aplicações.

Embora não seja o foco deste trabalho, o fato de o mesmo ter uma abordagem relativamente simples pode facilitar sua utilização em aplicações ao ensino de matemática ou à educação financeira, de maneira geral. A teoria de equações diofantinas, da forma como é explorada aqui, está sendo bastante difundida entre professores da rede pública de ensino de Matemática, por meio do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, viabilizado pela Sociedade Brasileira de Matemática – SBM.

Por fim, cabe citar que não encontramos literatura voltada ao mercado acionário brasileiro abordando o assunto principal deste trabalho. E, como já citado, o problema não faz sentido em mercados mais desenvolvidos, dificultando a busca por mais referências.

2 Sobre equações diofantinas lineares em duas variáveis

Seguimos nesta seção a notação do Capítulo 6 do livro de Hefez (2014), referência que pode ser utilizada para os detalhes aqui omitidos. Denotamos por $\mathbb{N}$ o conjunto $\{0, 1, 2, ...\}$ dos números naturais e por $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros.

2.1 EDLs sobre o conjunto dos números inteiros

Uma **equação diofantina linear** (EDL) em duas variáveis sobre o conjunto dos números inteiros tem a forma:

$$aX + bY = c, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Uma solução da Equação 1 é um par (x, y) composto por números inteiros tais que $ax+by = c$. Seja $D(s)$ o conjunto dos divisores positivos de um número inteiro s. Vamos denotar por $d = \mathrm{mdc}(a, b)$ o **máximo divisor comum** de a e b, isto é, $d = \max\Big(D(a) \cap D(b)\Big)$.

A existência de soluções para a Equação 1 depende da relação de divisibilidade entre d e os coeficientes a e b, conforme o Teorema 2.1, a seguir, obtido das Proposições 6.1 e 6.2 de Hefez (2014). No enunciado do teorema, observe que, se vale a hipótese da divisibilidade de c pelo máximo divisor comum entre os coeficientes, então a Equação 1 possui infinitas soluções, uma para cada número inteiro.

Teorema 2.1. *Sejam* a, b *e* c *números inteiros e* $d = \mathrm{mdc}(a, b)$. *A Equação 1 admite solução em* $\mathbb{Z}$ *se, e somente se,* d *divide* c. *Assumindo que* $d = 1$ *e que* (x_0, y_0) *é uma solução particular de (1), então um par* (x, y) *de números inteiros é uma solução de (1) se, e somente se, é da forma*

$$\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at \end{cases}, \ \textit{para } t \in \mathbb{Z}.$$

Por exemplo, a equação $12X+20Y = 52$ possui soluções inteiras, pois $4 = \mathrm{mdc}(12, 20)$ e este número divide 52. Dividindo ambos os lados da Equação por 4, obtemos a equação equivalente (isto é, com o mesmo conjunto solução) $3X + 5Y = 13$. Observe que $3(-4) + 5 \cdot 5 = 13$, ou seja, o par $(-4, 5)$ é uma solução inteira. Pelo Teorema 2.1, todas as soluções são pares (x, y) tais que $x = -4 + 5t$ e $y = 5 - 3t$, com $t \in \mathbb{Z}$.

Neste caso, chegamos à solução particular $(-4, 5)$ da equação $12X + 20Y = 52$ de forma direta, por simples inspeção. É claro que isso pode ser inviável para equações mais complicadas. Para isso, há um método eficaz que envolve o Algoritmo de Euclides, conforme Hefez (2014, p. 89). Considerando novamente a Equação 1, assumindo que o mdc entre a e b divide c e que $a \leq b$, o passo inicial do método consiste em realizar sucessivamente as divisões euclidianas:

$$b = aq_1 + r_1,\ a = r_1q_2 + r_2,\ r_1 = r_2q_3 + r_3,\ \ldots \tag{2}$$

onde os números q_i e r_i, $i = 1, 2, \ldots$, são números inteiros que representam, respectivamente, os quocientes e os restos nas divisões, as quais seguem até que se obtenha um resto r_n igual a $d = \mathrm{mdc}(a, b)$. Na sequência, são feitas as substituições partindo de d e obtêm-se a solução particular multiplicando o resultado por c_0, tal que $dc_0 = c$. O método é análogo se $a \geq b$. Neste caso, a primeira divisão teria a forma $a = bq_1 + r_1$.

DARIO, Ronie Peterson. Equações diofantinas e alocação otimizada de recursos financeiros de pequenos investidores no mercado acionário brasileiro. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 8, n. 1, p. e3007, 30 de junho de 2022. https://doi.org/10.35819/remat2022v8i1id5674.

Aplicando o método ao caso da equação $12X + 20Y = 52$, temos somente duas divisões ($n = 2$), pois $20 = 12{\cdot}1+8$, $12 = 8{\cdot}1+4$ e $4 = \mathrm{mdc}(12, 20)$. Agora, $4 = 12-8 = 12-(20-12) = 12{\cdot}2+20(-1)$. Multiplicando os dois lados da última igualdade por $c_0 = 13$, obtemos $52 = 12 \cdot 26 + 20(-13)$, ou seja, o par $(26, -13)$ é a solução particular obtida utilizando-se o Algoritmo de Euclides.

Finalmente, é interessante observar que o par $(1, 2)$ é também uma solução particular de $12X+20Y = 52$. De fato, é a única solução formada unicamente por números naturais. Na sequência veremos as condições para a existência deste tipo de solução.

2.2 EDLs sobre o conjunto do números naturais

Nesta seção vamos estudar equações da mesma forma já abordada, mas com a restrição de que os coeficientes, termo independente e as soluções são sempre números naturais. Isto é importante para o método que será proposto na seção seguinte, pois esta abordagem corresponderá às alocações somente em posições compradas. Desta forma, vamos buscar as soluções naturais da equação:

$$aX + bY = c, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\}. \tag{3}$$

Vamos começar por listar todos os números naturais positivos c tais que $aX + bY = c$ tenha solução natural. É claro que tais números correspondem aos elementos não nulos do conjunto $S(a, b) = \{ax+by \in \mathbb{N} \mid x, y \in \mathbb{N}\}$, o qual é denominado de **semigrupo** gerado por a e b. Seja $\mathcal{L}(a, b)$ o complementar deste semigrupo em $\mathbb{N}^*$, isto é, $\mathbb{N}^* = S(a, b) \cup \mathcal{L}(a, b)$ e esta união é disjunta. Este último conjunto recebe o nome de **conjunto das lacunas** do semigrupo $S(a, b)$ e possui uma descrição precisa, obtida do Corolário 6.6 de Hefez (2014), como

$$\mathcal{L}(a, b) = \Big\{am - bn \in \mathbb{N}^* \mid m, n \in \mathbb{N}^* \text{ e } m < b\Big\},$$

o que torna natural o enunciado do seguinte teorema:

Teorema 2.2. *Sejam* a, b *e* c *números inteiros positivos e suponha* $1 = \mathrm{mdc}(a, b)$. *A Equação 3 admite solução em números naturais, se, e somente se,* $c \notin \mathcal{L}(a, b)$.

A demonstração completa pode ser encontrada em Hefez (2014), Teorema 6.7.

Vejamos o exemplo da equação $3X+5Y = c$, para a qual temos $1 = \mathrm{mdc}(3, 5)$. O conjunto das lacunas é dado por $\mathcal{L}(3, 5) = \{3m-5n \in \mathbb{N}^* \mid m, n \in \mathbb{N}^* \text{ e } m < 5\}$, ou seja, todos os números naturais

DARIO, Ronie Peterson. Equações diofantinas e alocação otimizada de recursos financeiros de pequenos investidores no mercado acionário brasileiro. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 8, n. 1, p. e3007, 30 de junho de 2022. https://doi.org/10.35819/remat2022v8i1id5674.

da forma $3 - 5n$, $6 - 5n$, $9 - 5n$ ou $12 - 5n$, com $n \in \mathbb{N}^*$, donde se conclui que $\mathcal{L}(3,5) = \{1,2,4,7\}$. Assim, tal equação admite soluções naturais para qualquer c diferente de 1, 2, 4 e 7.

Nas condições do Teorema 2.2, se $c \notin \mathcal{L}(a,b)$, então a Equação 3 admite uma única solução (x_0, y_0) tal que $x_0 < b$, a qual é denominada **solução minimal**. Conforme a Proposição 6.9 de Hefez (2014), o conjunto de todas as soluções é dado pelas fórmulas:

$$x = x_0 + bt \text{ e } y = y_0 - at, \quad \text{com } t = 0, 1, \ldots, \left[\frac{y_0}{a}\right] \tag{4}$$

onde $\left[\frac{y_0}{a}\right]$ é a parte inteira de $\frac{y_0}{a}$.

No caso da equação $3X + 5Y = 13$, a solução minimal é $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. Esta será a única solução natural, pois a parte inteira de $2/3$ é $t = 0$.

3 Método para alocação otimizada do capital

Nesta seção apresentamos um método para alocação otimizada de um capital a ser investido em uma carteira composta por duas ações de empresas listadas na B3. Trataremos somente de posições compradas e assumiremos que a negociação possa ser feita no mercado fracionário.

A partir de um certo montante M disponível para alocar na carteira, o investidor deve tomar uma decisão baseada nos preços de mercado das duas ações. As possíveis alocações vão produzir valores cuja diferença para M pode ser relativamente grande, levando-se em conta que M pode ser tipicamente um valor pequeno, conforme exposto na Introdução. Visando otimizar o processo e a melhor utilização dos recursos normalmente escassos, é útil que exista um método eficiente para que ele saiba *a priori* quais valores podem ser investidos com exatidão e quantas ações de cada empresa ele deve comprar para este fim. Nosso objetivo é determinar eficientemente estes valores e alocações a partir da teoria de equações diofantinas explorada na seção anterior.

Vamos denotar por X o número de ações da empresa 1 e por Y o número de ações da empresa 2. Como não vamos considerar vendas a descoberto, os valores de X e Y serão sempre números inteiros positivos. A cotação de mercado destas ações será representada pelos números a e b, respectivamente. Desta forma, o **valor da carteira** será dado por c, tal que

$$aX + bY = c. \tag{5}$$

Uma **alocação** para esta carteira será uma solução desta equação, ou seja, um par (x, y) de números inteiros tal que $ax + by = c$. Buscaremos por **alocações positivas**, isto é, aquelas em que x e y são positivos. Se ao menos um deles fosse negativo, teríamos o correspondente à posições vendidas (vendas a descoberto), que não é nosso foco. Tendo definido os termos, visamos resolver o problema abaixo, com uma restrição natural.

Problema de Alocação: Dado um intervalo finito de valores (em reais), iniciado no valor r, determinar os valores exatos passíveis de investimento neste intervalo, assim como as possíveis alocações positivas, visando minimizar o valor não investido.

Hipótese A: O valor da carteira deve ser suficiente para permitir ao menos uma alocação exata não nula, isto é, o intervalo iniciado em r deve conter ao menos um número da forma $ax + by$, com $x, y \in \mathbb{N}^*$. O valor mínimo para a escolha de r deve ser suficiente para comprar uma ação da empresa 1 e uma ação da empresa 2, ou seja, $a + b$.

Inicialmente observamos que a Equação 5 não é uma equação diofantina, dado que as cotações estão representadas em reais. Por esta razão, passamos a considerar a nova equação:

$$100aX + 100bY = 100c, \tag{6}$$

que simplesmente significa que estamos tomando os preços expressos somente em centavos, em vez de reais e centavos.

Seja $d = \mathrm{mdc}(100a, 100b)$, conforme definido na Seção 2. De acordo com o Teorema 2.1, a existência de soluções para (6) depende de d dividir 100c. Observe que a **Hipótese A** garante que existe ao menos um valor c no intervalo de valores tal que d divida 100c.

Agora, o Teorema 2.1 garante que a Equação 6 admite (infinitas) soluções em $\mathbb{Z}$, cada uma representando uma alocação distinta do capital a ser investido. Contudo, dado que não estamos considerando vendas a descoberto, precisamos excluir os valores 100c para os quais (6) não possua soluções somente em números naturais. Para isso, passamos a considerar a equação diofantina:

$$\frac{100a}{d}X + \frac{100b}{d}Y = \frac{100c}{d}, \tag{7}$$

para a qual o máximo divisor comum entre os coeficientes é igual a 1, conforme o Corolário 5.9 de Hefez (2014), e teremos do Teorema 2.2 que a Equação 7 admite solução em $\mathbb{N}$ quando

$$\frac{100c}{d} \notin \mathcal{L} = \left\{ \frac{100a}{d}m - \frac{100b}{d}n \in \mathbb{N}^* \mid m, n \in \mathbb{N}^* \text{ e } m < \frac{100b}{d} \right\}, \tag{8}$$

ou equivalentemente, $100c \notin d\mathcal{L} = \{dt \mid t \in \mathcal{L}\}$. Desta forma, das soluções encontradas anteriormente para a Equação 6, excluímos aquelas em que $100c \in d\mathcal{L}$ e teremos a lista dos valores de carteiras, para os quais há soluções (alocações) naturais. Na sequência, determinamos tais alocações utilizando as fórmulas em (4).

Para facilitar aplicações e/ou implementações computacionais, resumiremos o método passo a passo.

Suponha que um investimento em duas ações será realizado com um valor total c, o qual pertence a um intervalo de valores iniciado em r.

(I) Listamos os valores c do intervalo, para os quais $d = \text{mdc}(100a, 100b)$ divida 100c. Haverá ao menos um, de acordo com a **Hipótese A**.

(II) Excluímos dos valores obtidos no passo I os valores c tais que $\frac{100c}{d}$ pertence ao conjunto das lacunas, conforme (8).

(III) Determinamos as soluções correspondentes aos valores c que sobraram após o passo (II).

Vejamos um exemplo: suponha que um investidor queira alocar entre R$ 500,00 e R$ 1.000,00 nas duas empresas que acredita serem boas escolhas: a fabricante de motores elétricos WEG S.A. e a cervejaria AMBEV S.A. Em 20 de novembro de 2020, ABEV3F esteve cotada a R$ 14,40 e WEGE3F estava R$ 80,00. Conforme (6), inicialmente consideramos a equação diofantina $8.000X + 1.440Y = 100c$, a qual é equivalente a:

$$800X + 144Y = 10c, \tag{9}$$

onde c é o valor total do investimento, com $500 \leq c \leq 1.000$. Temos que $d = \text{mdc}(800, 144) = 16$, pois $800 = 16 \cdot 50$, $144 = 16 \cdot 9$ e $\text{mdc}(16, 9) = 1$. Pelo Teorema 2.1, para que exista solução é preciso que 16 divida 10c. Como $5.000 \leq 10c \leq 10.000$, para que esta divisão ocorra, precisamos que 10c pertença ao conjunto:

$$A = \Big\{5.008,\ 5.024,\ \dots,\ 9.984,\ 10.000\Big\},$$

ou seja, tenha a forma $5.008 + 16k$, com $k = 0, \dots, 312$. Portanto, para todo c na lista

$$500{,}80 \quad 502{,}40 \quad \dots \quad 566{,}40 \quad 568{,}00 \quad 569{,}60 \quad \dots \quad 998{,}40 \quad 1.000{,}00 \tag{10}$$

a Equação 9 admite solução em números inteiros. Para garantir que as soluções não possuam valores negativos, precisamos excluir desta lista aqueles valores de c que correspondam a elementos do conjunto das lacunas, conforme o passo II. Para isso, consideramos a nova equação

$$50X + 9Y = \frac{10}{16}c,$$

pois agora o mdc entre os coeficientes é 1. Precisamos que 10c não pertença a $16\mathcal{L}(50, 9)$, onde

$$\mathcal{L}(50, 9) = \{50\text{m} - 9\text{n} \in \mathbb{N}^* \mid \text{m}, \text{n} \in \mathbb{N}^*, \text{m} < 9\}.$$

Novamente utilizando que $500 \leq \text{c} \leq 1.000$, temos $312,50 \leq \frac{10}{16}\text{c} \leq 625$. Note que podemos então restringir m somente aos valores 7 e 8. Assim, dentro do conjunto das lacunas, só nos interessam os subconjuntos

$$\Big\{391, 382, 373, 364, 355, 346, 337, 328, 319\Big\} \text{ e } \Big\{341, 332, 323\Big\},$$

que correspondem a m = 8 e m = 7, respectivamente. Multiplicando cada um destes valores por $16/10$, obtemos as listas

625,60 611,20 596,80 582,40 568,00 553,60 539,20 524,80 510,40

545,60 531,20 516,80

que correspondem ao conjunto dos valores c no intervalo dado para os quais a Equação 9 não tem solução em $\mathbb{N}$. Note que o único destes valores que, quando multiplicado por 10, tem a forma 5.008 + 16k é 568,00. Conforme o passo II, este valor deve ser excluído da lista em (10), restando assim os seguintes valores que podem ser investidos com exatidão

500,80 502,40 ... 566,40 569,60 ... 998,40 1.000,00. (11)

Finalmente, para o passo III, podemos determinar as alocações correspondentes aos valores da lista (11). Isto pode ser feito utilizando diretamente o Algoritmo de Euclides (2), juntamente com as equações em (4). Por exemplo, para o primeiro dos valores, temos a equação

$$800X + 144Y = 5008,$$

que por sua vez, é equivalente a 50X + 9Y = 313. Agora, seguindo as divisões conforme (2), temos

$$50 = 9 \cdot 5 + 5, \ 9 = 5 + 4 \ \text{ e } 5 = 4 + 1.$$

Substituindo os valores a partir da última expressão obtemos $1 = 5 - 4 = 5 - (9 - 5) = 5 \cdot 2 + 9(-1) = (50 - 9 \cdot 5)2 + 9(-1) = 50 \cdot 2 + 9(-11)$. Multiplicando por 313 a expressão resultante, temos $313 = 50 \cdot 626 + 9(-3443)$, o que nos dá a solução inteira $(626, -3443)$. Para chegarmos a uma solução natural, dividimos 626 por 9 e obtemos $313 = 50(69 \cdot 9 + 5) + 9(-3443')$. Reagrupando, temos $313 = 50 \cdot 5 + 9 \cdot 7$, ou seja, obtemos uma solução em $\mathbb{N}^*$, dada por $x_0 = 5$ e $y_0 = 7$. Note que pelo Teorema 2.2, esta será a única solução em números naturais. Portanto, comprar 5 ações de WEG e 7 ações de AMBEV será então a única alocação positiva possível associada ao valor de R$ 500,80. Aplicando o mesmo processo ao valor 998,40, obtemos a alocação $x_0 = 6$ e $y_0 = 36$.

4 Conclusões

O propósito deste trabalho foi o de apresentar uma ferramenta que permita a um investidor da bolsa de valores brasileira determinar a alocação em uma carteira com duas ações de forma a aproveitar totalmente, ou o mais próximo possível, o capital disponível. Isto é particularmente importante e aplicável para carteiras de investimento de boa parte dos investidores iniciantes no mercado.

O método exposto nos passos I, II e III fornece uma forma simples de alcançar os objetivos almejados. É assumido que não há custos de corretagem na compra de ações, o que é aderente à realidade do mercado, pois diversas corretoras oferecem esta possibilidade. Contudo, não foram considerados os custos da própria B3. Isto pode ser feito adequando os preços de entrada nas ações, para montar as equações diofantinas já levando em conta este aspecto. Tal ajuste pode ser feito em uma implementação computacional, que permitiria a efetiva utilização do método.

Poderia também ser implementado o cálculo (simples) do menor valor possível a restar na carteira, a partir de um valor fornecido inicialmente, a ser comparado com os valores exatos fornecidos pelo método.

Finalmente, o problema aqui abordado não faz sentido em mercados acionários mais desenvolvidos, como o mercado norte-americano, pois é possível comprar pequenas frações de ações. Possivelmente, este é o motivo de não encontrarmos estudos nesta linha.

Referências

B3 S.A. – Brasil, Bolsa, Balcão. **Relatório sobre pessoa física – 1º Semestre de 2021**. Disponível em: `www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/servicos-de-dados/market-data/consultas/mercado-a-vista/perfil-pessoas-fisicas/perfil-pessoa-fisica`.

Acesso em: 31 mar. 2022.

BONANI, Breno. **3 Coisas Que Você Precisa Saber Sobre o Mercado Americano**. Investing.com, 7 mar. 2020. Disponível em: https://br.investing.com/analysis/3-coisas-que-voce-precisa-saber-sobre-o-mercado-americano-200433893. Acesso em: 31 mar. 2022.

CAPINSKI, M.; ZASTAWNIAK, T. **Mathematics for finance**: an introduction to financial engineering. Londres: Springer, 2006.

HEFEZ, A. **Aritmética**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

SANTOS, J. P. O. **Introdução à Teoria dos Números**. Rio de Janeiro: SBM, 2020.