



# Método de Euler na solução da equação de Verhulst aplicado ao crescimento de fungos

## Euler's Method to solve the Verhulst equation applied to fungal growth

## Método de Euler en la solución de la ecuación de Verhulst aplicada al crecimiento de los hongos



Rafael Zanovelo Perin<sup>1</sup>

Universidade Federal de Pelotas (UFPeL), Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática (PPGMMat), Capão do Leão, RS, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-7671-8372>,  <http://lattes.cnpq.br/4184347921178166>

Sandra Denise Stroschein<sup>2</sup>

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), *Campus* Bento Gonçalves, Bento Gonçalves, RS, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0003-3292-2491>,  <http://lattes.cnpq.br/6578005314329814>

**Resumo:** A modelagem matemática possibilita diversas contribuições para o desenvolvimento da sociedade, colaborando com avanços científicos e tecnológicos. A partir de modelos representam-se fenômenos reais, como é o caso da cinética de crescimento de fungos. Neste trabalho é utilizada a equação de Verhulst, que caracteriza o crescimento de uma população até a capacidade máxima do meio, resolvendo-a numericamente pelo Método de Euler, de um e dois estágios. A metodologia é validada por meio da comparação entre a solução numérica e a analítica, disponível na literatura. O modelo de Verhulst é aplicado considerando alguns parâmetros experimentais, viabilizando a determinação da solução numérica da equação, em um e dois estágios. Os resultados simulados apresentaram correspondência com a solução analítica, havendo um menor erro relativo entre as soluções com o método de dois estágios. Com isso, podem ser adotados outros métodos em trabalhos futuros, visando minimizar o erro. E, tem-se a possibilidade de empregar o método de Euler em modelos mais complexos, visto que nem sempre a solução exata é conhecida.

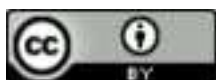
**Palavras-chave:** Crescimento Logístico; Doenças de Tronco em Videiras; Método de Euler; Método de Euler Modificado.

**Abstract:** Mathematical modeling enables several contributions to development of society collaborating with

---

<sup>1</sup>**Currículo sucinto:** Licenciado em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, *Campus* Bento Gonçalves, mestre em Modelagem Matemática pela Universidade Federal de Pelotas, Professor de Matemática na Rede Municipal de Bento Gonçalves. **Contribuição de autoria:** Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação, Metodologia, Desenvolvimento de Algoritmo, Validação. **Contato:** rafael-perin@hotmail.com.

<sup>2</sup>**Currículo sucinto:** Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Santa Maria, mestre em Matemática Aplicada pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, professora de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, *Campus* Bento Gonçalves. **Contribuição de autoria:** Escrita – Revisão e Edição. **Contato:** sandra.stroschein@bento.ifrs.edu.br.



scientific and technological advances. Through models, real phenomena are represented as is the case of fungal growth kinetics. This work uses the Verhulst equation, which characterizes the growth of a population up to the maximum capacity of the medium, solving it numerically by the one and two-stage Euler Method. The methodology is validated by comparing numerical and analytical solution available in the literature. The Verhulst model is applied considering some experimental parameters, which makes possible to determine the numerical solution of the equation in one and two stages. The simulated results presented a correspondence with the analytical solution with a smaller relative error between the solutions with the two-stage method. Thus, other methods can be adopted in future works aiming to minimize the error. Additionally, there is the possibility of employing the Euler method in more complex models since the exact solution is not always known.

**Keywords:** Logistic Growth; Trunk Diseases in Grapevines; Euler Method; Modified Euler Method.

**Resumen:** La modelización matemática permite realizar diversas aportaciones al desarrollo de la sociedad, colaborando con los avances científicos y tecnológicos. A partir de diferentes modelos, se representan fenómenos reales; como es el caso de la cinética de crecimiento de los hongos. En este trabajo se utiliza la ecuación de Verhulst, la cual se caracteriza por el crecimiento de una población hasta su capacidad máxima del medio; resolviéndola numéricamente por el Método de Euler, de una y dos etapas. La metodología se valida comparando la solución numérica y analítica disponible en la literatura. El modelo de Verhulst se aplica considerando algunos parámetros experimentales, lo que le permite determinar la solución numérica de la ecuación en una y dos etapas. Los resultados simulados presentaron correspondencia con la solución analítica, con un error relativo menor entre las soluciones con el método de dos etapas. Por lo tanto, se pueden adoptar otros métodos en futuros trabajos, con el objetivo de minimizar el error. Además, existe la posibilidad de emplear el método de Euler en modelos más complejos, ya que no siempre se conoce la solución exacta.

**Palabras clave:** Crecimiento Logístico; Enfermedades del Tronco de la Vid; Método Euler; Método Euler Modificado.

**Data de submissão:** 11 de outubro de 2021.

**Data de aprovação:** 26 de novembro de 2021.

## 1 Introdução

O desempenho da produção vitivinícola interfere diretamente na economia e na organização de diversas regiões, as quais têm o cultivo da videira como referência. À medida que perdas na produção prejudicam a comunidade em geral, tem-se o interesse comum em desenvolver e aprimorar a área, tendo a pesquisa científica como uma ferramenta (ALMANÇA; LERIN; CAVALCANTI, 2015).



As doenças da videira apresentam-se contrárias ao sucesso econômico das regiões produtoras, como é o caso da incidência de fungos, uma vez que promovem o declínio das plantações. Anteriormente ao combate de pragas é preciso analisar o seu desenvolvimento, como foi feito por Perin *et al.* (2019), uma vez que considera-se o fator de crescimento tão importante (ÚRBEZ-TORRES *et al.*, 2006).

O presente trabalho versa sobre a modelagem matemática do crescimento de fungos causadores de doenças de tronco em videiras, uma vez que ocasionam a redução da capacidade produtiva das plantas. A solução da equação diferencial ordinária (EDO) de crescimento logístico possibilita a projeção de cenários de crescimento de fungos, contribuindo no conhecimento sobre esta característica.

Neste trabalho será proposta a solução numérica da equação de Verhulst, a qual possui solução analítica para comparação, similar ao feito por Rodrigues e Hauser (2014). Faz-se a verificação da aproximação numérica pelo Método de Euler e Euler Modificado, a fim de evidenciar o melhoramento no método devido a ordem de precisão (JUSTO *et al.*, 2020). Assim, propicia-se a possibilidade de utilização do método numérico validado em modelos mais complexos, cuja solução analítica ainda não é conhecida.

## 2 O Modelo de Crescimento Populacional

A modelagem matemática possibilita a denotação do crescimento fúngico na forma de uma equação diferencial, visto que se caracteriza por uma equação em que as incógnitas são funções e envolvem-se derivadas destas funções. Com isso, a solução de uma equação diferencial consegue estimar dados futuros e sistematizar o comportamento relativo à variação entre grandezas.

Dentre os diversos modelos já existentes tem-se a Dinâmica Populacional, a qual permite descrevermos a variação na quantidade dos indivíduos de uma determinada população ( $P$ ) de forma constante, como apresentado por Boyce e Diprima (1985). Assim, o crescimento populacional é dado pela variação da população inicial ( $P_0$ ) em determinado tempo ( $t$ ), ou seja, a taxa de variação da população é proporcional ao produto da população existente pela taxa de crescimento ( $r$ ), conforme a equação:

$$\frac{dP}{dt} = r \cdot P, \quad (1)$$

também conhecida como Equação de Malthus.



A solução da Equação 1 pode ser obtida por meio do Método de Separação de Variáveis, resultando na forma geral:

$$P(t) = C \cdot e^{r \cdot t}$$

em que  $C$  é constante.

Se utilizarmos o Problema de Valor Inicial (PVI) referente à população no tempo inicial, ou seja,  $P(0) = P_0$ . Assim, temos que a solução da equação de Malthus é:

$$P(t) = P_0 \cdot e^{r \cdot t}.$$

O surgimento de condições especiais no crescimento da população requer uma adaptação na equação dada, de forma a adequar-se ao evento. Tal fator acontece, conforme Zill (2011, p. 98), visto que “[...] casos reais de crescimento exponencial por um longo período são difíceis de encontrar, pois os recursos limitados do meio ambiente vão em algum momento restringir o crescimento da população”. A partir disso há um acréscimo no modelo exponencial de Malthus, passando a considerar a variação da população em dado tempo em ambiente com capacidade de sustentação. Ou seja, a população cresce até um limite máximo imposto pelo meio, o qual denominamos de capacidade de suporte ( $k$ ).

Para isso, segundo Boyce e Diprima (1985), propõe-se uma função  $f(P) = r - a \cdot P$ , de modo que  $f(P) \approx r > 0$  quando  $P$  for pequeno,  $f(P)$  decresça conforme  $P$  cresce e  $f(P) < 0$  quando  $P$  tender à capacidade suporte. Assim, substitui-se a função em (1):

$$\frac{dP}{dt} = (r - a \cdot P) \cdot P,$$

onde  $a$  é uma constante positiva.

A equação logística é convenientemente escrita na forma:

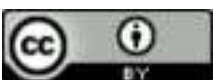
$$\frac{dP}{dt} = r \cdot P \cdot \left(1 - \frac{P}{k}\right),$$

com  $k = \frac{r}{a}$ . Ou ainda:

$$\frac{dP}{dt} - r \cdot P = -\frac{r \cdot P^2}{k}. \quad (2)$$

A Equação 2, não linear, também é conhecida como equação de Verhulst, sendo caracterizada como Equação de Bernoulli<sup>1</sup>. A solução analítica de Verhulst pode ser obtida por Separação de

<sup>1</sup>Equação diferencial não-linear mais importante, da forma  $\frac{dy}{dt} + p(t) \cdot y = y^n \cdot (t)$ , com  $n > 1$ .



Variáveis, além do Método de Bernoulli, devido as suas características. Se optarmos pelo primeiro faz-se necessária a utilização de frações parciais para a integração da equação, enquanto o outro irá demandar uma mudança de variável. E assim, obtém-se a solução geral:

$$P(t) = \frac{k}{1 + C \cdot k \cdot e^{-r \cdot t}}$$

Se utilizado o PVI,  $P(0) = P_0$ , em conjunto com manipulações algébricas, obtemos a solução analítica:

$$P(t) = \frac{P_0 \cdot k}{P_0 + (k - P_0) \cdot e^{-r \cdot t}} \quad (3)$$

Com isto, podemos modelar matematicamente o crescimento de uma colônia fúngica em qualquer tempo.

### 3 Metodologia

Os pressupostos apresentados enunciam a capacidade de representar o crescimento populacional por meio de um modelo matemático, a partir de uma EDO. A equação de Verhulst possui sua solução analítica conhecida, definida na Equação 3, sendo válida para todo tempo. No entanto, nem todos os modelos conhecidos possuem solução analítica disponível na literatura ou de fácil desenvolvimento, sendo mais viável uma aproximação numérica.

Neste trabalho propõe-se a obtenção da solução da equação logística por meio de um método numérico, fazendo-se uso do *software* Scilab<sup>2</sup> para o desenvolvimento dos cálculos, a fim de compará-la com a solução analítica por meio do erro relativo. Uma vez que Perin *et al.* (2019) verificaram o modelo logístico para o crescimento de fungos a partir de eventos experimentais, a solução exata verifica a aproximação numérica para um dado PVI.

Ao aplicarmos um método numérico é necessário discretizar a variável contínua, a fim de obtermos pontos onde será calculada a solução. Atkinson, Han e Stewart (2009) apresentam diferentes métodos numéricos para a resolução de EDOs, os quais podem ser explícitos ou implícitos, além de passo simples ou passos múltiplos, conforme a utilização de um ou mais pontos para realizar as aproximações.

<sup>2</sup>Disponível em: <https://www.scilab.org>.



### 3.1 Método de Euler

Um dos métodos numéricos para a solução de PVI de EDOs mais simples é o Método de Euler, também conhecido como Método da Reta Tangente. De acordo com Atkinson, Han e Stewart (2009), o PVI é dado por:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (4)$$

cuja malha é dada por  $t_n = t_0 + n \cdot h$ , com  $n = 0, 1, 2, \dots, m$ , onde  $h$  é o espaçamento de malha e  $m$  o número de subdivisões, sendo  $m = \frac{b-a}{h}$ , no intervalo  $[t_0, t_m]$ .

Considerando uma aproximação para a derivada por uma equação de diferenças, temos:

$$y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h}.$$

Aplicando a aproximação em (4), obtemos:

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} = f(t, y(t))$$

e, isolando  $y(t+h)$  e reescrevendo:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n), \quad (5)$$

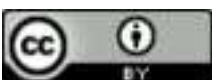
na qual  $t = t_n$  e  $y = y_n$ .

Na prática usa-se a condição inicial para inicializar as aproximações, calculando a solução numérica  $y_n$  a partir de  $y_0$ . Ainda, a análise de erro do método pode ser vista em Atkinson, Han e Stewart (2009), juntamente com a interpretação geométrica do método, que relaciona-se com a reta tangente.

### 3.2 Método de Euler Modificado

A partir do Método de Euler desenvolveu-se o Método de Euler Modificado, também conhecido como Método de Heun (DE MENDON *et al.*, 2018). Pela modificação calcula-se a aproximação pela média aritmética das inclinações  $f(t_n, y_n)$  e  $f(t_{n+1}, y_{n+1})$ , utilizando duas derivadas visando uma aproximação mais razoável (ATKINSON; HAN; STEWART, 2009). Assim, com dois estágios, temos:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \cdot (f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})).$$

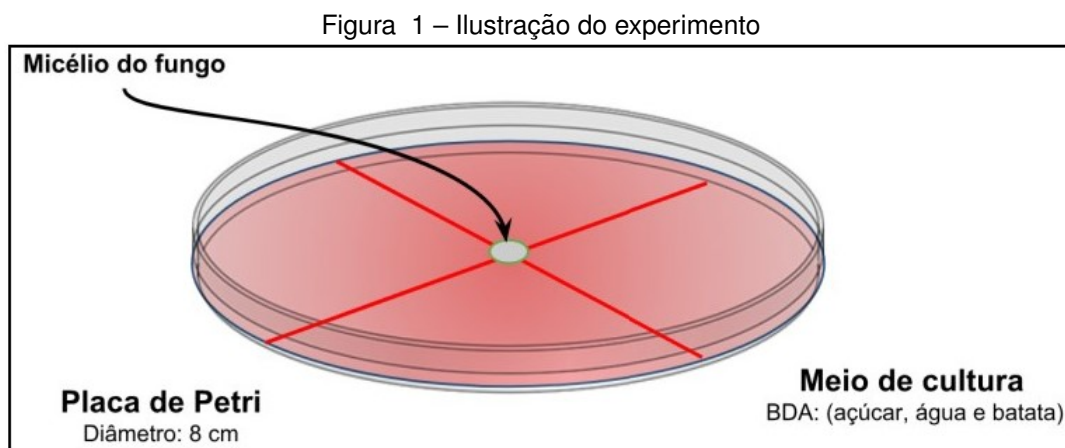


Os termos em relação a  $n + 1$  podem ser reescritos evitando um método implícito, de modo que:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \cdot (f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_n + h \cdot f(t_n, y_n))). \tag{6}$$

#### 4 Desenvolvimento

Com os pressupostos apresentados acerca da modelagem de crescimento populacional e dos métodos de solução, faz-se a aplicação da matemática em um fenômeno real. Para isso, considera-se a pesquisa de Perin *et al.* (2019), visto que os autores propuseram a reprodução laboratorial e o registro do crescimento de uma colônia fúngica em placas de Petri, conforme a Figura 1.



Fonte: Perin *et al.* (2019, p. 5).

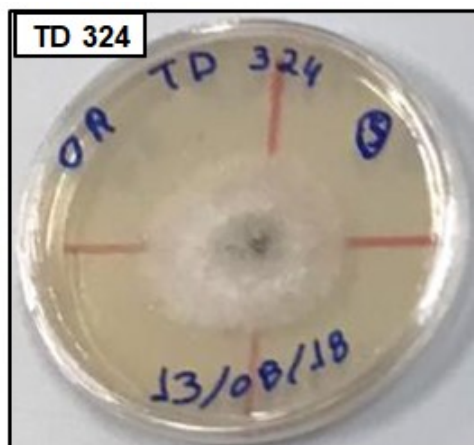
O experimento desenvolveu-se em laboratório com placas contendo o micélio do fungo, como na Figura 2, as quais foram mantidas em câmara de crescimento a 26°C, com meio de cultura BDA (batata, dextrose e ágar), além de estarem submetidas à fotoperíodo e medições de 12 horas. Sendo assim, foram extraídos os dados experimentais de Perin *et al.* (2019), referentes ao fungo *Botryosphaeria dothidea* (*B. dothidea*), do exemplar nomeado como TD 324.

A atividade experimental é fundamental para a aplicação do modelo, uma vez que a equação contém a taxa de crescimento do fungo. Perin *et al.* (2019) ajustaram os dados laboratoriais a uma equação do segundo grau, por meio do Método dos Mínimos Quadrados, de modo que obteve-se a taxa de crescimento do fungo *B. dothidea* ( $r$ ) igual a  $0,69506\text{cm}/h$ , considerando uma população inicial ( $P_0$ ) de  $0,3\text{cm}$  e capacidade de suporte do meio ( $k$ ) de  $8,0\text{cm}$ . Assim, temos o PVI:

$$\begin{cases} y'(t) = 0,69506 \cdot P - \frac{0,69506}{8} \cdot P^2 \\ y(0) = 0,3 \end{cases} \tag{7}$$



Figura 2 – Crescimento do fungo após dois dias



Fonte: Perin *et al.* (2019, p. 6).

Uma análise qualitativa do comportamento das soluções da Equação 7 é feita por meio do campo de direções, apresentado por Perin *et al.* (2019). A proposição do conjunto de soluções mostra que elas convergem para a solução de equilíbrio do sistema, visto que  $y(t \rightarrow \infty) = k$ . Ou seja, o crescimento da população tende a estabilizar-se na capacidade de suporte do meio quando  $t \rightarrow \infty$ , possuindo uma única solução dado o PVI (7).

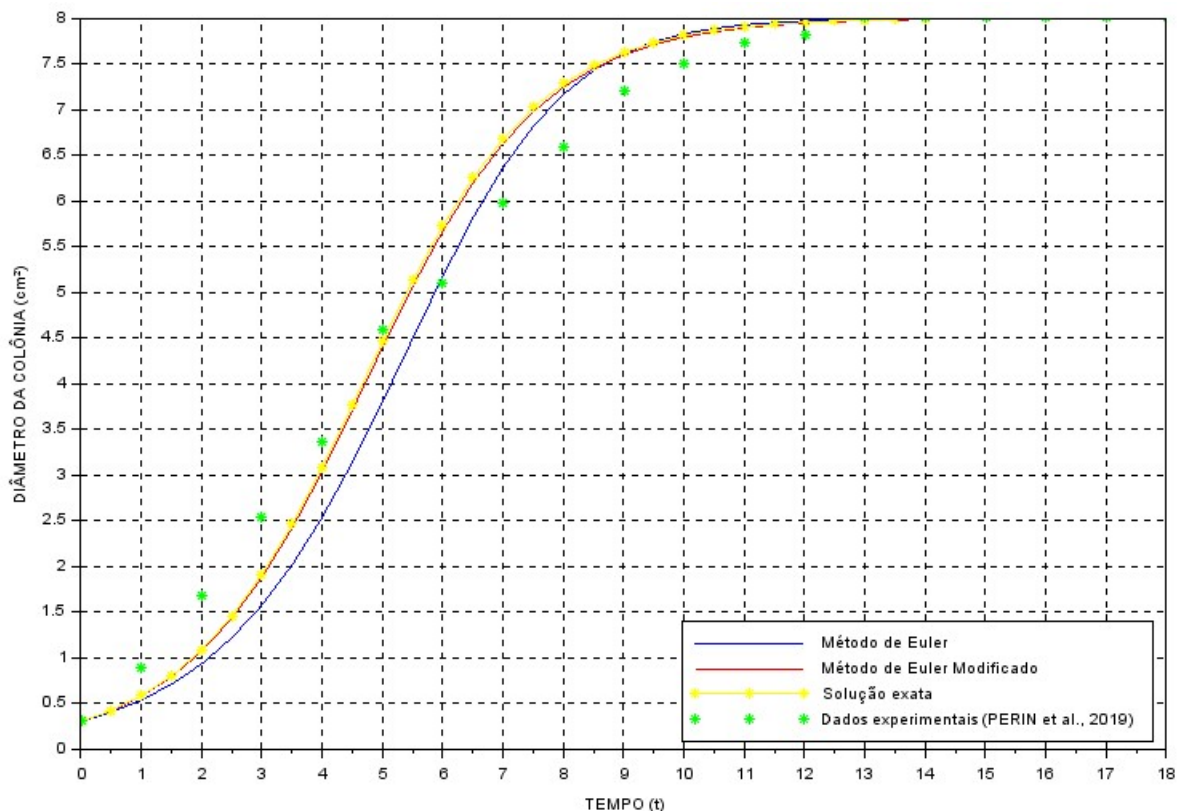
## 5 Resultados

A utilização do Scilab viabilizou as simulações numéricas para a obtenção das aproximações para a solução do PVI (7). Por isso, desenvolveram-se no *software* os algoritmos para o Método de Euler e Euler Modificado, conforme as Equações 5 e 6, respectivamente.

A validação dos métodos de Euler apresentados ocorre mediante a comparação com a solução analítica, sendo considerado o intervalo de simulação  $[0, 12]$  e passo de tempo  $h = 0,5$ , resultando na obtenção da solução de seis em seis horas, similar ao experimento. Na Figura 3 é apresentada a comparação entre os dados experimentais obtidos pelos autores, a solução analítica e as simulações numéricas (Método de Euler, um estágio, e o Método de Euler Modificado, dois estágios).



Figura 3 – Dados experimentais, aproximações numéricas e a solução analítica para o fungo *B. dothidea*

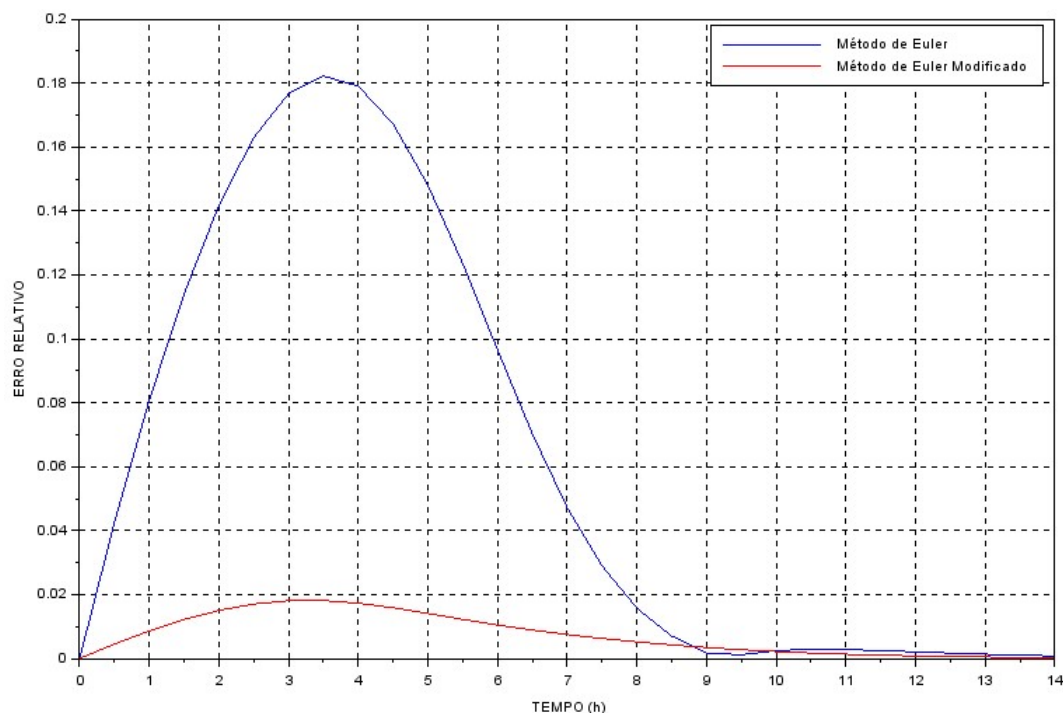


Fonte: Elaboração dos autores.

A comparação dos resultados propicia a validação dos métodos, pois as soluções numéricas estão em consonância com a analítica. Ainda, pela Figura 3 pode-se inferir que a aproximação com dois estágios corresponde melhor com a solução analítica, em comparação ao método de um estágio, dada a ordem de precisão do método.

A melhor aproximação das soluções é evidenciada na Figura 4, mediante ao cálculo do erro relativo, em cada ponto, entre a solução analítica e a numérica, para cada método. Pela norma matricial (TREFETHEN; BAU III, 1997) do erro relativo, obtém-se 0,49719 e 0,05167 de erro para o Método de Euler e o Método de Euler Modificado, respectivamente. Com isso, observa-se que o Método de Euler Modificado apresentou uma aproximação melhor do que o Método de Euler, de modo que a estratégia de utilizar a média entre as duas derivadas oportunizou uma solução mais razoável a exata.



Figura 4 – Erro relativo entre a solução analítica e as soluções numéricas para o fungo *B. dothidea*

Fonte: Elaboração dos autores.

Por fim, encontram-se boas soluções numéricas para o modelo matemático de crescimento populacional de fungos causadores de doenças de tronco em videiras, uma vez que é obtida uma aproximação numérica para a EDO que está próxima da solução exata e do evento experimental, através das comparações apresentadas.

## 6 Considerações Finais

Neste trabalho foi apresentada a solução numérica da equação de Verhulst, utilizada na modelagem de crescimento populacional, colaborando com estudos na Fitopatologia. A abordagem utilizada aproxima a solução da equação diferencial ordinária pelo Método de Euler, com um e dois estágios. Os métodos numéricos empregados, Euler e Euler Modificado, têm sua validade mediante a comparação com a solução analítica disponível na literatura.

A Figura 3 evidencia a correspondência da solução aproximada numericamente com a solução analítica, dada a proximidade entre elas. Ainda, ao avaliarmos o cálculo do erro nos pontos, observa-se que o máximo dos erros ocorre na parte exponencial do modelo, e ao fim todas as soluções tendem ao equilíbrio.



A implementação do Método de Euler Modificado produziu uma melhor aproximação da solução do problema em comparação com o Método de Euler, conforme esperado, devido à ordem de precisão. Em trabalhos futuros, almeja-se programar o Método de Runge-Kutta, visto que possui mais estágios e a ordem de precisão mais alta, possibilitando a obtenção de uma solução mais precisa do que Euler para o modelo de Verhulst.

Sendo assim, a modelagem matemática possibilita diversas contribuições nas diferentes áreas do conhecimento, propiciando que as mesmas estendam suas pesquisas. No caso das doenças de tronco em videira, a validação do método numérico propicia a perspectiva de avançar no estudo de modelos mais complexos, a fim de representar o controle das pragas. Isto é, um método numérico válido é uma excelente ferramenta, visto que nem todos os modelos possuem solução analítica conhecida.

## Referências

- ALMANÇA, M. A. K.; LERIN, S.; CAVALCANTI, F. R. Doenças da videira. **Informe Agropecuário**, Belo Horizonte, v. 36, n. 289, p. 7-12, 2015. Disponível em: <https://www.livrariaepamig.com.br/wp-content/uploads/2021/06/IA-289-pgs-iniciais.pdf>. Acesso em: 4 mar. 2022.
- ATKINSON, K.; HAN, W.; STEWART, D. E. **Numerical solution of ordinary differential equations**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2009.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1985.
- DE MENDON, P. T. V.; LIMA, D. S.; BARROS, G. G.; MENEZES, M. S.; MEZZOMO, I. Comparativo dos Métodos de Euler e Heun na resolução de equações diferenciais de primeira ordem. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, São Carlos, v. 6, n. 1, p. 10070-1-10070-2, 2018. Disponível em: <https://proceedings.sbmec.org.br/sbmec/article/view/1757>. Acesso em: 4 mar. 2022.
- JUSTO, A. R. J.; SAUTER, E.; AZEVEDO, F. S.; GUIDI, L. F.; KONZEN, P. H. de A. (Org.). **Cálculo Numérico**: Um livro colaborativo. Versão Scilab. 19 ago. 2020. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico/livro-sci/livro-sci.pdf>. Acesso em: 25 nov. 2021.
- PERIN, R.Z.; FIORENTIN, J. STROSCHEIN, S. D.; ALMANÇA, M. A. K. Equações diferenciais no crescimento de fungos causadores de doenças de tronco em videira. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 5, n. 2, p. 192-208, 1 jul. 2019. DOI: <https://doi.org/10.35819/remat2019v5i2id3376>.
- RODRIGUES, D. S.; HAUSER, E. B. Modelo Logístico de Verhulst e Métodos Numéricos na Análise do Censo Populacional Mundial. **Proceeding Series of the Brazilian Society of**



**Computational and Applied Mathematics**, São Carlos, v. 2, n. 1, p. 10068-1-10068-3, 2014.  
DOI: <https://doi.org/10.5540/03.2014.002.01.0068>.

TREFETHEN, L. N.; BAU III, D. **Numerical Linear Algebra**. Philadelphia: SIAM, 1997.

ÚRBEZ-TORRES, J. R.; LEAVITT, G. M.; VOEGEL, T. M.; GUBLER, W. D. Identification and distribution of *Botryosphaeria* spp. associated with grapevine cankers in California. **Plant Disease**, [S. l.], v. 90, n. 12, p. 1490-1503, 2006. DOI: <https://doi.org/10.1094/PD-90-1490>.

ZILL, D. G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. Tradução da 9ª edição Norte Americana. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

