

Fórmulas de Poisson e de Kirchhoff deduzidas por volumes de controle

Poisson and Kirchhoff formulas deduced by control volumes

Adriano Rodrigues de Melo¹

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Catarinense (IFC), Araquari, SC, Brasil



<https://orcid.org/0000-0002-3043-8906>,



<http://lattes.cnpq.br/5211317481556452>

Resumo: Este artigo apresenta uma dedução alternativa para as fórmulas de Poisson e de Kirchhoff, que resolvem o problema de valor inicial governado pela equação da onda em duas e três dimensões, respectivamente. Tal dedução foi inspirada em uma abordagem conhecida para o caso unidimensional, que fornece a fórmula de D'Alembert e que se desenvolve por meio de uma integração sobre um volume de controle definido no domínio do espaço e do tempo. Trata-se, portanto, de uma extensão daquela abordagem aos casos bi e tridimensional.

Palavras-chave: Equações Diferenciais; Equações Integrais; Transformadas Integrais.

Abstract: This paper presents an alternative deduction for the Poisson and Kirchhoff formulas, which solve the initial value problem defined by the wave equation in two and three dimensions, respectively. This deduction was inspired by a known approach for the one-dimensional case, associated with D'Alembert's formula and which is developed through an integration in a control volume defined in the domain of space and time. It is, therefore, an extension of that approach to two- and three-dimensional cases.

Keywords: Differential Equations; Integral Equations; Integral Transforms.

Data de submissão: 30 de setembro de 2021.

Data de aprovação: 24 de janeiro de 2022.

1 Introdução

O problema de Cauchy, definido pela equação diferencial

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t), \quad t > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, c > 0, \quad (1)$$

e pelas condições iniciais

$$u(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}) \quad \text{e} \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

¹**Currículo sucinto:** Licenciado em Matemática pela Faculdade Estadual de Educação, Ciências e Letras de Paranaíba, mestre e doutor em Métodos Numéricos em Engenharia pela Universidade Federal do Paraná, docente do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Catarinense, *Campus Araquari*. **Contribuição de autoria:** Conceituação, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Metodologia. **Contato:** adriano.melo@ifc.edu.br.



é presente na literatura como um clássico exemplo de problema de valor inicial (PVI) governado por um operador diferencial hiperbólico (STRAUSS, 1992; FOLLAND, 1995; JOST, 2012). As fórmulas que expressam a solução desse PVI, para $n = 1, 2$ e 3 , são conhecidas como fórmula de D'Alembert, fórmula de Poisson e fórmula de Kirchhoff, respectivamente (EVANS, 2010; BORTHWICK, 2016).

Existem várias maneiras de se obter as soluções em uma, duas ou três dimensões, porém, conforme Couto (2010), no \mathbb{R}^3 , a prática comum consiste em apresentar a fórmula e então verificar que a mesma de fato consiste na solução do problema, enquanto que para a fórmula válida no \mathbb{R}^2 , costuma-se utilizar o método da descida de Hadamard, que consiste em “descer” uma dimensão a partir do caso tridimensional (FRITZ, 1982).

Em uma dimensão espacial, um método utilizado na dedução da solução do problema não homogêneo e que produz grande satisfação, dada a harmonia na qual os termos se encaixam, é aquele que se utiliza da aplicação do Teorema de Green a um volume de controle, definido conforme Figura 1 (STRAUSS, 1992; MELO; GRAMANI; KAVISKI, 2019). Inspirado neste método e observada a ausência na literatura de análogos para os casos do \mathbb{R}^2 e do \mathbb{R}^3 , este trabalho busca apresentar outra maneira de se deduzir as soluções de Poisson e de Kirchhoff, formulada a partir da aplicação do Teorema da Divergência de Gauss a um volume de controle definido nos espaços \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^4 , respectivamente.

2 A fórmula de Poisson

Apresentamos na Figura 1 o triângulo característico utilizado na dedução da fórmula de D'Alembert via Teorema de Green (STRAUSS, 1992), construído de tal maneira que seus lados L_1 e L_2 possuem inclinações $-c$ e c , respectivamente. De maneira análoga, definimos no domínio $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$, um cone característico regular com altura t e cuja base é a circunferência contida no plano x_1x_2 , de centro $(x_1, x_2, 0)$ e raio ct , conforme Figura 1.

Uma parametrização em coordenadas polares deste cone regular é

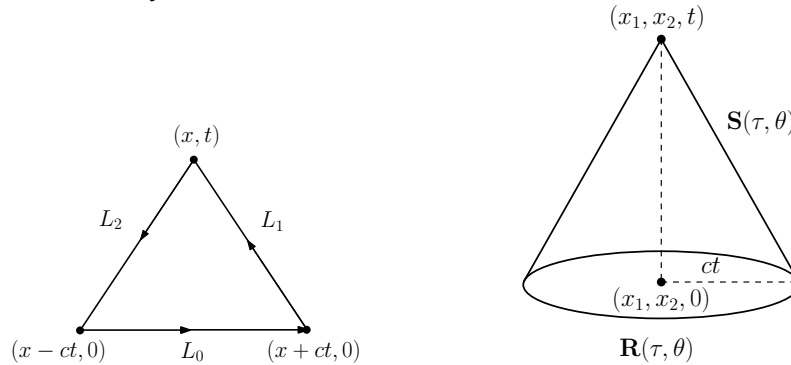
$$\mathcal{C} = \{(x_1 + r \cos \theta, x_2 + r \sin \theta, \tau) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \tau \leq t, 0 \leq r \leq c(t - \tau)\}, \quad (3)$$

de modo que suas superfícies lateral e de base também podem ser parametrizadas vetorialmente por

$$\mathbf{S}(\tau, \theta) = (x_1 + c(t - \tau) \cos \theta, x_2 + c(t - \tau) \sin \theta, \tau), \quad (4)$$



Figura 1 – Domínios de integração espaço-tempo definidos: triângulo característico (à esquerda) no \mathbb{R}^2 , para a dedução da solução de D’Alembert, válida para o caso unidimensional; e cone característico (à direita) no \mathbb{R}^3 , para a dedução da solução de Poisson, que satisfaz o problema de Cauchy bidimensional.



Fonte: Elaboração do autor (2022).

e

$$\mathbf{R}(\tau, \theta) = (x_1 + c\tau \cos \theta, x_2 + c\tau \sin \theta, 0), \tag{5}$$

respectivamente. Com isso, os vetores normais às superfícies \mathbf{R} e \mathbf{S} podem ser calculados, respectivamente, por

$$\mathbf{N}_R = (0, 0, -c^2\tau) \quad \text{e} \quad \mathbf{N}_S = c(t - \tau)(\cos \theta, \sin \theta, c). \tag{6}$$

Definindo o campo vetorial

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \left(-c^2 \frac{\partial u}{\partial x_1}, -c^2 \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial t} \right), \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+,$$

concluimos que a equação (1), com $n = 2$, corresponde ao $\text{div } \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t)$. Ao integrar sobre o cone representado pela Figura 1, definido pelas equações (3)-(6), obtemos:

$$\int_C f dC = \int_C \text{div } \mathbf{F} dC = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_S dS + \int_R \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_R dR, \tag{7}$$

onde, na última igualdade, aplicamos o Teorema da Divergência de Gauss, assumindo que u é de classe $C^2(\mathbb{R}^3)$, isto é, contínua e diferenciável até as derivadas de segunda ordem. Podemos substituir \mathbf{F} , \mathbf{N}_S e \mathbf{N}_R na equação (7), a fim de obter:

$$\begin{aligned} \int_C f dC &= \int_0^t \int_0^{2\pi} (-c^2 u_{x_1}, -c^2 u_{x_2}, u_t) \cdot [c(t - \tau)(\cos \theta, \sin \theta, c)] d\theta d\tau + \\ &\quad \int_0^t \int_0^{2\pi} (-c^2 u_{x_1}, -c^2 u_{x_2}, u_t) \cdot (0, 0, -c^2\tau) d\theta d\tau, \\ &= c^2 \int_0^t \int_0^{2\pi} (u_{x_1}, u_{x_2}, u_t) \cdot (-c \cos \theta, -c \sin \theta, 1)(t - \tau) d\theta d\tau - c^2 \int_0^t \int_0^{2\pi} u_t \tau d\theta d\tau, \end{aligned}$$



ou seja,

$$\int_C f dC = c^2 \int_0^t \int_0^{2\pi} (t - \tau) \nabla u(\mathbf{S}(\tau, \theta)) \cdot \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \tau} d\theta d\tau - c^2 \int_0^t \int_0^{2\pi} u_t(\mathbf{R}(\tau, \theta)) \tau d\theta d\tau. \quad (8)$$

Observando que

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [(t - \tau)u(\mathbf{S}(\tau, \theta))] = -u(\mathbf{S}(\tau, \theta)) + (t - \tau) \nabla u(\mathbf{S}(\tau, \theta)) \cdot \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \tau},$$

então podemos reescrever a equação (8) como

$$\int_0^t \int_0^{2\pi} u(\mathbf{S}(\tau, \theta)) d\theta d\tau = t \int_0^{2\pi} u(\mathbf{S}(0, \theta)) d\theta + \int_0^t \int_0^{2\pi} u_t(\mathbf{R}(\tau, \theta)) \tau d\theta d\tau + \frac{1}{c^2} \int_C f dC,$$

que, pelas condições iniciais dadas por (2) e pelo fato de $\mathbf{S}(0, \theta) = \mathbf{R}(t, \theta)$, torna-se

$$\int_0^t \int_0^{2\pi} u(\mathbf{S}(\tau, \theta)) d\theta d\tau = t \int_0^{2\pi} \phi(\mathbf{R}(t, \theta)) d\theta + \int_0^t \int_0^{2\pi} \varphi(\mathbf{R}(\tau, \theta)) \tau d\theta d\tau + \frac{1}{c^2} \int_C f dC. \quad (9)$$

Esta última equação acopla as condições iniciais (2) associadas ao PVI de uma maneira muito natural. Ao contrário da equação integral correspondente ao caso unidimensional, cujo cálculo pode ser explicitado via Teorema Fundamental das integrais de linha (STRAUSS, 1992; MELO; GRAMANI; KAVISKI, 2019), para prosseguir com a equação (9), necessitamos fazer uso da Transformada de Fourier no domínio do espaço que, para uma dada função $g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, é definida por (BORTHWICK, 2016):

$$\mathcal{F}\{g(x)\} = \hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} g(x) d^n x, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Aplicando¹ junto à equação (9) a Transformada Parcial de Fourier sobre a variável espacial $x \in \mathbb{R}^2$, observando a propriedade de deslocamento (DYKE, 1999; OLVER, 2014):

$$\mathcal{F}\{g(x - y)\} = e^{-i\xi \cdot y} \mathcal{F}\{g(x)\}, \quad (10)$$

obtemos a nova equação

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^{2\pi} e^{ic(t-\tau)\xi \cdot \omega(\theta)} \hat{u}(\xi, \theta) d\theta d\tau &= t \int_0^{2\pi} e^{ict\xi \cdot \omega(\theta)} \hat{\phi}(\xi) d\theta + \int_0^t \int_0^{2\pi} e^{ic\tau\xi \cdot \omega(\theta)} \hat{\varphi}(\xi) \tau d\theta d\tau + \\ &\frac{1}{c^2} \int_0^t \int_0^{c(t-\tau)} \int_0^{2\pi} e^{ir\xi \cdot \omega(\theta)} \hat{f}(\xi, \tau) r d\theta dr d\tau, \end{aligned} \quad (11)$$

em que temos utilizado $\omega(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$. Podemos simplificar esta última equação ao definirmos a função

$$\mathcal{J}(\rho\xi) = \int_0^{2\pi} e^{i\rho\xi \cdot \omega(\theta)} d\theta, \quad \rho \in \mathbb{R}, \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \quad (12)$$

¹Precisamos garantir que $\mathcal{F}\{u\}$ exista, para isso supomos que $u \in L^1(\mathbb{R}^3)$, isto é, que u pertence ao espaço $L^1(\mathbb{R}^3)$ das funções absolutamente integráveis.



de modo que (11) se torna

$$\int_0^t \hat{u}(\xi, \tau) \mathcal{J}(c(t - \tau)\xi) d\tau = t\hat{\phi}(\xi)\mathcal{J}(ct\xi) + \hat{\varphi}(\xi) \int_0^t \mathcal{J}(c\tau\xi)\tau d\tau + \frac{1}{c^2} \int_0^t \int_0^{c(t-\tau)} \mathcal{J}(r\xi)\hat{f}(\xi, \tau)rdrd\tau. \tag{13}$$

O resultado a seguir estabelece que a integral (12) corresponde a uma função conhecida.

Lema 2.1. *Seja $J_0(x)$ a função de Bessel de ordem zero e $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ a norma de ξ , então*

$$\mathcal{J}(\rho\xi) = \int_0^{2\pi} e^{i\rho\xi \cdot \omega(\theta)} d\theta = 2\pi J_0(\rho|\xi|).$$

Demonstração. Tomando a série de Taylor da função e^x junto à equação (12), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\rho\xi) &= \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\rho)^n [\xi_1 \cos \theta + \xi_2 \sin \theta]^n}{n!} d\theta, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\rho)^n}{n!} \int_0^{2\pi} \frac{[(\xi_1 i + \xi_2)e^{i\theta} + (\xi_1 i - \xi_2)e^{-i\theta}]^n}{(2i)^n} d\theta, \end{aligned} \tag{14}$$

em que na última igualdade utilizamos a relação de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Pelo Teorema Binomial, a equação (14) pode ser reescrita como

$$\mathcal{J}(\rho\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\rho)^n}{n!(2i)^n} \left[\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (\xi_1 i + \xi_2)^m (\xi_1 i - \xi_2)^{n-m} \int_0^{2\pi} e^{(2m-n)i\theta} d\theta \right],$$

e uma vez que

$$\int_0^{2\pi} e^{(2m-n)i\theta} d\theta = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq 2m \\ 2\pi, & \text{se } n = 2m \end{cases}, \tag{15}$$

temos que

$$\mathcal{J}(\rho\xi) = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\rho \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2})^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}, \text{ isto é, } \mathcal{J}(\rho\xi) = 2\pi J_0(\rho|\xi|). \tag{16}$$

□

Pelo Lema 2.1, a equação (13) é equivalente a

$$\begin{aligned} \int_0^t \hat{u}(\xi, \tau) J_0(c|\xi|(t - \tau)) d\tau &= t\hat{\phi}(\xi)J_0(c|\xi|t) + \hat{\varphi}(\xi) \int_0^t J_0(c|\xi|\tau) \tau d\tau + \\ &\frac{1}{c^2} \int_0^t \int_0^{c(t-\tau)} J_0(|\xi|r) \hat{f}(\xi, \tau) r dr d\tau. \end{aligned} \tag{17}$$

O termo à esquerda da equação (17) consiste em uma integral de convolução, a qual pode ser tratada por meio da Transformada de Laplace (TL), definida para uma dada função $h(t)$ como (DOETSCH, 1974):

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \tilde{h}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} h(t) dt.$$



Neste caso, (17) se transforma em²:

$$\mathcal{L}\{\hat{u}(\xi, t)\} \mathcal{L}\{J_0(c|\xi|t)\} = \hat{\phi}(\xi)\mathcal{L}\{tJ_0(c|\xi|t)\} + \hat{\varphi}(\xi)\frac{1}{s}\mathcal{L}\{tJ_0(c|\xi|t)\} + \mathcal{L}\{T(\xi, t)\}, \quad (18)$$

em que $\mathcal{L}\{T(\xi, t)\}$ representa a TL do último termo da equação (17). Uma vez que $\mathcal{L}\{J_0(at)\}$ e $\mathcal{L}\{tJ_0(at)\}$ são bem conhecidas (SPIEGEL, 1965; DOETSCH, 1974; SCHIFF, 1999), basta calcularmos $\mathcal{L}\{T(\xi, t)\}$, o que será feito no seguinte Lema:

Lema 2.2. $\mathcal{L}\{T(\xi, t)\} = \frac{1}{(s^2+c^2|\xi|^2)^{3/2}}\mathcal{L}\{\hat{f}(\xi, t)\}$, com $c^2|\xi|^2 < s^2, Re(s) > 0$.

Demonstração. A Transformada de Laplace (TL) das funções $J_0(at)$ e $tJ_0(at)$ são dadas por (SPIEGEL, 1965; DOETSCH, 1974; SCHIFF, 1999):

$$\mathcal{L}\{J_0(at)\} = \frac{1}{(s^2 + a^2)^{1/2}} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{tJ_0(at)\} = \frac{s}{(s^2 + a^2)^{3/2}}, \quad a^2 < s^2, Re(s) > 0.$$

Primeiro reescrevemos o termo fonte como:

$$\begin{aligned} T(\xi, t) &= \frac{1}{c^2} \int_0^t \int_0^{c(t-\tau)} J_0(r|\xi|)\hat{f}(\xi, \tau)rdrd\tau = \frac{1}{c^2} \int_0^t \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n|\xi|^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} \int_0^{c(t-\tau)} r^{2n+1}dr \right\} \hat{f}(\xi, \tau)d\tau, \\ &= \frac{1}{c^2} \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n|\xi|^{2n}[c(t-\tau)]^{2n+2}}{2^{2n}(2n+2)(n!)^2} \hat{f}(\xi, \tau)d\tau, \end{aligned}$$

que é claramente uma integral de convolução e, por isso,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{T(\xi, t)\} &= \frac{1}{c^2}\mathcal{L}\{\hat{f}(\xi, t)\} \mathcal{L}\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n|\xi|^{2n}(ct)^{2n+2}}{2^{2n}(2n+2)(n!)^2} \right\}, \\ &= \frac{1}{c^2}\mathcal{L}\{\hat{f}(\xi, t)\} \frac{c^2}{s^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2} \left(\frac{c^2|\xi|^2}{s^2}\right)^n, \end{aligned} \quad (19)$$

com $Re(s) > 0$. Usando $p = -3/2$ e $x = c^2|\xi|^2s^{-2} < 1$ na série binomial

$$(1+x)^p = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n, \quad p \neq 0, 1, \dots, |x| < 1,$$

obtemos:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{c^2|\xi|^2}{s^2}\right)^{-3/2} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2n+1}{2}\right)}{n!} \left(\frac{c^2|\xi|^2}{s^2}\right)^n, \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2^n n!} \left(\frac{c^2|\xi|^2}{s^2}\right)^n, \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} \left[\frac{2}{2} \cdot 3 \cdot \frac{4}{4} \cdot 5 \cdots \frac{2n}{2n} \cdot (2n+1) \right] \left(\frac{c^2|\xi|^2}{s^2}\right)^n, \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!}{2^n n!} \left(\frac{c^2|\xi|^2}{s^2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!}{2^{2n} (n!)^2} \left(\frac{c^2|\xi|^2}{s^2}\right)^n, \end{aligned} \quad (20)$$

²Utilizamos também o Teorema da Transformada da Integral (DOETSCH, 1974) que estabelece que se $\mathcal{L}\{h(t)\}$ converge, então $\mathcal{L}\left\{\int_0^t h(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{h(t)\}$.



e podemos concluir, comparando as equações (19) e (20), que

$$\mathcal{L}\{T(\boldsymbol{\xi}, t)\} = \frac{1}{(s^2 + c^2|\boldsymbol{\xi}|^2)^{3/2}} \mathcal{L}\{\hat{f}(\boldsymbol{\xi}, t)\}, \quad \text{com } c^2|\boldsymbol{\xi}|^2 < s^2, \text{Re}(s) > 0. \quad (21)$$

□

A partir do Lema 2.2, a equação (18) pode ser reescrita como

$$\frac{\mathcal{L}\{\hat{u}(\boldsymbol{\xi}, t)\}}{(s^2 + c^2|\boldsymbol{\xi}|^2)^{1/2}} = \frac{s}{(s^2 + c^2|\boldsymbol{\xi}|^2)^{3/2}} \hat{\phi}(\boldsymbol{\xi}) + \frac{s}{(s^2 + c^2|\boldsymbol{\xi}|^2)^{3/2}} \frac{\hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})}{s} + \frac{1}{(s^2 + c^2|\boldsymbol{\xi}|^2)^{3/2}} \mathcal{L}\{\hat{f}(\boldsymbol{\xi}, t)\},$$

com $c^2|\boldsymbol{\xi}|^2 < s^2$ e $\text{Re}(s) > 0$, ou seja,

$$\mathcal{L}\{\hat{u}(\boldsymbol{\xi}, t)\} = \frac{s}{s^2 + c^2|\boldsymbol{\xi}|^2} \hat{\phi}(\boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{s^2 + c^2|\boldsymbol{\xi}|^2} \hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{s^2 + c^2|\boldsymbol{\xi}|^2} \mathcal{L}\{\hat{f}(\boldsymbol{\xi}, t)\},$$

para $c^2|\boldsymbol{\xi}|^2 < s^2$ e $\text{Re}(s) > 0$. Dessa forma, após a inversão, esta última equação fornece uma expressão explícita para o mapeamento de Fourier:

$$\hat{u}(\boldsymbol{\xi}, t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + c^2|\boldsymbol{\xi}|^2}\right\} \hat{\phi}(\boldsymbol{\xi}) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + c^2|\boldsymbol{\xi}|^2}\right\} \hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + c^2|\boldsymbol{\xi}|^2}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(\boldsymbol{\xi}, t)\}, \quad (22)$$

em que $*$ denota uma convolução. Substituindo as inversas que aparecem em (22) obtemos:

$$\hat{u}(\boldsymbol{\xi}, t) = \cos(c|\boldsymbol{\xi}|t) \hat{\phi}(\boldsymbol{\xi}) + \frac{\text{sen}(c|\boldsymbol{\xi}|t)}{c|\boldsymbol{\xi}|} \hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}) + \int_0^t \frac{\text{sen}(c|\boldsymbol{\xi}|(t - \tau))}{c|\boldsymbol{\xi}|} \hat{f}(\boldsymbol{\xi}, \tau) d\tau. \quad (23)$$

Uma vez conhecida a função espectral $\mathcal{F}\{u(\boldsymbol{x}, t)\} = \hat{u}(\boldsymbol{\xi}, t)$, a partir da Transformada Inversa de Fourier (TIF), podemos retornar a equação (23) e seguindo conforme Hounie (1979, p. 151), chegamos finalmente na solução

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{R}} \frac{\phi(\boldsymbol{y})}{\sqrt{c^2 t^2 - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^2}} d^2 \boldsymbol{y} + \frac{1}{2\pi c} \int_{\mathcal{R}} \frac{\varphi(\boldsymbol{y})}{\sqrt{c^2 t^2 - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^2}} d^2 \boldsymbol{y} + \frac{1}{2\pi c} \int_0^t \int_{\mathcal{R}} \frac{f(\boldsymbol{y}, \tau)}{\sqrt{c^2 (t - \tau)^2 - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^2}} d^2 \boldsymbol{y} d\tau, \quad (24)$$

em que $\mathcal{R} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2; |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| < ct\}$. A equação (24) é conhecida como a fórmula de Poisson (EVANS, 2010; BORTHWICK, 2016) para o PVI (1)-(2) em duas dimensões. O caso tridimensional será considerado na seção a seguir.

3 A fórmula de Kirchhoff

Para a fórmula de Kirchhoff, procedemos de maneira análoga ao caso bidimensional. Começamos por definir um hiper cone \mathcal{C} no espaço quadridimensional:

$$\mathcal{C} = \{(x_1 + r \cos \theta \text{sen } \beta, x_2 + r \text{sen } \theta \text{sen } \beta, x_3 + r \cos \beta, \tau) \in \mathbb{R}^4; 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \beta \leq \pi, 0 \leq \tau \leq t, 0 \leq r \leq c(t - \tau)\}, \quad (25)$$



de modo que sua superfície lateral pode ser parametrizada por

$$\mathbf{S}(\tau, \theta, \beta) = (x_1 + c(t - \tau) \cos \theta \operatorname{sen} \beta, x_2 + c(t - \tau) \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \beta, x_3 + c(t - \tau) \cos \beta, \tau), \quad (26)$$

e cuja base é a esfera com centro em $(x_1, x_2, x_3, 0)$ e raio ct , isto é,

$$\mathbf{R}(\tau, \theta, \beta) = (x_1 + c\tau \cos \theta \operatorname{sen} \beta, x_2 + c\tau \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \beta, x_3 + c\tau \cos \beta, 0). \quad (27)$$

Os vetores normais às superfícies \mathbf{S} e \mathbf{R} são dados, respectivamente, por:

$$\mathbf{N}_S = c^2(t - \tau)^2 \operatorname{sen} \beta (\cos \theta \operatorname{sen} \beta, \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \beta, \cos \beta, c) \quad \text{e} \quad \mathbf{N}_R = c^3 \tau^2 (0, 0, 0, -1). \quad (28)$$

Definimos novamente o campo vetorial

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \left(-c^2 \frac{\partial u}{\partial x_1}, -c^2 \frac{\partial u}{\partial x_2}, -c^2 \frac{\partial u}{\partial x_3}, \frac{\partial u}{\partial t} \right), \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+,$$

que torna possível compreender a equação (1), com $n = 3$, como $\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t)$. Realizando a integração dessa equação sobre o hiper cone parametrizado por (25)-(28), usando o Teorema da Divergência sobre a hipótese de u ser de classe $C^2(\mathbb{R}^4)$, obtemos novamente a equação (7). Substituindo \mathbf{F} , \mathbf{N}_S e \mathbf{N}_R e rearranjando os termos, chegamos a

$$\begin{aligned} \int_C f dC &= c^3 \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen} \beta (t - \tau)^2 \nabla u(\mathbf{S}(\tau, \theta, \beta)) \cdot \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \tau} d\beta d\theta d\tau \\ &\quad - c^3 \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u_t(\mathbf{R}(\tau, \theta, \beta)) \tau^2 \operatorname{sen} \beta d\beta d\theta d\tau. \end{aligned} \quad (29)$$

Considerando que

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [(t - \tau)^2 u(\mathbf{S})] = -2(t - \tau)u(\mathbf{S}) + (t - \tau)^2 \nabla u(\mathbf{S}) \cdot \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \tau},$$

então podemos reescrever a equação (29), utilizando as condições iniciais em (2), como

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (t - \tau)u(\mathbf{S}(\tau, \theta, \beta)) \operatorname{sen} \beta d\beta d\theta d\tau &= \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varphi(\mathbf{R}(\tau, \theta, \beta)) \tau^2 \operatorname{sen} \beta d\beta d\theta d\tau + \\ &\quad \frac{t^2}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \phi(\mathbf{S}(0, \theta, \beta)) \operatorname{sen} \beta d\beta d\theta + \\ &\quad \frac{1}{2c^3} \int_0^t \int_0^{c(t-\tau)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \beta, r, \tau) r^2 \operatorname{sen} \beta d\beta d\theta dr d\tau. \end{aligned} \quad (30)$$



Aplicando a Transformada de Fourier na equação (30), observada a propriedade de deslocamento (10), obtemos

$$\int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (t - \tau) \text{sen } \beta e^{ic(t-\tau)\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\omega}(\theta, \beta)} \hat{u}(\boldsymbol{\xi}, \tau) d\beta d\theta d\tau = \frac{t^2}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \text{sen } \beta e^{ict\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\omega}(\theta, \beta)} \hat{\phi}(\boldsymbol{\xi}) d\beta d\theta + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \tau^2 \text{sen } \beta e^{ic\tau\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\omega}(\theta, \beta)} \hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}) d\beta d\theta d\tau + \frac{1}{2c^3} \int_0^t \int_0^{c(t-\tau)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \text{sen } \beta e^{ir\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\omega}(\theta, \beta)} \hat{f}(\boldsymbol{\xi}, \tau) d\beta d\theta dr d\tau, \tag{31}$$

em que $\boldsymbol{\omega}(\theta, \beta) = (\cos \theta \text{sen } \beta, \text{sen } \theta \text{sen } \beta, \cos \beta)$. Consideremos a função

$$\mathcal{S}(\rho\boldsymbol{\xi}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \text{sen } \beta e^{i\rho\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\omega}(\theta, \beta)} d\beta d\theta, \quad \rho \in \mathbb{R}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3, \tag{32}$$

então, poderemos reescrever a equação (31) como

$$\int_0^t (t - \tau) \mathcal{S}(c(t - \tau)\boldsymbol{\xi}) \hat{u}(\boldsymbol{\xi}, \tau) d\tau = \frac{t^2}{2} \mathcal{S}(ct\boldsymbol{\xi}) \hat{\phi}(\boldsymbol{\xi}) + \frac{\hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})}{2} \int_0^t \tau^2 \mathcal{S}(c\tau\boldsymbol{\xi}) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \hat{f}(\boldsymbol{\xi}, \tau) \int_0^{t-\tau} r^2 \mathcal{S}(cr\boldsymbol{\xi}) dr d\tau. \tag{33}$$

Aplicando a Transformada de Laplace na equação (33) e notando que a integral à esquerda e a última integral à direita são convoluções, chegamos a:

$$\mathcal{L}\{t\mathcal{S}(ct\boldsymbol{\xi})\} \mathcal{L}\{\hat{u}(\boldsymbol{\xi}, t)\} = \frac{\hat{\phi}(\boldsymbol{\xi})}{2} \mathcal{L}\{t^2\mathcal{S}(ct\boldsymbol{\xi})\} + \frac{\hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})}{2} \mathcal{L}\left\{\int_0^t \tau^2 \mathcal{S}(c\tau\boldsymbol{\xi}) d\tau\right\} + \frac{1}{2} \mathcal{L}\{\hat{f}(\boldsymbol{\xi}, t)\} \mathcal{L}\left\{\int_0^t \tau^2 \mathcal{S}(c\tau\boldsymbol{\xi}) d\tau\right\},$$

e usando os teoremas da transformada da derivada³ (SCHIFF, 1999) e da integral, simplificamos a equação anterior como

$$-\tilde{\mathcal{S}}'(s) \mathcal{L}\{\hat{u}(\boldsymbol{\xi}, t)\} = \frac{\hat{\phi}(\boldsymbol{\xi})}{2} \tilde{\mathcal{S}}''(s) + \frac{\hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})}{2} \frac{\tilde{\mathcal{S}}''(s)}{s} + \frac{1}{2} \mathcal{L}\{\hat{f}(\boldsymbol{\xi}, t)\} \frac{\tilde{\mathcal{S}}''(s)}{s},$$

em que $\tilde{\mathcal{S}}(s) = \mathcal{L}\{\mathcal{S}(ct\boldsymbol{\xi})\}$ e $\tilde{\mathcal{S}}'(s)$ é a derivada em relação a s . Com isso, podemos isolar a transformada de \hat{u} :

$$\mathcal{L}\{\hat{u}(\boldsymbol{\xi}, t)\} = -\frac{\hat{\phi}(\boldsymbol{\xi})}{2} \frac{\tilde{\mathcal{S}}''(s)}{\tilde{\mathcal{S}}'(s)} - \frac{\hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})}{2} \frac{\tilde{\mathcal{S}}''(s)}{s\tilde{\mathcal{S}}'(s)} - \frac{1}{2} \mathcal{L}\{\hat{f}(\boldsymbol{\xi}, t)\} \frac{\tilde{\mathcal{S}}''(s)}{s\tilde{\mathcal{S}}'(s)}. \tag{34}$$

Basta, portanto, obtermos $\mathcal{L}\{\mathcal{S}(ct\boldsymbol{\xi})\}$ e suas derivadas de primeira e segunda ordem para que a equação (34) esteja completamente determinada.

³ Sendo $\tilde{h}(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$, então $\mathcal{L}\{t^n h(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \tilde{h}(s)$.



Lema 3.1. *Seja a função $S(ct\xi)$, $t \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^3$ definida conforme (32) e $\tilde{S}(s) = \mathcal{L}\{S(ct\xi)\}$, então $\frac{\tilde{S}''(s)}{\tilde{S}'(s)} = -\frac{2s}{s^2 + c^2|\xi|^2}$.*

Demonstração. Notemos primeiramente, a partir do Lema 2.1, que a função $S(ct\xi)$ pode ser reescrita como

$$S(ct\xi) = 2\pi \int_0^\pi \text{sen } \beta e^{ict\xi_3 \cos \beta} J_0 \left[ct\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \text{sen } \beta \right] d\beta,$$

e tomando a TL a partir dessa expressão, chegamos a:

$$\tilde{S}(s) = \mathcal{L}\{S(ct\xi)\} = 2\pi \int_0^\pi \frac{\text{sen } \beta}{[(s - ic\xi_3 \cos \beta)^2 + c^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)\text{sen}^2 \beta]^{1/2}} d\beta. \tag{35}$$

Reescrevendo o denominador do integrando como

$$\begin{aligned} (s - ic\xi_3 \cos \beta)^2 + c^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)\text{sen}^2 \beta &= -c^2(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) \cos^2 \beta - 2sc\xi_3 i \cos \beta + s^2 + c^2(\xi_1^2 + \xi_2^2), \\ &= c^2|\xi|^2 \left\{ i^2 \cos^2 \beta - 2\frac{sc\xi_3}{c^2|\xi|^2} i \cos \beta + \frac{s^2 + c^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)}{c^2|\xi|^2} \right\}, \\ &= c^2|\xi|^2 \left\{ \left(i \cos \beta - \frac{s\xi_3 c}{c^2|\xi|^2} \right)^2 + \frac{c^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)(s^2 + c^2|\xi|^2)}{(c^2|\xi|^2)^2} \right\}, \end{aligned}$$

podemos modificar a equação (35) para

$$\tilde{S}(s) = \frac{2\pi}{c|\xi|} \int_0^\pi \frac{\text{sen } \beta}{\left\{ \left(i \cos \beta - \frac{s\xi_3 c}{c^2|\xi|^2} \right)^2 + \frac{c^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)(s^2 + c^2|\xi|^2)}{(c^2|\xi|^2)^2} \right\}^{1/2}} d\beta.$$

Realizando a mudança de variável $u = i \cos \beta - \frac{s\xi_3 c}{c^2|\xi|^2}$, a integral anterior toma a forma

$$\tilde{S}(s) = -\frac{2\pi}{c|\xi|i} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}}, \quad \text{cuja solução é } \tilde{S}(s) = \frac{2\pi i}{c|\xi|} \ln |\mu(\beta)| \Big|_0^\pi,$$

em que

$$\mu(\beta) = i \cos \beta - \frac{s\xi_3 c}{c^2|\xi|^2} + \sqrt{\left(i \cos \beta - \frac{s\xi_3 c}{c^2|\xi|^2} \right)^2 + \frac{c^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)(s^2 + c^2|\xi|^2)}{(c^2|\xi|^2)^2}}. \tag{36}$$

Dessa forma, precisamos avaliar $\mu(\beta)$ em $\beta = 0$ e $\beta = \pi$. A partir da equação (36), temos que:

$$\mu(0) = i - \frac{s\xi_3 c}{c^2|\xi|^2} + \frac{s - \xi_3 ci}{c|\xi|} \quad \text{e} \quad \mu(\pi) = -i - \frac{s\xi_3 c}{c^2|\xi|^2} + \frac{s + \xi_3 ci}{c|\xi|}.$$

Com isso, concluímos que

$$\tilde{S}(s) = \frac{2\pi i}{c|\xi|} \left\{ \ln \left| -i - \frac{s\xi_3 c}{c^2|\xi|^2} + \frac{s + \xi_3 ci}{c|\xi|} \right| - \ln \left| i - \frac{s\xi_3 c}{c^2|\xi|^2} + \frac{s - \xi_3 ci}{c|\xi|} \right| \right\},$$



ou ainda,

$$\tilde{S}(s) = \frac{2\pi i}{c|\xi|} \ln \left| \frac{(s - c|\xi|i)^2}{s^2 + c^2|\xi|^2} \right|. \tag{37}$$

Derivando $\tilde{S}(s)$ a partir da equação (37), obtemos que

$$\tilde{S}'(s) = -\frac{4\pi}{s^2 + c^2|\xi|^2} \quad \text{e} \quad \tilde{S}''(s) = \frac{8\pi s}{(s^2 + c^2|\xi|^2)^2},$$

ocasião em que

$$\frac{\tilde{S}''(s)}{\tilde{S}'(s)} = -\frac{2s}{s^2 + c^2|\xi|^2}. \tag{38}$$

□

A partir do Lema 3.1, a equação (34) nos fornece, após utilizarmos a inversa da Transformada de Laplace,

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{\phi}(\xi) \cos(c|\xi|t) + \hat{\varphi}(\xi) \frac{\text{sen}(c|\xi|t)}{c|\xi|} + \int_0^t \frac{\text{sen}(c|\xi|(t-\tau))}{c|\xi|} \hat{f}(\xi, \tau) d\tau. \tag{39}$$

Notemos que a equação (39) é equivalente à equação (23) deduzida para o caso bidimensional e, por essa razão, seguindo novamente Honie (1979, p. 151), com a TIF obtemos a solução de Kirchhoff

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=ct} \phi(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \right] + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=ct} \varphi(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^t \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=c(t-\tau)} \frac{f(\mathbf{y}, \tau)}{t-\tau} dS_{\mathbf{y}} d\tau, \tag{40}$$

em que $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = ct$ corresponde à esfera de raio ct centrada no ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ e $dS_{\mathbf{y}}$ é o elemento de volume da referida esfera.

4 Considerações finais

Neste artigo buscamos apresentar outra maneira de se deduzir as fórmulas de Poisson e de Kirchhoff, associadas ao problema de Cauchy definido pela equação da onda em duas e três dimensões, respectivamente. Tal dedução foi inspirada em uma abordagem conhecida para o caso unidimensional, que fornece a fórmula de D'Alembert e que se desenvolve por meio de uma integração sobre um volume de controle definido no domínio do espaço e do tempo. O processo aqui exposto é, portanto, uma extensão daquela abordagem aos casos bi e tridimensional.



Nossa apresentação detalhou o uso das transformadas integrais de Laplace e de Fourier até o momento em que isolamos perfeitamente o mapeamento de Fourier $\hat{u}(\xi, t)$, isto é, até as equações (23) e (39), $\xi \in \mathbb{R}^2$ e $\xi \in \mathbb{R}^3$, respectivamente, pois a partir deste momento, a abordagem proposta se tornou equivalente àquela que expressa a função solução em termos de convoluções de distribuições (HOUNIE, 1979, p. 151).

Referências

BORTHWICK, D. **Introduction to Partial Differential Equations**. Universitext. [S. l.]: Springer, 2016. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-48936-0>.

COUTO, R. T. Sobre a Dedução da Equação da Onda e da Solução Segundo a Fórmula de Kirchooff. **TEMA: Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, São Carlos, v. 11, n. 1, p. 49-58, 2010. Disponível em: <https://tema.sbmac.org.br/tema/article/view/112>. Acesso em: 21 abr. 2022.

DOETSCH, G. **Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transform**. Berlin: Springer, 1974. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-65690-3>.

DYKE, P. P. G. **An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series**. Springer Undergraduate Mathematics Series. Berlin: Springer, 1999.

EVANS, L. C. **Partial differential equations**. Graduate Studies in Mathematics. v. 19. 2. ed. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010.

FOLLAND, G. B. **Introduction to Partial Differential Equations**. Mathematical Notes. New Jersey: Princeton University Press, 1995.

FRITZ, J. **Partial Differential Equations**. Applied Mathematical Sciences. New York: Springer, 1982.

HOUNIE, J. **Teoria Elementar das Distribuições**. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

JOST, J. **Partial Differential Equations**. Graduate Texts in Mathematics. 3. ed. New York: Springer, 2012.

MELO, A. R.; GRAMANI, L. M.; KAVISKI, E. Esquema Explícito Semi-Analítico para a Solução da Equação da Onda Unidimensional com Condições de Contorno Naturais. **TEMA: Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, São Carlos, v. 20, n. 1, p. 77-93, 2019. DOI: <https://doi.org/10.5540/tema.2019.020.01.77>.

OLVER, P. J. **Introduction to Partial Differential Equations**. Undergraduate Texts in Mathematics. New York: Springer, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-02099-0>.

SCHIFF, J. L. **The Laplace Transform: Theory and Applications**. Undergraduate Texts in Mathematics. Berlin: Springer, 1999.



SPIEGEL, M. R. **Theory and Problems of Laplace Transforms**. Schaum's Outline. New York: McGraw-Hill, 1965.

STRAUSS, W. A. **Partial Differential Equations: An Introduction**. United States of America: John Wiley & Sons, 1992.

