

Distribuição de temperaturas em um cilindro sólido circular infinito com dupla camada: três casos especiais

Temperature distribution in a two-layer infinite circular solid cylinder: three special cases

Distribución de temperatura en un cilindro sólido circular infinito con dos capas: tres casos especiales

Jorge Corrêa de Araújo¹

Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), São Gonçalo, RJ, Brasil



<https://orcid.org/0000-0002-1015-6311>,



<http://lattes.cnpq.br/3486694358849656>

Rosa García Márquez²

Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), São Gonçalo, RJ, Brasil



<https://orcid.org/0000-0003-3465-569X>,



<http://lattes.cnpq.br/1466957291722861>

Resumo: Três casos especiais de distribuição de temperaturas em um meio de dupla camada cilíndrica constituída de um elemento combustível conhecido como tório (*Th*) com revestimento de alumínio (*Al*) foram analisados com o método de expansão ortogonal e funções de Green. Os perfis de temperaturas evoluíram com o tempo para as soluções estacionárias garantindo a qualidade dos resultados obtidos.

Palavras-chave: Cilindros com Dupla Camada; Funções de Bessel; Troca de Calor por Convecção.

Abstract: Three special cases of temperature distribution in a cylindrical two-layer medium constituted by a fuel element known as thorium (*Th*) with aluminum coating (*Al*) were analyzed using the orthogonal expansion method and Green functions. The temperature profiles evolved over time to stationary solutions ensuring the quality of the results obtained.

Keywords: Two-layer Cylinders; Bessel Functions; Heat Exchange by Convection.

Resumen: Tres casos especiales de distribución de temperatura en un medio cilíndrico con dos capas compuestas de un elemento combustible conocido como torio (*Th*) con recubrimiento de aluminio (*Al*) fueron analizados mediante el método de expansión ortogonal y funciones de Green. Los perfiles de temperatura evolucionaron con el tiempo a soluciones estacionarias garantizando la calidad de los resultados obtenidos.

Palabras clave: Cilindros con dos Capas; Funciones de Bessel; Intercambio de Calor por Convección.

Data de submissão: 3 de setembro de 2021.

Data de aprovação: 7 de dezembro de 2021.

¹**Currículo sucinto:** Doutor em Modelagem Computacional pelo Instituto Politécnico do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) e professor associado da Faculdade de Formação de Professores da UERJ. **Contribuição de autoria:** Administração do Projeto, Análise Formal e Conceituação. **Contato:** jcaraujo_55@yahoo.com.br.

²**Currículo sucinto:** Doutora em Engenharia Mecânica pelo Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia, da Universidade Federal do Rio de Janeiro (COOPE-UFRJ) e professora associada da Faculdade de Formação de Professores da UERJ. **Contribuição de autoria:** Análise Formal, Curadoria de Dados, Escrita e Edição. **Contato:** rosagmarquez@yahoo.com.br.



1 Introdução

Segundo Hahn e Özisik (2012) a distribuição de temperaturas em regime transiente em um meio composto de várias camadas tem numerosas aplicações na engenharia. Por exemplo, a eletroforese capilar é uma técnica usada na separação e detecção de moléculas ou mesmo íons em uma determinada mistura, que pode ser de natureza química, biológica, etc. De acordo com Danieli (2005), a eletroforese emprega um tubo capilar constituído de um material dielétrico, em média de 50 cm de comprimento e com diâmetros interno e externo na ordem de nanômetros. Esses equipamentos são comumente utilizados em laboratórios de análises, hospitais e universidades, entre outros. Entretanto, o controle de temperatura no sistema é crucial para o bom desempenho do método, bem como da qualidade dos resultados. Uma forma de programar o controle de temperatura nesses tubos é por meio de uma condição convectiva na superfície externa do revestimento desses tubos em um fluido de resfriamento. Nesse sentido, é desejável que a camada cilíndrica de revestimento desse material tenha condutividade térmica elevada, de modo a aumentar junto à superfície uma maior troca de calor com esse fluido. Outra aplicação importante de cilindros multicamadas ocorre onde há geração de calor, como nas usinas nucleares e termoelétricas. Segundo Hussein (2011), a estrutura básica de reatores nucleares é relativamente simples: barras de combustível, Urânio ($U - 235$) mais barras de moderadores como o grafite (MAZZILLI; MADUAT; CAMPOS, 2011), e um refrigerador com água. A produção de calor no núcleo do reator se dá pelas varetas cilíndricas, denominadas de elemento combustível, ao sofrerem a fissão nuclear, isto é, a quebra de núcleos de átomos bem pesados quando bombardeados por nêutrons.

O lixo atômico como o Plutônio ($Pu - 239$) em reatores nucleares a base de $U - 235$ representa sérios riscos ao meio ambiente por conta de sua atividade radioativa decair lentamente (MAZZILLI; MADUAT; CAMPOS, 2011). Nesse sentido, reatores nucleares à base de Tório ($Th - 232$), que é um metal natural e de baixa radioatividade, além de serem mais eficientes que os baseados em $U - 235$, produzem rejeitos radioativos que decaem mais rapidamente (3 RAZÕES..., 2015). O controle de temperatura dos elementos combustíveis que estão inseridos no núcleo do reator é uma questão de segurança, ou seja, caso o ritmo da reação nuclear produza calor muito elevado, varetas de controle ou absorvedores, como o boro ou cádmio (PERROTTA, 1999), são introduzidos no núcleo com o objetivo de absorverem nêutrons a fim de desacelerarem a reação, controlando, desse modo, o calor produzido (WILSON, 1963). Ao redor do núcleo do reator corre um refrigerante líquido ou gasoso, que aquecido pelo calor liberado pela reação nuclear gera vapor de água, que é então canalizado para as turbinas, ou seja, segundo Perrotta (1999) a função do refrigerante



é retirar o calor gerado no núcleo do reator devido às fissões nucleares. Segundo Rodrigues e Mesquita (2017), revestimentos de alumínio do tipo AL11OF de espessura $0,76\text{ mm}$ são usados para encapsular elementos combustíveis cilíndricos de hidreto de urânio-zircônio de diâmetro $37,7\text{ mm}$ no reator nuclear de pesquisa Triga IPR-R1, localizado no *Campus* da UFMG. Essas ligas de alumínio são também usadas como encamisantes térmicos de outros elementos combustíveis, como os já destacados anteriormente.

O alumínio (*Al*) tem elevada condutividade térmica, boa resistência à corrosão, baixa seção de captura de nêutrons térmicos, disponibilidade e baixo custo (PERROTTA, 1999). O objetivo desse trabalho é utilizar um modelo simplificado de um elemento combustível de Tório (*Th*), em um longo e fino tubo cilíndrico revestido por uma camada delgada de alumínio, para analisar a distribuição de temperaturas transiente nesse meio de dupla camada na geometria 1-D, com condições de Cauchy (convecção) e de Dirichlet (temperatura prescrita). Segundo Fox, Pritchard e McDonald (2015), a análise 1-D é adequada para fornecer soluções aproximadas com boa acuracidade em muitos problemas de engenharia. Em particular, no presente estudo, os cilindros circulares longos e finos, isto é, cilindros onde $L/r_o > 10$ com $r_o < 0.1\text{m}$, são adequados a uma análise 1-D por atenderem ao requisito de simetria radial, $\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0$ (ZILL; WRIGHT; CULLEN, 2011).

A formulação matemática desse problema de condução de calor em um meio composto, com geração de energia e em regime transiente, é dada por uma equação diferencial parcial linear não homogênea (HAHN; ÖZISIK, 2012).

Para obter uma solução aproximada para esse problema não homogêneo foi usada a técnica de expansão ortogonal, que envolve a separação de variáveis de modo a resolver a versão homogênea desse problema (HAHN; ÖZISIK, 2012). Essa técnica começou a ser desenvolvida por Vodicka (1950, 1955, *apud* COBBLE, 1970) em problemas desse tipo. As soluções obtidas pelo referido autor são baseadas em relações de ortogonalidade. Entretanto, foi Cobble (1970) que apresentou um artigo em que resolvia problemas unidimensionais mais gerais de transferência de calor por condução, envolvendo barras, cilindros e esferas multicamadas, onde é descrita a técnica de expansão ortogonal. Essa técnica é apresentada por Hahn e Özisik (2012) e, a partir dela, pode ser obtida a solução do problema homogêneo associado. Com essa solução homogênea, é determinada a função de Green para uma aproximação da solução do problema não homogêneo com geração de calor (HAHN; ÖZISIK, 2012). Segundo Fernandes (2009), a grande força das funções de Green está na possibilidade de obtenção de soluções de problemas de condução de calor dos tipos mais variados e complexos. Além disso, as soluções analíticas de vários modelos térmicos



1D, 2D e 3D transientes podem ser também usados para validações de modelos numéricos em processos de usinagem. De modo a subsidiar a qualidade dos resultados obtidos nesse estudo, das soluções aproximadas para os problemas aqui analisados, foram desenvolvidas as suas equações estacionárias.

2 Materiais e Métodos

Nessa seção, apresenta-se a formulação matemática unidimensional do problema de distribuição de temperatura T com geração de calor, em regime transiente, envolvendo um cilindro sólido circular infinito de dupla camada, uma interna de tório (Th), e a mais externa de alumínio (Al), onde se encontram em contato térmico perfeito. Condições convectivas e de Dirichlet são estabelecidas na superfície externa visando a analisar o comportamento do perfil dessas temperaturas. Também a técnica da expansão ortogonal para resolver problemas homogêneos multicamadas é apresentado de forma resumida, bem como, por meio dela, é obtida a função de Green associada ao problema não homogêneo.

2.1 A formulação matemática 1-D

A Figura 1 mostra um cilindro sólido circular infinito com duas camadas, formadas pelo metal tório (Th) na região interna e alumínio (Al) de revestimento na região externa. Essas camadas são homogêneas e isotrópicas e estão em perfeito contato térmico. Inicialmente essas regiões têm temperaturas iniciais dadas respectivamente pelas funções $F_1(r)$ e $F_2(r)$. Para tempos $t > 0$, o calor é gerado pelo Th de modo uniforme a uma taxa constante $g_1(r, t) = g_0 \text{ W/m}^3$. A superfície em $r = b$ satisfaz a equação linear dada por $k_2^* \frac{\partial T_2}{\partial r} + h_3^* T_2 = h_3^* T_{\infty 3}$, onde k_2^* e h_3^* são constantes.

A formulação matemática desse problema é dada segundo Hahn e Özisik (2012) na forma

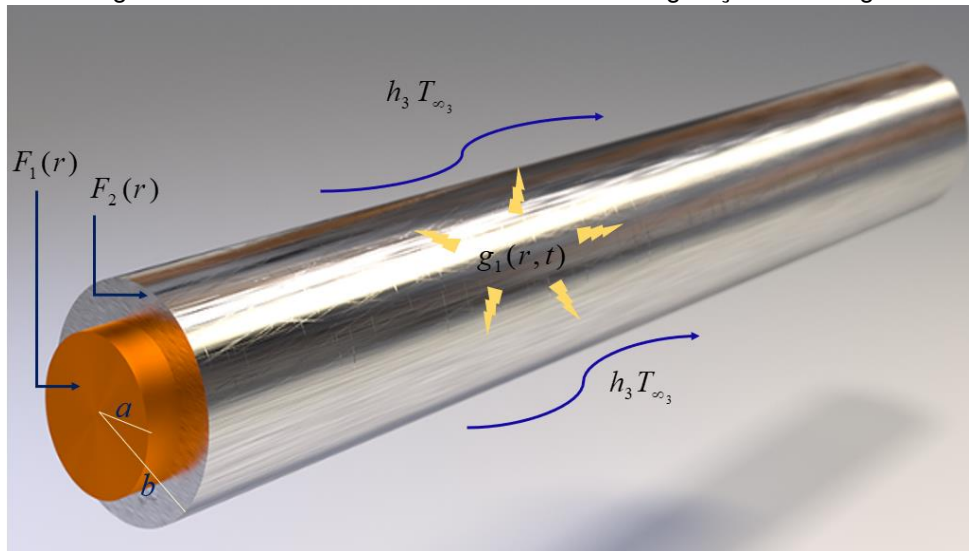
$$\kappa_1 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r \partial T_1}{\partial r} \right) + \frac{\kappa_1}{k_1} g_1(r, t) = \frac{\partial T_1}{\partial t}, \quad 0 < r < a, \quad t > 0, \quad (1a)$$

$$\kappa_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r \partial T_2}{\partial r} \right) = \frac{\partial T_2}{\partial t}, \quad a < r < b, \quad t > 0, \quad (1b)$$

sujeita às condições de fronteira dadas por



Figura 1 – Cilindro infinito com duas camadas e geração de energia



Fonte: Elaboração dos autores.

$$CF1 : \quad \lim_{r \rightarrow 0} T_1(r, t) < \infty. \tag{2a}$$

$$CF2 : \quad T_1(a, t) = T_2(a, t), \quad t > 0, \tag{2b}$$

$$CF3 : \quad k_1 \frac{\partial T_1}{\partial r}(a, t) = k_2 \frac{\partial T_2}{\partial r}(a, t), \quad t > 0, \tag{2c}$$

$$CF4 : \quad k_2^* \frac{\partial T_2}{\partial r}(b, t) + h_3^* T_2(b, t) = h_3^* T_{\infty_3}, \quad t > 0, \tag{2d}$$

e com as condições iniciais (C.I.) na forma

$$T_1(r, 0) = F_1(r), \quad 0 \leq r < a \quad e \quad T_2(r, 0) = F_2(r), \quad a < r < b. \tag{3}$$

2.2 A técnica da expansão ortogonal

Como já foi dito anteriormente, a técnica da expansão ortogonal é usada para resolver problemas homogêneos em um meio multicamadas, e aqui será apresentada resumidamente para 1-D em um meio composto de duas regiões com base na descrição proposta por Hahn e Özisik (2012).

A versão homogênea das equações (1) e (2) fica na forma dada por

$$\kappa_1 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_1}{\partial r} \right) = \frac{\partial \theta_1}{\partial t}, \quad 0 < r < a, \quad t > 0, \tag{4a}$$

$$\kappa_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_2}{\partial r} \right) = \frac{\partial \theta_2}{\partial t}, \quad a < r < b, \quad t > 0. \tag{4b}$$



com as condições de fronteira na forma

$$CF1 : \quad \lim_{r \rightarrow 0} \theta_1(r, t) < \infty, \quad (5a)$$

$$CF2 : \quad \theta_1(a, t) = \theta_2(a, t), \quad t > 0, \quad (5b)$$

$$CF3 : \quad k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial r}(a, t) = k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial r}(a, t), \quad t > 0, \quad (5c)$$

$$CF4 : \quad k_2^* \frac{\partial \theta_2}{\partial r}(b, t) + h_3^* \theta_2(b, t) = 0, \quad t > 0, \quad (5d)$$

onde as condições iniciais são dadas por

$$\theta_1(r, 0) = F_1(r), \quad 0 \leq r < a \quad \text{e} \quad \theta_2(r, 0) = F_2(r), \quad a < r < b. \quad (6)$$

Como as condições de fronteira são todas homogêneas, o método de separação de variáveis pode ser utilizado, isto é,

$$\theta_i(r, t) = \psi_i(r)G(t), \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

Substituindo a equação (7) na equação (4) tem-se a equação dada por

$$\kappa_i \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\psi_i}{dr} \right) = \frac{1}{G} \frac{dG}{dt} = -\beta^2, \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

onde β é uma constante de separação. Da equação (8) resultam duas equações diferenciais ordinárias lineares dadas como

$$\frac{dG}{dt} + \beta_n^2 G = 0, \quad t > 0, \quad (9)$$

e

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\psi_{in}}{dr} \right) + \frac{\beta_n^2}{\kappa_i} \psi_{in}, \quad 0 \leq r < a \quad (i = 1) \quad \text{e} \quad a < r < b \quad (i = 2), \quad (10)$$

onde $\psi_{in} \equiv \psi_i(\beta_n, r)$ sendo $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n < \dots$, os autovalores associados às autofunções ψ_{in} , com $i = 1, 2$ e $n = 1, 2, \dots$. A equação (9) pode ser resolvida por separação de variáveis para obter

$$G(t) = c_1 e^{-\beta_n^2 t}. \quad (11)$$

A equação (10) dá origem às equações de Bessel de ordem $v = 0$, cuja solução geral dessa equação é dada na forma (HAHN; ÖZISIK, 2012)

$$\psi_{in}(r) = A_{in} J_0 \left(\frac{\beta_n r}{\sqrt{\kappa_i}} \right) + B_{in} Y_0 \left(\frac{\beta_n r}{\sqrt{\kappa_i}} \right), \quad i = 1, 2, \quad (12)$$



onde J_0 e Y_0 são respectivamente as funções de Bessel de primeira e segunda espécie de ordem zero. Das equações (5), (7) e (11), cada $\psi_{in}(r)$ satisfaz as seguintes condições de fronteira

$$CF1 : \quad \lim_{r \rightarrow 0} \psi_{1n}(r) < \infty, \tag{13}$$

$$CF2 : \quad \psi_{1n}(a) = \psi_{2n}(a), \tag{14}$$

$$CF3 : \quad k_1 \frac{d\psi_{1n}}{dr}(a) = k_2 \frac{d\psi_{2n}}{dr}(a), \tag{15}$$

$$CF4 : \quad k_2^* \frac{d\psi_{2n}}{dr}(b) + h_3^* \psi_{2n}(b) = 0. \tag{16}$$

Essas autofunções $\psi_{in}(r)$ satisfazem as condições de ortogonalidade dada pela equação (17) (HAHN; ÖZISIK, 2012),

$$\sum_{i=1}^{M=2} \frac{k_i}{\kappa_i} \int_{r=r_i}^{r_{i+1}} r \psi_{in}(r) \psi_{iq}(r) dr = \begin{cases} 0, & n \neq q \\ N_n, & n = q \end{cases} \tag{17}$$

ou seja,

$$N_n = \sum_{i=1}^{M=2} \frac{k_i}{\kappa_i} \int_{r=r_i}^{r_{i+1}} r [\psi_{in}(r)]^2 dr, \tag{18}$$

onde N_n é denominada norma da autofunção ψ_{in} , com $r_1 = 0, r_2 = a$ e $r_3 = b$.

Das equações (12) e (13) tem-se $B_{1n} = 0$, pois, caso contrário, o segundo termo da função de Bessel que aparece na equação (12) seria ilimitado, em oposição à condição CF1 dada na equação (13). Portanto, ψ_{1n} pode ser obtida diretamente da equação (12) com o coeficiente $A_{1n} = 1$ (HAHN; ÖZISIK, 2012). Usando a equação (12) e as equações (14) a (16), resulta um sistema linear de terceira ordem e homogêneo, sendo A_{2n} e B_{2n} os coeficientes a serem determinados.

Para obter uma solução não trivial desse sistema impõe-se que o determinante da equação matricial seja igual a zero. Daí, tem-se uma equação transcendental, onde as incógnitas são os β_n . Para mais detalhes sobre essa matriz sugerimos a leitura de Hahn e Özisik (2012). Das equações (7), (11) e (12), a solução geral obtida para $\theta_i = \theta_i(r, t)$, $i = 1, 2$ é dada por

$$\theta_i(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\beta_n^2 t} \psi_{in}(r) \tag{19}$$

onde $\theta_i(r, t)$ satisfaz as diferentes equações dadas pela equação (4) com as condições de fronteiras reportadas pela equação (5). Das equações (6) e (19) tem-se

$$F_i(r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_{in}(r), \quad i = 1, 2. \tag{20}$$



Usando a relação de ortogonalidade dada pela equação (17) são obtidos os coeficientes c_n (HAHN; ÖZISIK, 2012) na forma

$$c_n = \frac{1}{N_n} \sum_{i=1}^{M=2} \frac{k_i}{\kappa_i} \int_{r=r_i}^{r_{i+1}} r \psi_{in}(r) F_i(r) dr, \quad (21)$$

com $r_1 = 0$, $r_2 = a$ e $r_3 = b$. Das equações (19) e (21) resulta a solução do problema homogêneo dada por

$$\theta_i(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n^2 t} \frac{\psi_{in}(r)}{N_n} \sum_{j=1}^{M=2} \frac{k_j}{\kappa_j} \int_{r'=r_i}^{r_{i+1}} r' \psi_{jn}(r') F_j(r') dr', \quad i = 1, 2. \quad (22)$$

com N_n dado como na equação (18), isto é,

$$N_n = \sum_{i=1}^{M=2} \frac{k_j}{\kappa_j} \int_{r'=r_i}^{r_{i+1}} r' [\psi_{jn}(r')]^2 dr'. \quad (23)$$

A função de Green para o problema não homogêneo é dada, segundo Hahn e Özisik (2012), por

$$G_{ij}(r, t, r', \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n^2 t} \frac{k_j}{\kappa_j} \frac{1}{N_n} \psi_{in}(r) \psi_{jn}(r'). \quad (24)$$

Usando a equação (24) podemos escrever a equação (22) em termos das funções de Green dadas na forma

$$\theta_i(r, t) = \sum_{j=1}^{M=2} \int_{r'=r_j}^{r_{j+1}} [G_{ij}(r, t, r', \tau)] \Big|_{\tau=0} F_j(r') r' dr'. \quad (25)$$

A solução do problema não homogêneo com geração de energia dado pelas equações (1) e (2), com $T_{\infty 3} = 0$, é dada pela equação (10-106) de Hahn e Özisik (2012) e foi aqui adaptada para o caso de um só meio com geração de calor na forma

$$T_i(r, t) = \int_{r'=0}^a [G_{i1}(r, t, r', \tau)] \Big|_{\tau=0} F_1(r') r' dr' + \int_{r'=a}^b [G_{i2}(r, t, r', \tau)] \Big|_{\tau=0} F_2(r') r' dr' + \quad (26)$$

$$+ \frac{\kappa_1}{k_1} \int_{\tau=0}^t d\tau \int_{r'=0}^a [G_{i1}(r, t, r', \tau)] \Big|_{\tau=0} g_1(r', \tau) r' dr', \quad i = 1, 2.$$

ou ainda das equações (25) e (26) na forma

$$T_i(r, t) = \theta_i(r, t) + \frac{\kappa_1}{k_1} \int_{\tau=0}^t d\tau \int_{r'=0}^a [G_{i1}(r, t, r', \tau)] \Big|_{\tau=0} g_1(r', \tau) r' dr', \quad i = 1, 2. \quad (27)$$

A equação (27) é a solução para o problema apresentado em termos de funções de Green.



3 Resultados e Discussões

Nesta seção são apresentadas três aplicações, nas quais vamos considerar as equações (1) a (3) com os parâmetros da Tabela 1.

Tabela 1 – Parâmetros utilizados.

Raio do cilindro de <i>Th</i>	$0 \leq r < a; \quad a = 0.05m$
Raio do cilindro do <i>Al</i>	$a \leq r < b; \quad b = 0.08m$
Condutividade térmica do <i>Th</i>	$k_1 = 54 \text{ W/m } ^\circ C$
Condutividade térmica do <i>Al</i>	$k_2 = 190 \text{ W/m } ^\circ C$
Difusividade térmica do <i>Th</i>	$\kappa_1 = 1.57 \times 10^{-6} \text{ m}^2/s$
Difusividade térmica do <i>Al</i>	$\kappa_2 = 80 \times 10^{-6} \text{ m}^2/s$
Temperatura de fusão do <i>Th</i>	$T_{fTh} = 1750 \text{ } ^\circ C$
Temperatura de fusão do <i>Al</i>	$T_{fAl} = 660 \text{ } ^\circ C$
Geração de energia uniforme do <i>Th</i>	1ª aplicação: $g_{11} = 2.48 \times 10^8 \text{ W/m}^3$
Geração de energia uniforme do <i>Th</i>	2ª aplicação: $g_{12} = 2.13 \times 10^8 \text{ W/m}^3$
Geração de energia uniforme do <i>Th</i>	3ª aplicação: $g_{13} = 7.15 \times 10^9 \text{ W/m}^3$
Comprimento do cilindro	$L = 0.70 \text{ m}$
Coef. de troca de calor com o meio externo	$h_3 = 100 \text{ W/m}^2 \text{ } ^\circ C$
Condição inicial	$F_1(r) = 30 \text{ } ^\circ C \text{ e } F_2(r) = 30 \text{ } ^\circ C$

Fonte: Dados extraídos de INCROPERA (2008).

Os dados disponíveis na Tabela 1, referentes à condutibilidade térmica, difusividade térmica e temperatura de fusão dos materiais envolvidos podem ser encontrados de modo aproximado nas referências (HAHN; ÖZISIK, 2012) e (INCROPERA, 2008). Todos os parâmetros dependentes do tempo (Tabela 1) foram ajustados para minutos, o mesmo ocorrendo para a temperatura que será em graus Celsius.

3.1 Aplicação 1

A condição CF4 dada pela equação (2) representa a troca de calor por convecção para um meio de temperatura zero, isto é, $T_{\infty 3} = 0$,

$$k_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} + h_3 T_2 = 0; \quad r = b \tag{28}$$

com o elemento combustível gerando energia uniforme à taxa constante, $g_{11} = 2.48 \times 10^8 \text{ W/m}^3$ (Tabela 1). Com o objetivo de validar de um modo indireto a solução desse problema de condução



de calor em um meio composto, foi desenvolvida a solução estacionária. Segundo Carslaw e Jaeger (2011), um cilindro com geração de energia constante (g_0) em regime estacionário com fluxo radial tem sua distribuição de temperatura dada pela equação

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_1}{dr} \right) + \frac{g_0}{k_1} = 0, \quad 0 \leq r < a. \tag{29}$$

Ainda, segundo os referidos autores, se o sólido em questão é um cilindro oco em regime estacionário, a temperatura pode ser representada por

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_2}{dr} \right) + \frac{g_0}{k_1} = 0, \quad a < r < b. \tag{30}$$

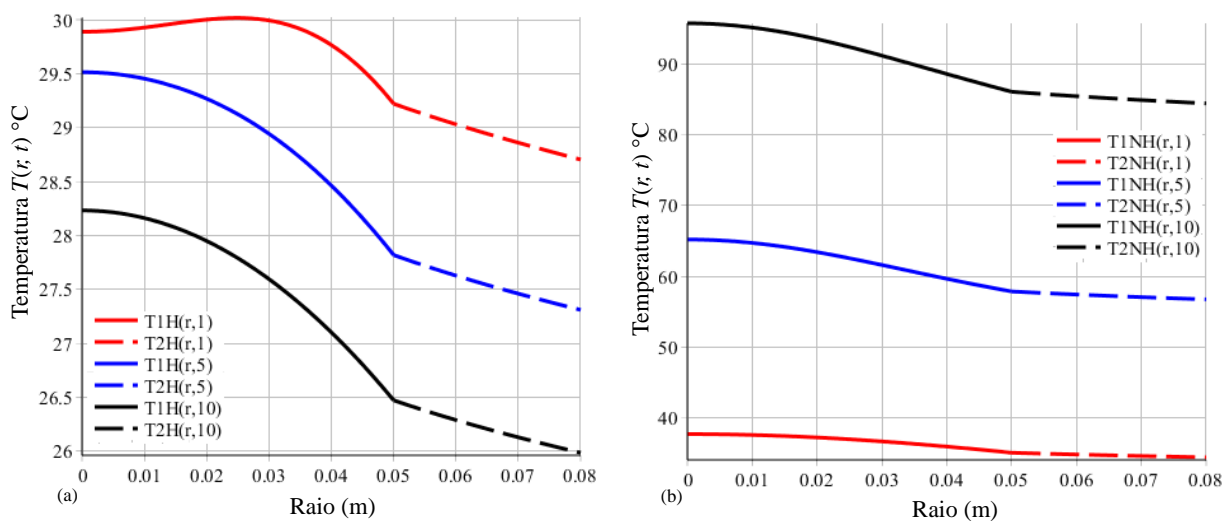
Essas equações têm que satisfazer as condições de fronteira e de interfaces dadas pela equação (2), onde a variável temporal deve ser ignorada. A solução geral da equação homogênea associada à equação (29) é dada por

$$v_1 = A_1 + B_1 \ln(r), \tag{31}$$

enquanto que a solução geral da equação homogênea associada à equação (30) fica na forma

$$v_2 = A_2 + B_2 \ln(r). \tag{32}$$

Figura 2 – Perfil de temperaturas no meio composto nos tempos $t = 1, t = 5$ e $t = 10 \text{ min}$: (a) sem geração e (b) com geração de energia.



Fonte: Elaboração dos autores a partir da Tabela 1 e de condições de fronteira estabelecidas pelos mesmos.

Combinando as equações (31) e (32) com as condições dadas pela equação (2), onde é considerada somente a variável espacial, são obtidas as soluções estacionárias de cada meio cons-



tituinte do cilindro sólido na forma

$$T_{1E} \equiv v_1 = \frac{g_0 a^2}{2h_3 b} + \frac{g_0 a^2}{2k_2} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{g_0(a^2 - r^2)}{4k_1}, \quad 0 \leq r < a, \tag{33}$$

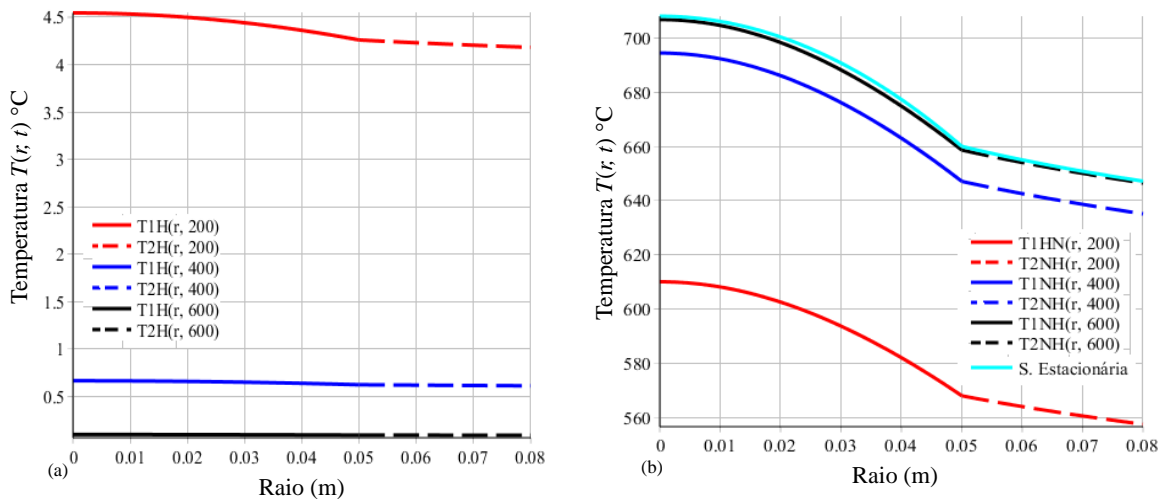
e

$$T_{2E} \equiv v_2 = \frac{g_0 a^2}{2h_3 b} + \frac{g_0 a^2}{2k_2} \ln\left(\frac{b}{r}\right), \quad a \leq r < b, \tag{34}$$

onde T_{1E} e T_{2E} são respectivamente as temperaturas estacionárias no elemento combustível, Th , e no revestimento, Al . A Figura 2 mostra perfis de temperaturas no cilindro com duas camadas considerando o caso homogêneo (sem geração de energia) e o caso não homogêneo com geração de energia, em três instantes de tempo abaixo de dez minutos.

Nota-se claramente a evolução crescente da distribuição de temperaturas com o aumento do tempo no interior do cilindro sólido, onde as menores temperaturas ocorrem no revestimento por conta da condição convectiva estabelecida. Depois de um tempo de 600 minutos, chega-se ao regime estacionário do sistema como pode ser visto na Figura 3(b).

Figura 3 – Perfil de temperaturas no meio composto nos tempos $t = 200, t = 400$ e $t = 600 \text{ min}$: (a) sem geração e (b) com geração de energia.



Fonte: Elaboração dos autores a partir da Tabela 1 e de condições de fronteira estabelecidas pelos mesmos.

É possível notar que com o aumento do tempo de operação, a solução do problema homogêneo vai convergindo a zero como era de se esperar, enquanto a solução não homogênea tende à solução estacionária do sistema dada pelas equações (33) e (34), confirmando, desse modo, mesmo que de forma indireta, a qualidade dos resultados obtidos pelo uso da equação (26) ou da equação (27). Com esses parâmetros, o sistema pode funcionar sem o risco de fusão dos elementos



envolvidos. Vale notar que as soluções aproximadas dos problemas com e sem geração de energia foram construídas usando somente dois autovalores $\beta_1 = 0.09805$ e $\beta_2 = 0.71326$.

3.2 Aplicação 2

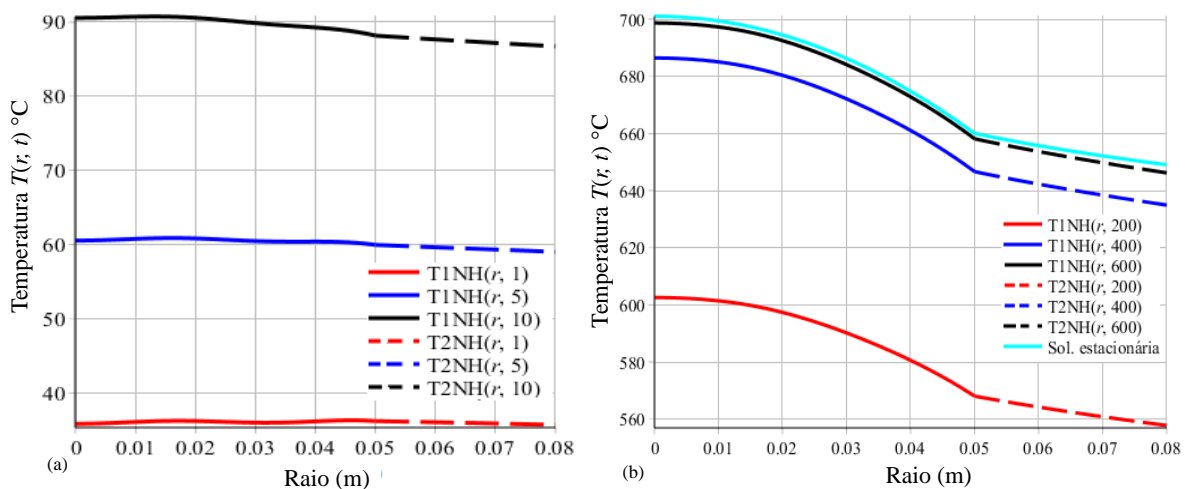
Fazendo $k_2^* = k_2$ e $h_3^* = h_3$ a condição CF4 dada pela equação (2) representa a troca de calor por convecção para um meio de temperatura $T_{\infty 3} = 95^\circ C$, isto é,

$$k_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} + h_3 T_2 = h_3 T_{\infty 3}, \quad r = b, \tag{35}$$

com o elemento combustível gerando energia uniforme a uma taxa constante, $g_{12} = 2.13 \times 10^8 \text{ W/m}^3$ (Tabela 1). Os parâmetros k_2^* e k_3^* representam quantidades que podem ser tratadas como coeficientes de modo que condições de fronteira de primeira e segunda espécie possam ser obtidas através desses números (HANH; ÖZISIK, 2012). As equações estacionárias para as temperaturas no *Th* e no *Al* podem ser obtidas diretamente das equações (33) e (34) adicionando o fator $T_{\infty 3}$ em cada uma delas.

A Figura 4 mostra alguns perfis de temperaturas no meio composto para diferentes instantes de tempo.

Figura 4 – Perfis de temperaturas com geração de energia: (a) regime transiente, nos tempos $t = 1, t = 5$ e $t = 10 \text{ min}$ e (b) regime estacionário, nos tempos $t = 200, t = 400$ e $t = 600 \text{ min}$.



Fonte: Elaboração dos autores a partir da Tabela 1 e de condições de fronteira estabelecidas pelos mesmos.



Novamente, é possível notar que com os parâmetros adotados, o que inclui a geração de energia uniforme máxima admitida, o sistema pode operar no limite da fusão de seus elementos constituintes. A solução aproximada desse problema não homogêneo com geração de energia foi construída usando quatro autovalores $\beta_1 = 0.0981$, $\beta_2 = 0.7132$, $\beta_3 = 1.2928$ e $\beta_4 = 1.8644$.

3.3 Aplicação 3

Fazendo $k_2^* = 0$ e $h_3^* = 1$, a condição CF4 dada pela equação (2) fica na forma

$$T_2(b, t) = 0, \quad (36)$$

e considerando o elemento combustível gerando energia uniforme à taxa máxima $g_{13} = 7.15 \times 10^9 \text{ W/m}^3$ (Tabela 1). Essa condição é conhecida como temperatura prescrita na superfície ou condição de Dirichlet.

A obtenção das soluções estacionárias em cada camada cilíndrica é feita de modo inteiramente análogo ao caso da aplicação 1. Portanto, as soluções estacionárias para esse caso são dadas por

$$T_{1E} \equiv v_1 = \frac{g_0(a^2 - r^2)}{4k_1} + \frac{g_0 a^2}{2k_2} \ln\left(\frac{b}{a}\right), \quad 0 \leq r < a, \quad (37)$$

e

$$T_{2E} \equiv v_2 = \frac{g_0 a^2}{2k_2} \ln\left(\frac{b}{r}\right), \quad a \leq r < b, \quad (38)$$

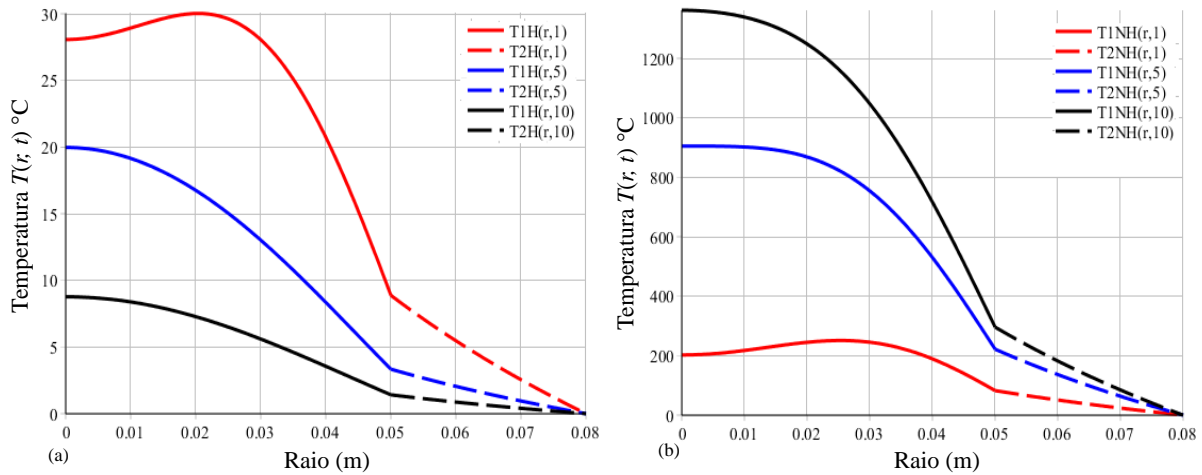
A Figura 5 mostra alguns perfis de temperaturas no cilindro com duas camadas considerando o caso homogêneo (sem geração de energia) e o caso não homogêneo com geração de energia em três instantes de tempo abaixo de dez minutos.

Na Figura 5(b) pode ser observado que a temperatura sobe muito mais rapidamente do que no caso da aplicação 1 e isso ocorre também no revestimento. A Figura 6 mostra os perfis das soluções obtidas para os problemas homogêneo e não homogêneo.

A Figura 6 mostra claramente que a solução transiente está convergindo para a solução estacionária em cada região e que o sistema opera no limite da fusão do elemento combustível. Vale notar que as soluções aproximadas dos problemas com e sem geração de energia foram construídas usando dois autovalores $\beta_1 = 0.40949$ e $\beta_2 = 0.94864$.

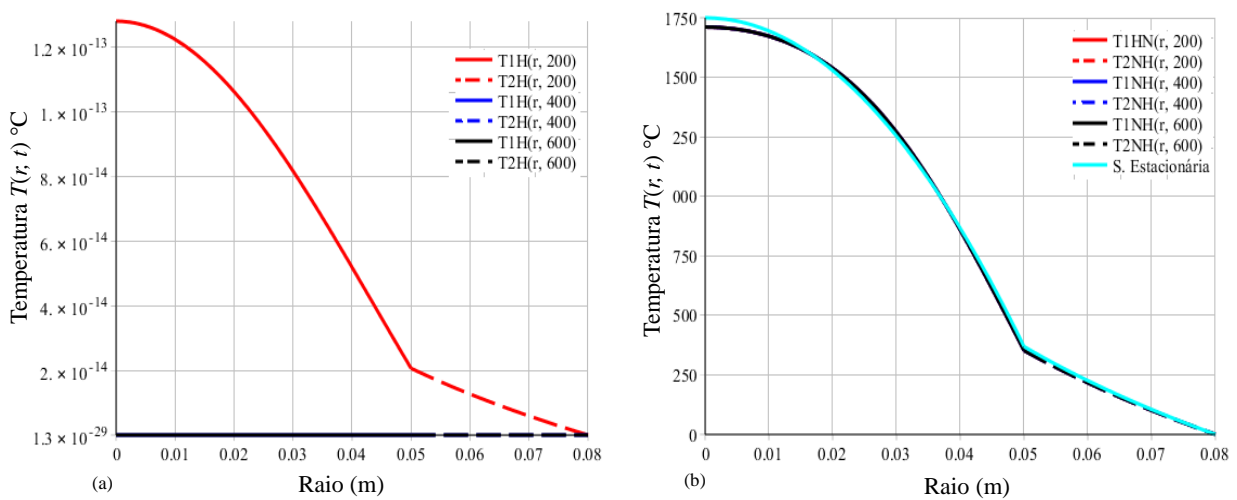


Figura 5 – Perfil de temperaturas no meio composto nos tempos $t = 1, t = 5$ e $t = 10 \text{ min}$: (a) sem geração e (b) com geração de energia.



Fonte: Elaboração dos autores a partir da Tabela 1 e de condições de fronteira estabelecidas pelos mesmos.

Figura 6 – Perfil de temperaturas no meio composto nos tempos $t = 200, t = 400$ e $t = 600 \text{ min}$. (a) sem geração e (b) com geração de energia.



Fonte: Elaboração dos autores a partir da Tabela 1 e de condições de fronteira estabelecidas pelos mesmos.



4 Conclusões

Três casos especiais de cilindros em camadas com geração de energia na região interna são analisados com respeito à distribuição de temperaturas em cada meio. Cada cilindro é composto de uma região interna formada pelo elemento combustível tório (Th), que gera energia de modo uniforme, envolto por um revestimento delgado de alumínio (Al), onde são impostas condições convectivas e de Dirichlet nessa superfície externa. As aproximações das soluções para a distribuição de temperaturas em cada meio foram obtidas usando a técnica de expansão ortogonal e as funções de Green. Os perfis de temperatura obtidos com essa metodologia convergiram para as soluções estacionárias de cada caso analisado, confirmando, desse modo, a qualidade dos resultados teóricos obtidos. Embora a geração de energia fosse uniforme, esse problema pode ser analisado para casos mais gerais de geração de calor com o uso de funções de Green possibilitando que as soluções aproximadas também possam ser usadas para a validação e o aumento de precisão de soluções numéricas.

Referências

3 RAZÕES pelas quais a energia nuclear é incrível! 3/3. [S. l.: s. n.] 2015. 1 vídeo (4 min). Publicado pelo canal Kurzgesagt in a nuts hell. Disponível em: www.youtube.com/watch?v=pVbLlnmxIbY&t=6s. Acesso em: 31 mar. 2021.

CARSLAW, H. S.; JAEGER, J. C. **Conduction of heat in solids**. 2. ed. Oxford: Clarendon Press, 2011.

COBBLE, M. H. Heat transfer in composite media subject to distributed sources, and time-dependent discrete sources and surroundings. **Journal of the Franklin Institute**. v. 290, n. 5, p. 453-465, nov. 1970. DOI: [https://doi.org/10.1016/0016-0032\(70\)90005-0](https://doi.org/10.1016/0016-0032(70)90005-0).

DANIELI, R. **Transferência de calor e controle de temperatura em tubos capilares utilizados em eletroforese capilar**. Orientador: Paulo Smith Schneider. 2005. 88 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2005.

FERNANDES, A. P. **Funções de Green: soluções analíticas aplicadas em problemas inversos de condução de calor**. Orientador: Gilmar Guimarães. 2009, 128 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais, 2009.

FOX, R. W.; PRITCHARD, P. J.; MCDONALD, A. T. **Introdução à mecânica dos fluidos**. Tradução e revisão técnica de Ricardo Nicolau Nassar Koury e Luiz Machado. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

HAHN, D. W.; ÖZISIK, M. N. **Heat conduction**. Hoboken: John Wiley & Sons, 2012.



HUSSEIN, M. S. Energia nuclear. **Revista USP**, v. 91, p. 56-63, 2011. DOI: <https://doi.org/10.11606/issn.2316-9036.v0i91p56-63>.

INCROPERA, F. P. **Fundamentos de transferência de calor e de massa**. Tradução e revisão técnica de Eduardo Mach Queiroz e Fernando Luiz Pellegrini Pessoa. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

MAZZILLI, B. P.; MÁDUAR, M. F.; CAMPOS, M. P. **Radioatividade no meio ambiente e avaliação de impacto radiológico ambiental**. [S. l.]: Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, Universidade de São Paulo, São Paulo, [2011].

PERROTTA, J. A. **Curso de introdução à engenharia do núcleo de reatores**. jul. 1999. Disponível em: https://www.ipen.br/portal_por/conteudo/posgraduacao/arquivos/200906040956360-apperrotta.pdf. Acesso em: 5 jan. 2020.

RODRIGUES, R. R.; MESQUITA, A. Z. Desenvolvimento de sistema para inspeção de elementos combustíveis de reatores nucleares de pesquisa Triga. **Revista Tecnológica**, v. 38, n. 2, n. 1-13, dez. 2017.

WILSON, M. A. **Energy**. New York: Time-Life Books, 1963.

ZILL, D. G.; WRIGHT, W. S.; CULLEN, M. R. **Matemáticas Avanzadas para Ingeniería**. 4. ed. Mexico: McGraw-Hill, 2011.

