Sequência de somas de números racionais

Digital root sequence of a rational number

Eudes Antonio Costa[1]
Universidade Federal do Tocantis (UFT), Arraias, TO, Brasil
https://orcid.org/0000-0001-6684-9961, http://lattes.cnpq.br/8731273940556992
Keidna Cristiane Oliveira Souza[2]
Universidade Federal do Tocantis (UFT), Arraias, TO, Brasil
https://orcid.org/0000-0001-8404-7380, http://lattes.cnpq.br/9847721962585782

Resumo: Neste trabalho estudamos a aplicação S, soma dos algarismos, para os números racionais. A aplicação S é bem conhecida em números inteiros, principalmente em problemas olímpicos (IZMIRLI, 2014; ZEITZ, 1999). Costa *et al.* (2021) estenderam a aplicação S a um número racional positivo x com representação decimal finita. Destacamos o seguinte resultado: dado um número racional positivo x, com representação decimal finita, e soma dos seus algarismos 9, quando x é dividido por potências de 2 ou 5, o número resultante mantém a soma dos seus algarismos igual a 9. Aquele estudo foi motivado pela afirmação atribuída a Nikola Tesla (1856-1943) (COSTA *et al.*, 2021), ao dividirmos (ou multiplicarmos) consecutivamente por 2 os algarismos do ângulo 360^o, associado geometricamente à uma circunferência, os ângulos (medido em grau) resultantes têm a propriedade de que a soma dos algarismos é (sempre) igual a 9. Por exemplo, temos que $S(360) = 9$, assim também teremos que $S(180) = S(90) = S(45) = S(22,5) = S(11,25) = 9$. Aqui estenderemos a aplicação S a qualquer número racional positivo x. Nosso intento é apresentar algumas propriedades relacionadas à aplicação S para todo número $x \in \mathbb{Q}_+$.

Palavras-chave: Congruência; Soma Iterada de Algarismos; Número Racional.

Abstract: In this, we study the digital sum application, S, for rational numbers. The applications S is well known in integers, mainly in olympic problems (IZMIRLI, 2014; ZEITZ, 1999). Costa *et al.* (2021) extended the application S and to a positive rational number x with finite decimal representation. We highlight the following results: given a positive rational number x, with finite decimal representation, and the sum of its digits 9, then when x is divided by powers of 2 or 5, the resulting number the digital root is equal to 9. These properties were motivated by the statement attributed to Nikola Tesla (1856-1943) (COSTA *et al.*, 2021), that by dividing (or multiplying) consecutively by 2 the numbers of the angle 360^o, geometrically associated with a circumference, the resulting angles (measured in degree) have the property that the sum of the figures is (always) equal to 9. For

[1]**Currículo sucinto**: Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Goiás, doutor em Matemática pela Universidade de Brasília, docente da Universidade Federal do Tocantins, Arraias. **Contribuição de autoria**: Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição. **Contato**: eudes@uft.edu.br.

[2]**Currículo sucinto**: Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Tocantins, doutora em Matemática pela Universidade de Brasília, docente da Universidade Federal do Tocantins, Arraias. **Contribuição de autoria**: Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição. **Contato**: keidna@uft.edu.br.

example, we have that $S(360) = 9$, so we will also have that $S(180) = S(90) = S(45) = S(22.5) = S(11.25) = 9$. In these notes we will extend the application S to a positive rational number x. Our intent is to present some properties and applications for every number $x \in \mathbb{Q}_+$.

Keywords: Congruence; Digital Root; Rational Number.

Data de submissão: 28 de julho de 2021.

Data de aprovação: 14 de dezembro de 2021.

1 Introdução

Nestas notas consideramos **número** sendo um elemento do conjunto dos números inteiros positivos, ou naturais, representado por $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ no sistema decimal posicional (base 10). A **soma de algarismos** de um número n, é obtido pela adição dos seus algarismos. Formalmente, temos a definição a seguir.

Definição 1.1. *A **aplicação soma de algarismos** S é uma aplicação que a cada número n na forma*

$$n_l n_{l-1} \cdots n_1 n_0 \ , \quad \textit{com } l \in \mathbb{N},$$

associa ao número m

$$S(n) = n_l + n_{l-1} + \cdots + n_1 + n_0 := m \ .$$

Exemplo 1.2. *Segue da Definição 1.1 que $S(2021) = 2 + 0 + 2 + 1 = 5$. Ademais, $S(123456789) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$ e $S(45) = S(S(123456)) = 9$.*

No último caso, aplicamos S ao número $m = S(n)$ para $n = 123456789$; chamamos este processo de **iteração**, e o conjunto de iterações de **órbita**. De modo geral, temos a definição a seguir.

Definição 1.3. *(a) Seja S a aplicação soma de algarismos do número $n \in \mathbb{Z}_+$. As iterações de S são definidas por*

$$S^1(n) = S(n), \ S^t(n) = S(S^{t-1}(n)), \ t \geq 2.$$

(b) A órbita *de um número $n \in \mathbb{Z}_+$, $\mathcal{O}(n)$, é o conjunto $\{n, S(n), S^2(n), \ldots, S^k(n), \ldots\}$.*

Exemplo 1.4. *Conforme a Definição 1.3, temos que $S(\underbrace{99\ldots99}_{2022}) = 18198$. Veja ainda que $S(18198) = S\big(S(\underbrace{99\ldots99}_{2022})\big) = 27$ e $S(27) = S\Bigg(S\big(S(\underbrace{99\ldots99}_{2022})\big)\Bigg) = 9$. Portanto, $S^3(\underbrace{99\ldots99}_{2022}) = 9$.*

O resultado do Teorema a seguir é bem conhecido.

Teorema 1.5. *(IZMIRLI, 2014, Theorem 1.1; ZEITZ, 1999, Problem 7.2.11) Seja n um número inteiro positivo e denotamos por $S(n)$ a soma dos algarismos de n. Num número finito de iterações, a órbita*

$$\mathcal{O}(n) = \{n, S(n), S^2(n), \ldots, S^k(n), \cdots\}$$

se torna constante.

Segue do Teorema 1.5 que a órbita de n, ou seja, a sequência $\mathcal{O}(n) = \{S^k(n)\}_{k\in\mathbb{N}}$, tornar-se-á constante a partir de um certo índice k_0. Vamos denotar por $S^*(n) = S^{k_0}(n)$ o valor constante que denominaremos de **soma iterada dos algarismos** do número inteiro positivo n; neste caso diremos que $S^*(n)$ está definida ou, ainda, que existe ou ocorre.

Exemplo 1.6. *(COSTA et al., 2021, p. 3) Vamos determinar por $S^*(n)$ a soma iterada dos algarismos do número natural $n = \underbrace{\underbrace{2020}\underbrace{2020}\ldots\underbrace{2020}}_{2021 \text{ vezes}}$. Inicialmente, observemos que $S(2020) = 4$ e, assim, para $n = \underbrace{\underbrace{2020}\underbrace{2020}\ldots\underbrace{2020}}_{2021 \text{ vezes}}$, temos que*

$$\begin{aligned} S(n) &= 2021 \times S(2020) \\ &= \underbrace{4 + 4 + \ldots + 4}_{2021 \text{ vezes}} \\ &= 2021 \times 4 = 8084\,. \end{aligned}$$

Como $S(8084) = 20$, segue que $S(20) = S^*(n) = 2$.

2 A aplicação S^* em uma fração decimal

Dado o conjunto dos números inteiros positivos $\mathbb{Z}_+$, uma fração positiva não nula é representada por $\frac{a}{b}$, sendo $a, b \in \mathbb{Z}_+$ e a, b não nulos. O conjunto de todas as frações positivas não nulas $\frac{a}{b}$, indicado pelo conjunto $\mathbb{Q}_+$, é denominado de número racional positivo (não nulo), conforme Silva (2003) e Hefez (2013). Por comodidade escreveremos apenas que $x = \frac{a}{b}$ é um número racional positivo para indicar um elemento $x \in \mathbb{Q}_+$; se $mdc(a, b) = 1$, então dizemos que x está escrita na forma irredutível.

Denotamos por $\mathbb{Q}_+^f \subset \mathbb{Q}_+$ o conjunto dos números racionais $\frac{a}{b}$ que possuem representação decimal finita, ou seja, escrevemos x na forma

$$x = x_l x_{l-1} \cdots x_1 x_0\ ,\ x_{-1} x_{-2} \cdots x_{-m} = \frac{x_l x_{l-1} \cdots x_1 x_0 x_{-1} x_{-2} \cdots x_{-m}}{10^m},$$

CC BY

para l e m naturais e, ainda, chamamos de **fração decimal** uma fração cujo denominador é uma potência de 10. A definição a seguir apresenta a aplicação soma de algarismos para uma fração decimal.

Definição 2.1. *(COSTA et al., 2021, p. 8) A* aplicação soma de algarismos S *é uma aplicação que a cada* $x \in \mathbb{Q}_+^f$ *associa ao número racional positivo* $y = \frac{S(a)}{S(b)}$.

Teorema 2.2. *(COSTA et al., 2021, p. 8) Sejam x um número racional positivo com representação decimal finita e $S(x)$ a soma dos algarismos de x. Num número finito de iterações, a órbita*

$$\mathcal{O}(n) = \{x, S(x), S^2(x), \ldots, S^k(x), \cdots\}$$

se torna constante.

Exemplo 2.3. *Temos que a fração decimal* $x = 2019,2020 = \dfrac{20192020}{10^4}$. *Daí,* $S(2019,2020) = \dfrac{S(20192020)}{S(10^4)}$. *Disso concluímos que*

$$S(2019,2020) = \frac{S(20192020)}{S(10^4)} = \frac{2+0+1+9+2+0+2+0}{1} = 16.$$

Segue do Teorema 2.2 que a órbita de x, ou seja, a sequência $\{S^k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ tornar-se-á constante a partir de um certo índice k_0. Neste caso, também vamos denotar por $S^*(x) = S^{k_0}(x)$ o valor constante, o qual denominamos **soma iterada de algarismos** da fração decimal; ainda dizemos que $S^*(x)$ está definida ou existe.

Exemplo 2.4. *Veja que* $S(337,333) = 3+3+7+3+3+3 = 22$*, enquanto que* $S(2019,20202021) = 21$.

Proposição 2.5. *Sejam* $x = \frac{a}{10^m}$ *e* $y = \frac{c}{10^n}$*, para m e n naturais, frações decimais com* $S(a) = S(c)$. *Então,* $S^*(x) = S^*(y)$.

Prova. *Para quaisquer m, n naturais, temos que* $S(10^m) = S(10^n) = 1$ *e, assim,*

$$S(x) = \frac{S(a)}{S(10^m)} = \frac{S(a)}{S(10^n)} = \frac{S(c)}{S(10^n)} = S(y)\ .$$

Daí decorre que

$$S^k(x) = S^k(y)\ \text{, para qualquer natural } k. \tag{1}$$

Segue do Teorema 2.2 que $S^*(x)$ e $S^*(y)$ existem e, em razão da Equação (1), obtemos o resultado.

Exemplo 2.6. *Dados* $x = \dfrac{44}{10}$, $y = \dfrac{8}{10^4}$ *e* $z = \dfrac{1232}{10^2}$*, segue que* $S^*(x) = S^*(y) = S^*(z)$.

Observação 2.7. *Dado o número $x \in \mathbb{Q}_+^f$, como $x = \dfrac{x_l x_{l-1} \cdots x_1 x_0 x_{-1} x_{-2} \cdots x_{-m}}{10^m}$, de uma forma direta, podemos considerar*

$$\begin{aligned} S(x) &= S(x_l x_{l-1} \cdots x_1 x_0, x_{-1} x_{-2} \cdots x_{-m}) \\ &= x_l + x_{l-1} + \cdots + x_1 + x_0 + x_{-1} + x_{-2} + \cdots + x_{-m} \\ &= S(x_l x_{l-1} \cdots x_1 x_0 x_{-1} x_{-2} \cdots x_{-m})\,. \end{aligned}$$

Exemplo 2.8. *Dado o número racional $x = 2021, 2020$, segue do Teorema 2.2, e da Observação 2.7, que $S^*(x) = 9$.*

Sabemos que um número racional $x = \frac{a}{b}$ admite representação decimal finita apenas quando, escrito na forma irredutível, a decomposição em fatores primos de seu denominador possui apenas os fatores 2 ou 5. Temos as propriedades a seguir como consequência da aplicação soma dos algarismos.

Proposição 2.9. *(COSTA et al., 2021, p. 9) Seja $x = x_l x_{l-1} \dots x_1 x_0\ ,\ x_{-1} \dots x_{-m} \in \mathbb{Q}_+^f$. Se $S^*(x) = 9$, então $S^*\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = 9$, para todo n natural.*

Exemplo 2.10. *Veja que $S^*(3, 6) = 3 + 6 = 9$, bem como $S^*(11, 25) = 1 + 1 + 2 + 5 = 9$.*

De modo similar à Proposição 2.9, temos a proposição a seguir.

Proposição 2.11. *(COSTA et al., 2021, p. 10) Seja $x = x_l x_{l-1} \dots x_1 x_0\ ,\ x_{-1} \dots x_{-m} \in \mathbb{Q}_+^f$. Se $S(x) = 9$ então $S^*\left(\dfrac{x}{5^n}\right) = 9$, para todo n natural.*

3 A Aplicação S^* em $\mathbb{Q}_+$

Seja $x = \frac{a}{b}$ uma fração, caso x seja uma fração não decimal, ou seja, $x \notin \mathbb{Q}_+^f$, tomamos x na forma irredutível, isto é, temos $mdc(a, b) = 1$. De agora em diante, x é uma fração decimal ou irredutível (não decimal).

Definição 3.1. *A **aplicação soma de algarismos** S é uma aplicação em que, a cada $x = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+$, associa o número racional positivo $y = \dfrac{S(a)}{S(b)}$.*

Exemplo 3.2.

- *O número racional $x = \dfrac{2019}{2020}$, tem soma de algarismos igual a*

$$S\left(\frac{2019}{2020}\right) = \frac{S(2019)}{S(2020)} = \frac{12}{4} = 3.$$

CC BY

COSTA, Eudes Antonio; SOUZA, Keidna Cristiane Oliveira. Sequência de somas de números racionais.
REMAT: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 8, n. 1, p. e3004, 24 de abril de 2022.
https://doi.org/10.35819/remat2022v8i1id5326.

- *Enquanto que o número racional* $x = \dfrac{2019}{2021}$*, tem soma de algarismos igual a*

$$S\left(\frac{2019}{2021}\right) = \frac{S(2019)}{S(2021)} = \frac{12}{5}.$$

- *Já o número racional* $x = \dfrac{337333}{2021}$*, tem soma de algarismos igual a* $\dfrac{22}{5}$*. Como* $\dfrac{22}{5}$ *é uma fração decimal, isto é,* $\dfrac{22}{5} = \dfrac{44}{10} = 4,4$*, segue que* $S^2\left(\dfrac{337333}{2021}\right) = S\left(S\left(\dfrac{337333}{2021}\right)\right) = 4+4 = 8.$

Definição 3.3. *(a) Seja S a aplicação soma de algarismos de um número $x \in \mathbb{Q}_+$. As iterações de S são definidas por*

$$S^1(x) = S(x),\ S^t(x) = S(S^{t-1}(x)),\ t \geq 2.$$

(b) A órbita *de um número $x \in \mathbb{Q}_+$, $\mathcal{O}(x)$, é o conjunto $\{x, S(x), S^2(x), \cdots, S^k(x), \cdots\}$.*

(c) Se a sequência $\mathcal{O}(x) = \{S^k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ tornar-se constante a partir de um certo índice k_0, vamos denotar por $S^*(x) = S^{k_0}(x)$ esse valor constante, o qual denominamos ***soma iterada dos algarismos*** *do número racional positivo x.*

Segue da Definição 3.3 que se existir algum inteiro positivo k tal que para $k \geq k_0$ então $S^k(x) = S^{k_0}(x)$, ou seja, assume um valor constante, e dizemos que $S^*(x)$ existe ou ocorre. Nosso principal intento é mostrar o resultado do teorema a seguir.

Teorema 3.4. *Seja x um número racional positivo e $S(x)$ denotando a soma dos algarismos de x. Se $S^k(x)$, para algum $k \geq 0$, for uma fração decimal, então num número finito de iterações, a órbita $\mathcal{O}(x) = \{x, S(x), S^2(x), \cdots, S^k(x), \cdots\}$ se torna constante.*

Para organizar e facilitar a leitura, antes de demonstrarmos o Teorema 3.4, faremos algumas situações particulares ou resultados auxiliares. Um primeiro resultado, imediato e fácil, é o apresentado a seguir.

Proposição 3.5. *Seja $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+$, tal que $S^*(a) = S^*(b)$. Então, $S^*(x)$ está definido.*

Exemplo 3.6. *Considere $x = \dfrac{20192019}{15555555555}$. Veja que $S(20192019) = 24$ e $S(15555555555) = 51$. Assim, $S\left(\dfrac{20192019}{15555555555}\right) = \dfrac{24}{51} = \dfrac{8}{17}$ e*

$$S^2(x) = S\left(\frac{8}{17}\right) = \frac{8}{8} = 1.$$

Logo, $S^*(x)$ ocorre.

Exemplo 3.7. *Considere $x = \dfrac{31}{121}$. Veja que $S(31) = 4 = S(121)$. Assim, $S^*(x)$ ocorre.*

Como uma aplicação da Proposição 3.5, considere $a = a_1a_0$ um número inteiro de dois algarismos, em que a_0 é o algarismo das unidades e a_1 é o algarismo das dezenas. Conforme OBMEP (2021, p. 53), um inteiro positivo b é um parente de a se:

(i) o algarismo das unidades de b também é a_0;

(ii) os outros algarismos de b são distintos de zero e somam a_1.

No Exemplo 3.7, o denominador 121 é parente do numerador 31. O próximo resultado segue diretamente da Proposição 3.5.

Corolário 3.8. *Dado $x = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+$, em que b é parente de a, então $S^*(x)$ existe, e mais, $S^*(x) = 1$.*

Proposição 3.9. *Seja $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+$. Se $S^*(b) = 1$, então $S^*(x)$ está definido.*

Prova. *Como x é um número racional positivo e, por hipótese, $S^*(b) = 1$, ou seja, existe um inteiro k_1 tal que para todo $k > k_1$, temos que*

$$S^k(b) = 1. \tag{2}$$

Como $a \in \mathbb{Z}_+$, segue do Teorema 1.5 que $S^*(a)$ ocorre, ou seja, existe um inteiro k_2 tal que, para todo $k > k_2$, temos que

$$S^k(a) = \alpha, \tag{3}$$

com $\alpha \in \mathbb{Z}_+$. Assim, para algum $k_0 > max\{k_1, k_2\}$, segue das Equações (2) e (3) que, para todo $k > k_o$,

$$S^k(x) = \frac{S^k(a)}{S^k(b)} = \frac{\alpha}{1} \ .$$

Daí temos que $S^*(x)$ ocorre.

Exemplo 3.10. *Dado $x = \dfrac{997}{1234567}$, temos que $S^*(x)$ ocorre e que $S^*(x) = 7$, pois $S\left(\dfrac{997}{1234567}\right) = \dfrac{25}{28}$, $S\left(\dfrac{25}{28}\right) = \dfrac{7}{10}$ e, finalmente, $S\left(\dfrac{7}{10}\right) = \dfrac{7}{1}$.*

Proposição 3.11. *Seja $x \in \mathbb{Q}_+$ tal que, para algum k_1, tenha-se $S^{k_1}(b) = 10^n$, com n e k_1 inteiro positivo. Então, $S^*(x)$ está definido.*

Prova. *Basta observar que $S^{k_1}(x)$ tem representação decimal finita, e o resultado segue do Teorema 2.2.*

Proposição 3.12. *Seja x um racional positivo tal que, para algum k_1, tenha-se $S^{k_1}(b) = 2^n$, com n e k_1 naturais. Então, $S^*(x)$ está definido.*

Prova. *Para algum natural k_1 temos $S^{k_1}(b) = 2^n$. Assim,*

$$S^{k_1}(x) = \frac{S^{k_1}(a)}{S^{k_0}(b)} = \frac{S^{k_1}(a)}{2^n}.$$

Como $S^{k_1}(x) = \frac{5^n S^{k_0}(a)}{10^n}$, $S^{k_1}(x)$ é uma fração decimal. O resultado segue da Proposição 3.11.

Do mesmo modo, obtém-se a proposição a seguir.

Proposição 3.13. *Seja x um racional positivo tal que tal que, para algum k_1, tenha-se $S^{k_1}(b) = 5^n$, com n e k_1 naturais. Então, $S^*(x)$ está definido.*

A demonstração é feita de forma similar à demonstração da Proposição 3.12.

Apresenta-se, agora, a demonstração do Teorema 3.4.

Prova. *(Teorema 3.4)*
Se, para algum inteiro k_0, tivermos que $y = S^{k_0}(x)$ admite representação decimal finita, então, $y = \frac{S^{k_0}(a)}{10^{n_1}}$ ou $y = \frac{S^{k_0}(a)}{2^{n_2}}$ ou $y = \frac{S^{k_0}(a)}{5^{n_3}}$. Em todos os casos, de acordo com as Proposições 3.11, 3.12 ou 3.13, segue que $S^*(y)$ está definido, ou seja, existe algum inteiro k_1 tal que $S^k(y) = S^{k_1}(y)$, para todo $k \geq k_1$. Ademais,

$$S^{k_1}(y) = S^{k_1}(S^{k_0}(x)) = S^{k_1+k_0}(x)\ .$$

Assim, para todo inteiro $k \geq k_0 + k_1$ temos que $S^k(x)$ é constante e, portanto, $S^*(x)$ ocorre.

A seguir, apresentam-se mais alguns resultados.

Proposição 3.14. *Seja $x = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+$, com $S^*(a) = 9$ e $S^*(b) = 6$. Então, $S^*(x)$ está definido.*

Prova. *Como $S^*(a) = 9$, então existe um natural $k_0 > 0$ tal que, para todo $k \geq k_0$, $S^k(a) = 9$. Como $S^*(b) = 6$, então existe um natural $k_1 > 0$ tal que, para todo $k \geq k_1$, $S^k(b) = 6$. Agora, fixando algum $k_2 \geq k_0$ e $k_2 \geq k_1$, temos que*

$$S^{k_2}(x) = \frac{S^{k_2}(a)}{S^{k_2}(b)} = \frac{9}{6},$$

ou seja, $S^{k_2}(x) = \frac{3}{2}$. Disso, e da Proposição 3.12, obtemos que, para algum $k_3 > k_2$, $S^k(x)$ assume um valor constante para todo $k \geq 3$.

De modo similar à Proposição 3.14, temos os dois próximos resultados.

Proposição 3.15. *Seja $x = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+$, tal que $S^*(a) = 9$ e $S^*(b) = 3$. Então, $S^*(x)$ está definido.*

Proposição 3.16. *Seja $x = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+$, tal que $S^*(a) = 6$ e $S^*(b) = 2$ ou $S^*(b) = 3$. Então, $S^*(x)$ está definido.*

4 Alguns problemas resolvidos

Para finalizar, nesta seção apresentamos alguns casos particulares, com o intuito de explorar didaticamente um pouco mais a aplicação S, pensando em um leitor menos experiente. Para os demais leitores é possível suprimir a leitura desta, evitando que se tornem repetitivas e enfadonhas as contas e argumentações. As questões (exemplos) a seguir foram adaptadas do Banco de Questões da OBMEP (2021).

Exemplo 4.1. *(OBMEP, 2015, nível 1, questão 31 adaptada) Sejam* $a = \underbrace{11\ldots11}_{2020}$ *e* $b = 2020\ldots02$, *em que o algarismos* 2 *aparece* 1010 *vezes alternados por* 0. *Então,* $S^*\left(\frac{a}{b}\right)$ *ocorre. De fato, note que* $\underbrace{11\ldots11}_{2020} = 11 \times \underbrace{1010\ldots0101}_{2019}$ *e* $\underbrace{2020\ldots02}_{1010 \text{ algarismos } 2 \text{ e } 1009 \text{ algarismos } 0} = 2 \times \underbrace{1010\ldots0101}_{2019}$. *Portanto,*

$$\frac{a}{b} = \frac{11 \times 1010\ldots0101}{2 \times 1010\ldots0101} = \frac{11}{2}.$$

Como $\frac{11}{2}$ *é irredutível,* $S\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{S(a)}{S(b)} = \frac{2}{2} = 1$.

Exemplo 4.2. *(OBMEP, 2020, nível 2, questão 24 adaptada) Verifique se* $S^*(x)$ *ocorre, em que*

$$x = \frac{1001 \times 1002 \times 1003 \times \ldots \times 2000}{1 \times 3 \times 5 \ldots \times 1999}.$$

Seja

$$\begin{aligned} y &= \frac{2^{1000} \times 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 1000}{2^{1000} \times 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 1000} \\ &= \frac{2^{1000} \times 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 1000}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times 2000}. \end{aligned}$$

Assim, $x \times y = 2^{1000}\frac{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 2000}{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 2000} = 2^{1000}$. *Como* $y = 1$, *concluímos que* $x = 2^{1000}$. *Portanto,* $S^*(x) = S^*(S^*(2^{6\times166}) \times S^*(2^4)) = S^*(1 \times 7) = 7$.

Exemplo 4.3. *(OBMEP, 2020, nível 3, questão 28 adaptada) Seja* $f(x) = \dfrac{9^x}{9^x + 3}$, *em que* $x \in \mathbb{R}$. *Veja que*

$$S^*\left(f(\frac{1}{2020}) + f(\frac{2}{2020}) + f(\frac{3}{2020}) + \ldots + f(\frac{2019}{2020})\right)$$

ocorre. Temos que $f(x) + f(1-x) = 1$. *Assim, juntando os termos correspondentes às frações* $\dfrac{i}{2020}$ *e* $\dfrac{2020-i}{2020}$ *, obtém o número 1. Daí*

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{1}{2020}\right) + f\left(\frac{2}{2020}\right) + f\left(\frac{3}{2020}\right) + \ldots + f\left(\frac{2019}{2020}\right) = \\ &= \left(f(\frac{1}{2020}) + f(\frac{2019}{2020})\right) + \left(f(\frac{2}{2020}) + f(\frac{2018}{2020})\right) + \\ &+ \left(f(\frac{3}{2020}) + f(\frac{2017}{2020})\right) + \ldots + \left(f(\frac{1009}{2020}) + f(\frac{1011}{2020})\right) + f(\frac{1010}{2020}) \\ &= 1009 + \frac{3}{3+3} = \frac{2019}{2}. \end{aligned}$$

CC BY

Assim, $S^*\left(\frac{2019}{2}\right) = S\left(\frac{3}{2}\right) = 6.$

Exemplo 4.4. *(OBMEP, 2020, nível 3, questão 40 adaptada)*
Veja que $S^*\left(\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{2020\times 2021}\right)$ *ocorre. Temos que:*

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{2020\times 2021} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2020} - \frac{1}{2021}\right)\\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2021} = \frac{2020}{2021}.\end{aligned}$$

Assim, $S^*\left(\frac{2020}{2021}\right) = S\left(\frac{4}{5}\right) = 8.$

Referências

COSTA, E. A.; LIMA, D.; MESQUITA, E. G. C.; SOUZA, K. C. O. Soma iterada de algarismos de um número racional. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 43, p. e12, 1 mar. 2021. Disponível em: `https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/view/41972/pdf`. Acesso em: 16 out. 2021.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. Coleção PROFMAT. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

IZMIRLI, Ilhan M. On Some Properties of Digital Roots. **Advances in Pure Mathematics**, [*s. l.*], v. 4, n. 6, p. 295-301, jun. 2014. DOI: `http://dx.doi.org/10.4236/apm.2014.46039`.

OBMEP. Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. **Banco de Questões**. Disponível em: `http://www.obmep.org.br/banco.htm`. Acesso em: 16 out. 2021.

SILVA, Valdir V. **Números**: Construção e Propriedades. 1. ed. Goiânia: Editora da UFG, 2003.

ZEITZ, Paul. **The art and craft of problem solving**. 1. ed. New York: John Wiley, 1999.