Uma abordagem elementar para uma descrição do subgrupo de Fitting e do radical solúvel de um grupo finito G

An elementary approach for a description of the Fitting subgroup and soluble radical of a finite group G

Un enfoque elemental para una descripción del subgrupo de Fitting y el radical soluble de un grupo finito G

Marcello Fidelis[1]
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), Departamento de Tecnologias e Linguagens, Instituto Multidisciplinar, Nova Iguaçu, RJ, Brasil
https://orcid.org/0000-0003-3815-7559, http://lattes.cnpq.br/6158793473577176

José Roger de Oliveira Gomes[2]
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), Departamento de Tecnologias e Linguagens, Instituto Multidisciplinar, Nova Iguaçu, RJ, Brasil
https://orcid.org/0000-0002-0062-4898, http://lattes.cnpq.br/5229723968491717

Resumo: Este trabalho apresenta uma abordagem que prioriza o uso dos Teoremas do Isomorfismo de Grupos para estudar os grupos solúveis e os grupos nilpotentes com vistas a descrever o radical solúvel $S(G)$ como o maior subgrupo normal solúvel do grupo finito G e o subgrupo de Fitting $F(G)$ como o maior subgrupo normal nilpotente de um grupo finito G. Como aplicação, mostramos que esta descrição nos permite verificar que $S(G)$ e $F(G)$ são exemplos de uma classe de subgrupos definida em Deaconescu e Walls (2011) para os quais vale uma generalização de um resultado clássico que relaciona um grupo G com seu grupo de automorfismos $Aut(G)$.

Palavras-chave: Grupo; Grupo Nilpotente; Grupo Solúvel; Subgrupo de Fitting; Radical Solúvel.

Abstract: This work presents an approach that prioritizes the use of Isomorphism Theorems of Groups to study soluble groups and nilpotent groups, which aim to describe the soluble radical $S(G)$ of a finite group G as the largest normal solvable subgroup of G and the Fitting subgroup $F(G)$ of a finite group G as the largest normal nilpotent subgroup of a finite group G. As an application, we show that this description allow us to verify whether $S(G)$ and $F(G)$ are examples of a subgroup class defined in Deaconescu and Walls (2011) for which there is a generalization of a classic result that relates a group G with its automorphism group $Aut(G)$.

[1]**Currículo sucinto**: Bacharel e mestre em Matemática pela Universidade de São Paulo, doutor em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas, docente da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. **Contribuição de autoria**: Administração do Projeto, Análise Formal, Conceituação, Curadoria de Dados, Escrita – Revisão e Edição, Investigação, Metodologia, Supervisão, Validação e Visualização. **Contato**: fidelis@ufrrj.br.

[2]**Currículo sucinto**: Licenciado em Matemática pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. **Contribuição de autoria**: Escrita – Primeira Redação e Investigação. **Contato**: jroger.mat@gmail.com.

FIDELIS, Marcello; GOMES, José Roger de Oliveira. Uma abordagem elementar para uma descrição do subgrupo de Fitting e do radical solúvel de um grupo finito G. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 7, n. 2, p. e3005, 15 de dezembro de 2021.
https://doi.org/10.35819/remat2021v7i2id5193.

Keywords: Group; Nilpotent Groups; Soluble Groups; Fitting Subgroup; Soluble Radical.

Resumen: Este trabajo presenta un enfoque que prioriza el uso de Teoremas de Isomorfismo de Grupo para estudiar grupos solubles y grupos nilpotentes con el fin de describir el radical soluble $S(G)$ como el subgrupo normal soluble más grande del grupo finito G e el subgrupo de Fitting $F(G)$ como el subgrupo normal nilpotente más grande de un grupo finito G. Como aplicación, mostramos que esta descripción nos permite verificar que $S(G)$ y $F(G)$ son ejemplos de una clase de subgrupos definidos en Deaconescu y Walls (2011) para los cuales se tiene la generalización de un resultado clásico que relaciona un grupo G con su grupo de automorfismos $Aut(G)$.

Palabras clave: Grupo; Grupo Nilpotente; Grupo Soluble; Subgrupo Fitting; Radical Soluble.

Data de submissão: 23 de maio de 2021.

Data de aprovação: 3 de agosto de 2021.

1 Introdução

O século passado foi testemunha de uma das maiores conquistas da Matemática com a Classificação dos Grupos Simples Finitos, isso é, os grupos onde apenas os subgrupos triviais são normais. A importância dessa classificação reside no fato de que os grupos simples formam os "tijolos" na construção dos demais grupos finitos. Recomendamos Gallian (2013, p. 428) para uma rica descrição das etapas vencidas, da contextualização dos eventos e do papel das principais personagens envolvidas na história dessa classificação.

Na busca pela referida classificação, dentre tantas outras contribuições, vale destacar o importante trabalho de Feit-Thompson, "Solvability of Groups of Odd Order", que ocupa uma edição inteira do *Pacific Journal of Mathematics* do ano de 1963, reforçando a importância dos grupos solúveis na classificação citada acima.

Vale recordar que o conceito de grupo solúvel surge por meio da ideia de uma cadeia de subgrupos com o próprio Galois em seu original trabalho de descrever a relação da solubilidade de equações polinomiais em termos do grupo de permutação das raízes do polinômio. Para o leitor interessado recomendamos Rotman (1990) para mais informações sobre a Teoria de Galois.

Em geral, uma primeira disciplina de Teoria de Grupos em universidades brasileiras tem seu ápice nos Teoremas de Sylow. A importância desses teoremas não pode ser subestimada e esses resultados já aparecem incorporados à teoria desde a clássica obra de Burnside (1911). Os Teoremas de Sylow admitem generalizações para os grupos solúveis como podemos ver nos

Teoremas VII.2.9 e VII.2.10 de Garcia e Lequain (2001, p. 303). Além disso, o conceito de p-subgrupo de Sylow permite a caracterização dos grupos finitos nilpotentes como pode ser visto no Teorema 10.3.4 de Hall Jr. (1959, p. 155).

Apesar da inegável importância dos Teoremas de Sylow, nosso trabalho tem como objetivo apresentar uma abordagem dos grupos solúveis e nilpotentes apenas com o uso dos Teoremas do Isomorfismo. A ideia dessa abordagem surgiu a partir da monografia de Gomes (2021), que faz um estudo detalhado dos resultados de Deaconescu e Walls (2011), onde percebemos que o entendimento dos conceitos de solubilidade e nilpotência de um grupo não necessitava de sua definição mais completa, apenas de uma descrição suficiente para a determinação de certas propriedades dos subgrupos $F(G)$ (subgrupo de Fitting) e $S(G)$ (radical solúvel) de um grupo finito G. Os subgrupos $F(G)$ e $S(G)$ são definidos nas Subseções 3.1 e 3.2, respectivamente.

2 Preliminares

Seja G um grupo com elemento neutro 1 e notação multiplicativa. Denotamos por $Aut(G)$ o grupo dos automorfismos de G com elemento neutro id.

Usaremos a notação $H \leq G$ para indicar que H é subgrupo do grupo G e $N \lhd G$ para indicar que N é um subgrupo normal de G. Se $S \subseteq G$, então $\langle S \rangle$ denota o subgrupo gerado por S. Escreveremos $G_1 \simeq G_2$ para denotar que os grupos G_1 e G_2 são isomorfos.

Consideremos um operador X que associa a cada grupo G um determinado subgrupo $X(G) \leq G$ com a seguinte propriedade: se $\varphi : G_1 \to G_2$ é um isomorfismo, então $\varphi(X(G_1)) = X(G_2)$. Para um dado grupo G, um tal subgrupo $X(G)$ é chamado *subgrupo genérico*.

Diretamente da definição acima, pode-se mostrar que um subgrupo genérico $X(G)$ é um exemplo de *subgrupo característico*, isto é, um subgrupo invariante por automorfismos e, em particular, um subgrupo normal.

Seja $Z(G)$ o centro do grupo G. É imediato que $Z(G)$ é um subgrupo genérico.

Um dos primeiros resultados que relacionam G e $Aut(G)$ é o seguinte:

Teorema 2.1. *Seja $Z(G)$ o centro grupo G. Se $Z(G) = \{1\}$, então $Z(Aut(G)) = \{id\}$.*

O Teorema acima é clássico e pode ser encontrado em Zassenhaus (1949, p. 44). No trabalho de Deaconescu e Walls (2011, p. 454), o Teorema 2.1 é generalizado para uma classe um pouco maior de subgrupos genéricos cujos autores definiram da seguinte forma:

Definição 2.2. *[DEACONESCU; WALLS, 2011, p. 454] Um subgrupo genérico $X(G)$ é dito um* ab-subgrupo *se satisfaz:*

a) $Z(G) \leq X(G)$;

b) $H \cap X(G) \leq X(H)$, *sempre que* $H \lhd G$.

A generalização do Teorema 2.1 é dada por:

Teorema 2.3 (DEACONESCU; WALLS, 2011, p. 454, Theorem 2)**.** *Seja G um grupo e $X(G)$ um ab-subgrupo genérico de G. Se $X(G) = \{1\}$, então $X(Aut(G)) = \{id\}$.*

O exemplo abaixo ilustra o fato do Teorema acima generalizar o Teorema precedente.

Exemplo 2.4. *O centro $Z(G)$ é um ab-subgrupo. O item a) é trivial. Além disso, se $H \lhd G$, então $H \cap Z(G) = \{x \in H \,:\, xy = yx, \forall\, y \in G\} \subseteq Z(H)$, demonstrando b).*

Recordemos que o comutador de a, $b \in G$ é $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$. Dados $H, K \leq G$, podemos definir $[H, K] = \langle\{[a, b] \,:\, a \in H, b \in K\}\rangle$, o subgrupo gerado pelos comutadores dos elementos de H e K. Mais ainda, podemos verificar diretamente que se $H, K \lhd G$ então $[H, K] \lhd G$. Com efeito, decorre diretamente de $c[a, b]c^{-1} = [cac^{-1}, cbc^{-1}]$, para todo $c \in G$, $a \in H$, $b \in K$. Dessa mesma relação segue que $[H, K]$ é um subgrupo característico se H e K forem subgrupos característicos.

O subgrupo $G' = [G, G]$ é chamado *subgrupo derivado* e dos argumentos dados no parágrafo acima mostra-se facilmente que $X(G) = G'$ é um subgrupo genérico. Apesar disso, o exemplo abaixo mostra que $X(G) = G'$ não é, em geral, um ab-subgrupo genérico.

Exemplo 2.5. *Consideremos o grupo de Klein* $K = \langle a, b \rangle$ *com as relações* $a^2 = b^2 = 1$ *e* $ab = ba$*. Assim,* $K = \{1, a, b, c = ab\}$ *é abeliano e, portanto,* $K' = \{1\}$*. Note que cada elemento em* $Aut(K)$ *corresponde de forma única a uma permutação dos elementos* $\{a, b, c\}$ *e, portanto, temos um homomorfismo injetor de* $Aut(K)$ *em* S_3*, o grupo das permutações de três elementos. Mais ainda, a transposição* (ab) *e o* 3*-ciclo* (abc) *são imagens de elementos em* $Aut(K)$*. Do item a) do Exercício V.10.27 (GARCIA; LEQUAIN, 2001, p. 235), segue que* $Aut(K) \simeq S_3$ *e, como* $[\alpha, \beta] = \alpha^2$*, temos que* $Aut(K)' \simeq S_3' \neq \{1\}$*.*

Na próxima Seção vamos desenvolver os conceitos de grupo solúvel e grupo nilpotente com o objetivo de determinar a existência de duas classes de ab-subgrupos genéricos.

3 Grupos Solúveis e Nilpotentes

Consideremos a série de subgrupos normais do grupo G

$$G = G_{(0)} \supseteq G_{(1)} \supseteq G_{(2)} \supseteq \cdots$$

definida recursivamente por $G_{(0)} = G$, $G_{(n+1)} = [G_{(n)}, G_{(n)}]$.

Recordemos que o subgrupo $G' = [G, G]$ é chamado de *subgrupo derivado* ou *subgrupo dos comutadores*. É fácil ver que o quociente $G/[G, G]$ é sempre abeliano e é chamado de *quociente abeliano universal*. Desta forma, na série acima, $G_{(n+1)}$ é o subgrupo derivado de $G_{(n)}$ e $G_{(n)}/G_{(n+1)}$ é o quociente abeliano universal de $G_{(n)}$. De posse dessa nomenclatura, a série acima é chamada *série derivada* de G.

Consideremos outra série de subgrupos normais do grupo G.

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots$$

definida recursivamente por $G_0 = G$, $G_{n+1} = [G, G_n]$.

Esta segunda série é chamada de *série central inferior* de G.

Definição 3.1 (CONRAD, 2011, p. 1)**.** *Um grupo* G *é dito* solúvel *se* $G_{(n)} = \{1\}$*, para algum* n*.*

Definição 3.2 (CONRAD, 2011, p. 1)**.** *Um grupo* G *é dito* nilpotente *se* $G_n = \{1\}$*, para algum* n*.*

FIDELIS, Marcello; GOMES, José Roger de Oliveira. Uma abordagem elementar para uma descrição do subgrupo de Fitting e do radical solúvel de um grupo finito G. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 7, n. 2, p. e3005, 15 de dezembro de 2021. https://doi.org/10.35819/remat2021v7i2id5193.

Observação 3.3. *As definições anteriores não são as usuais, mas apenas uma dentre outras condições equivalentes que acarretam a nilpotência e a solubilidade de um grupo. A saber, a definição de grupo solúvel vista em Garcia e Lequain (2001) segue-se da construção dos conceitos de* série subnormal*, refinamento, Teorema de Schreier e Teorema de Jordan-Hölder.*

Vamos mostrar, por indução, que $G_{(n)} \subseteq G_n$. Com efeito, se $n = 0$ os subgrupos são iguais. Suponha que $G_{(n)} \subseteq G_n$. Então $G_{(n+1)} = [G_{(n)}, G_{(n)}] = \langle [a,b] : a, b \in G_{(n)} \rangle \subseteq \langle [a,b] : a \in G, b \in G_{(n)} \rangle = [G, G_{(n)}] \subseteq [G, G_n] = G_{n+1}$, em que a última inclusão é dada pela hipótese de indução.

O raciocínio acima nos diz que todo grupo nilpotente é solúvel. Também temos que $G_{(1)} = [G,G] = G_1$. É imediato que G abeliano $\Rightarrow G_1 = G_{(1)} = \{1\}$. Assim, trivialmente temos que grupos abelianos são nilpotentes e solúveis. Desta forma, o comprimento das séries fornece uma noção do quanto um grupo deixa de ser abeliano. Com isso, estabelecemos a seguinte inclusão das famílias de grupos:

$$\boxed{\text{Abelianos} \subset \text{Nilpotentes} \subset \text{Solúveis}}$$

Agora vamos apresentar algumas propriedades e resultados importantes de grupos nilpotentes.

Definimos a *classe de nilpotência* de G como sendo o menor $n \geq 0$ tal que $G_n = \{1\}$ na série central inferior. Uma consequência imediata desta definição é que os grupos abelianos não triviais são os grupos nilpotentes de classe 1.

A demonstração do resultado abaixo pode ser encontrada na referência citada e foi incluída aqui para a conveniência do leitor e ilustração do emprego das técnicas.

Proposição 3.4 (CONRAD, 2020, p. 4, Lemma 3.1)**.** *Se G é nilpotente de classe c, então cada subgrupo H de G e cada grupo quociente G/K são nilpotentes de classe $\leq c$. Em particular, se G é não trivial, então $G/Z(G)$ tem classe de nilpotência $\leq c - 1$.*

Prova. *Dada a série central inferior $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_c = \{1\}$, onde $G_{n+1} = [G, G_n]$, podemos observar que a série central inferior de H satisfaz $H_i \subseteq G_i \cap H$ para todo i e, portanto, $H_c \subseteq G_c \cap H = \{1\}$, de onde concluímos que a série central inferior de H pode chegar em $\{1\}$ antes do passo c, logo tem classe de nilpotência $\leq c$.*

Quanto ao grupo quociente, podemos criar uma série central inferior para G/K por meio da projeção canônica de G em G/K. Chamando $\overline{G} = G/K$, basta observar que $\overline{G}_{n+1} = [\overline{G}, \overline{G}_n] = \langle\{[\overline{a}, \overline{b}] : \overline{a} \in \overline{G}, \overline{b} \in \overline{G}_n\}\rangle = \langle\{\overline{[a, b]} : a \in G, b \in G_n\}\rangle$, para todo $n = 1, \ldots, c$. Logo, $\overline{G}$ admite uma série central inferior dada por $\overline{G} = \overline{G}_0 \supseteq \overline{G}_1 \supseteq \cdots \supseteq \overline{G}_c = \{1\}$ e isto mostra que $\overline{G}$ tem classe de nilpotência $\leq c$.

Para a afirmação final, recordemos da série central inferior de G que $G_c = \{1\}$, logo $G_c = [G, G_{c-1}] = \{1\}$ e isto quer dizer que $[a, b] = 1$, para todo $a \in G$ e $b \in G_{c-1}$, ou seja, $ab = ba$ para todo $a \in G$ e $b \in G_{c-1}$. Deste fato segue que $G_{c-1} \subseteq Z(G)$ e então $\overline{G}_{c-1} = G_{c-1}/Z(G) = \{1\}$. Isto é, $G/Z(G)$ tem classe de nilpotência $\leq c - 1$. ■

Proposição 3.5. *i) Se G é um grupo nilpotente, então $Z(G) \neq \{1\}$;*

ii) Se $G/Z(G)$ é nilpotente, então G é nilpotente;

iii) Se $N \lhd G$, $N \neq \{1\}$ e G é nilpotente, então $Z(G) \cap N \neq \{1\}$.

Prova. *i) Seja G nilpotente de índice c. Logo $G_{c-1} \neq \{1\}$. Mas $G_c = [G, G_{c-1}] = \{1\} \Rightarrow [a, b] = 1, \forall a \in G, b \in G_{c-1}$. Logo, $ab = ba$ para todo $a \in G$, $b \in G_{c-1} \Rightarrow G_{c-1} \subseteq Z(G)$. Como $G_{c-1} \neq \{1\}$, segue que $Z(G) \neq \{1\}$.*

ii) Suponhamos $\overline{G} = G/Z(G)$ nilpotente de classe c. Seja

$$\overline{G} = \overline{G_0} \supseteq \overline{G_1} \supseteq \cdots \supseteq \overline{G_c} = \{\overline{1}\}$$

uma série central inferior de $\overline{G}$. Do Teorema da Correspondência (GARCIA; LEQUAIN, 2001, p. 166, Corolário V.5.8), para cada subgrupo $\overline{G}_n$ existe um subgrupo H_n de G_n com $Z(G) \subseteq H_n$. Logo, a série central inferior de $\overline{G}$ nos dá uma sequência de inclusões

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \cdots \supseteq H_c = Z(G).$$

Notemos que, como H_n é subgrupo de G_n, H_n está sujeito às mesmas regras de formação de G_n, isto é, $H_{n+1} = [G, H_n]$. Desta forma, a sequência acima tem a mesma regra de formação de uma série central inferior com a diferença que não acaba em $\{1\}$. Por outro lado, como $Z(G)$ comuta com todos os elementos de G, segue que $\{1\} = [G, Z(G)] = [G, H_c]$. Desta forma, fazendo $H_{c+1} := [G, H_c]$, transformamos a sequência de inclusões acima em uma série central inferior para G, de onde concluímos que G é nilpotente.

iii) Do item i) sabemos que $Z(G) \neq \{1\}$. Como $N \lhd G$ e $Z(G) \lhd G \Rightarrow Z(G) \cap N \lhd G$. Da Proposição 3.4 temos que $H = Z(G) \cap N \lhd G$ é nilpotente e então $Z(H) \neq \{1\}$, isto é, $\exists\, 1 \neq a \in H = Z(G) \cap N$ tal que $[a, b] = 1, \forall\, b \in H$, de onde concluímos que $Z(G) \cap N \neq \{1\}$. ■

Proposição 3.6. *Se H e K são subgrupos normais e nilpotentes de um grupo G, então o centro $Z(HK) \neq \{1\}$.*

Prova. *Se $H \cap K = \{1\}$, então os elementos de H e K comutam entre si. Com efeito, da normalidade de K temos que $hkh^{-1} \in K$ e então $[h, k] = (hkh^{-1})(k^{-1}) \in K$. Analogamente da normalidade de H segue $[h, k] \in H$. Logo, $[h, k] \in H \cap K = \{1\}$ e disto temos que $[h, k] = 1 \Leftrightarrow hk = kh$.*

Como H é nilpotente, temos da Proposicão 3.5 i) que $Z(H) \neq \{1\}$. Seja $a \in Z(H) \backslash \{1\}$, então $\forall\, h \in H$ e $k \in K$ temos que $a(hk) = (ah)k = k(ah) = k(ha) = (kh)a = (hk)a$, pois $a \in Z(H) \subseteq H$, $ah = ha \in H$, $k \in K$ e todos comutam entre si. Logo, $a \in Z(HK)$ de onde concluímos que $Z(HK) \neq \{1\}$.

Agora, se $H \cap K \neq \{1\}$, observamos que $H \cap K \lhd K$ e como K é nilpotente por hipótese, segue da Proposição 3.5 itens i) e iii) que $Z(K) \neq \{1\}$ e que $(H \cap K) \cap Z(K) \neq \{1\}$. Como $Z(K) \subseteq K$, temos que $H \cap Z(K) = H \cap K \cap Z(K) \neq \{1\}$. Agora, observemos que $H \cap Z(K) \lhd H$, onde H é nilpotente por hipótese e acabamos de ver que $H \cap Z(K) \neq \{1\}$. Novamente do item iii) da Proposição 3.5, segue que $(H \cap Z(K)) \cap Z(H) \neq \{1\}$. Como $Z(H) \cap H = Z(H)$ temos que $Z(H) \cap Z(K) \neq \{1\}$. Uma vez que $Z(H) \cap Z(K) \subseteq Z(HK)$, concluímos que $Z(HK) \neq \{1\}$, como queríamos. ■

Teorema 3.7 (CONRAD, 2020, p. 4, Theorem 3.2)**.** *Se G é um grupo e H, $K \lhd G$ são nilpotentes, então HK é normal nilpotente em G.*

Prova. *Como H e K são normais, verifica-se diretamente que $HK \lhd G$.*

Vamos demonstrar a nilpotência de HK por indução na ordem de HK. Se $|HK| = 1$ o resultado é trivial. Então, vamos admitir o resultado válido para todo produto com ordem $< |HK|$. Da Proposição 3.6 temos que $Z(HK) \neq \{1\}$ e, então,

$$\left| \frac{HK}{Z(HK)} \right| < |HK|.$$

Assim, por indução, vale que $HK/Z(HK)$ é nilpotente. Da Proposição 3.5 ii) segue que HK é nilpotente, como queríamos. ■

Observação 3.8. *Quando estamos lidando com um grupo finito G, um outro exemplo de subgrupo genérico que é estudado em conjunto com os subgrupos nilpotentes é o* subgrupo de Frattini $\Phi(G)$*, que consiste da interseção de todos os subgrupos maximais de G. No entanto, pode-se mostrar que se C_3 é o grupo cíclico de ordem 3, então o produto direto $G = C_3 \times C_3$ tem $\Phi(G) = \{1\}$. Mas $\Phi(Aut(G)) \neq \{id\}$, o que nos diz que $\Phi(G)$ não é, em geral, um ab-subgrupo genérico.*

Com respeito ao conceito de solubilidade vamos usar apenas o resultado abaixo, cuja demonstração pode ser encontrada na referência indicada e segue as mesmas ideias já apresentadas para o conceito de nilpotência.

Proposição 3.9 (GARCIA; LEQUAIN, 2001, p. 302, Teorema VII.2.8)**.** *1) Seja $H \leq G$. Se G é solúvel, então H é solúvel;*

2) Seja H um subgrupo normal de G. Então, o grupo G é solúvel se, e somente se, os grupos H e G/H são solúveis.

3.1 **Subgrupo de Fitting**

Seja G um grupo finito. O *subgrupo de Fitting* de G, denotado por $F(G)$, é definido como o subgrupo gerado por todos subgrupos normais nilpotentes de G.

Usando alguns dos resultados anteriores vamos dar uma descrição alternativa para $F(G)$. Neste caso, temos que a família N_i, $i \in I$, de todos os subgrupos normais e nilpotentes de G é finita. Aplicando o Teorema 3.7 indutivamente temos que

$$F(G) = \prod_{i \in I} N_i.$$

Além disso, segue diretamente que $F(G)$ é o maior subgrupo normal nilpotente em G.

Exemplo 3.10. *Seja G um grupo finito. O subgrupo de Fitting $F(G)$ é um ab-subgrupo. Com efeito, como $Z(G)$ é abeliano $\Rightarrow$ normal e nilpotente e disto segue que $Z(G)$ está contido em um dos nilpotentes que formam $F(G)$, logo $Z(G) \subseteq F(G)$, provando o item a) da Definição 2.2.*

Para o item b) da Definição 2.2, seja $H \lhd G$. Logo $H \cap F(G)$ é o maior subgrupo normal nilpotente em H, isto é, $H \cap F(G) = F(H)$.

3.2 Radical Solúvel

Seja G um grupo finito. O *radical solúvel* $S(G)$ é definido como o produto de todos os subgrupos normais solúveis de G.

Seja S_i, $i \in I$, a família (finita) de todos os subgrupos normais solúveis S_i de G.

Proposição 3.11. *Todo grupo finito G contém um único subgrupo normal maximal solúvel $S(G) = \prod_{i\in I} S_i$, onde a família S_i é definida acima.*

Prova. *Sejam $H, N \lhd G$ ambos solúveis. Então $HN \lhd G$ é solúvel. Com efeito, $HN/N \simeq H/(H\cap N)$ e $H/(H \cap N)$ é solúvel como quociente de solúvel (Proposição 3.9). Logo, temos HN/N e N solúveis. Também da Proposição 3.9 segue que HN é solúvel.*

Seja, então, $S(G)$ o produto de todos os subgrupos solúveis de G. Como G é finito, esta multiplicação está bem definida. Para vermos que $S(G)$ é maximal e único, digamos que exista outro maior subgrupo normal solúvel M. Por construção $M \cdot S(G)$ contém M e $S(G)$, sendo assim $S(G) = M \cdot S(G) = M$ pela maximalidade dos subgrupos. ■

Exemplo 3.12. *Seja G um grupo finito. O subgrupo $S(G)$ é um ab-subgrupo. Com efeito, como $Z(G)$ é abeliano $\Rightarrow$ nilpotente $\Rightarrow$ solúvel e disto segue que $Z(G)$ é um dos fatores que formam $S(G)$, logo $Z(G) \subseteq S(G)$, provando o item a) da Definição 2.2.*

Para o item b) da Definição 2.2, seja $H \lhd G$. Logo $H \cap S(G)$ é o maior subgrupo solúvel em H, isto é, $H \cap S(G) = S(H)$.

4 Considerações Finais

Esperamos que este trabalho possa despertar o interesse do leitor na Teoria de Grupos, bem como revelar a importância dos resultados básicos no desenvolvimento dos estudos dos grupos solúveis e nilpotentes.

FIDELIS, Marcello; GOMES, José Roger de Oliveira. Uma abordagem elementar para uma descrição do subgrupo de Fitting e do radical solúvel de um grupo finito G. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 7, n. 2, p. e3005, 15 de dezembro de 2021. https://doi.org/10.35819/remat2021v7i2id5193.

Referências

BURNSIDE, W. **The Theory of Groups of Finite Order**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1911.

CONRAD, B. **Solvable and nilpotent groups**. Notas de aula. [2011]. Disponível em: `http://math.stanford.edu/~conrad/210BPage/handouts/SOLVandNILgroups.pdf`. Acesso em: 12 ago. 2020.

CONRAD, K. **Subgroup series II**. Notas de aula. [entre 2015 e 2020]. Disponível em: `https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/grouptheory/subgpseries2.pdf`. Acesso em: 14 ago. 2020.

DEACONESCU, M.; WALLS, G. L. On the group of automorphisms of a group. **The American Matemathical Monthly**, v. 118, n. 5, p. 452–455, maio 2011.

GALLIAN, J. A. **Contemporary Abstract Algebra**. 8. ed. Boston: Cengage Learning, 2013.

GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. **Elementos de Álgebra**. Rio de Janeiro: IMPA, 2001.

GOMES, J. R. O. **Grupos de Automorfismos de Grupos**. Orientador: Marcello Fidélis. 2021. 34f. Monografia (Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática) – Departamento de Tecnologias e Linguagens, Instituto Multidisciplinar, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Nova Iguaçu, RJ, 2021.

HALL Jr., M. **The Theory of Groups**. New York: The Macmillan Company, 1959.

ROTMAN, J. J. **Galois Theory**. New York: Springer-Verlag, 1990.

ZASSENHAUS, H. **The Thery of Groups**. New York: Chelsea Publishing Company, 1949.

Agradecimentos

Agradecemos às atenciosas correções, sugestões e recomendações dos(as) Revisores(as) e do Editor, que contribuíram substancialmente para uma melhor apresentação deste trabalho.

Agradecemos à Profa. Dra. Elaine Araújo da Silva por nos comunicar um equívoco na redação original da demonstração da Proposição 3.4, devidamente corrigida na presente versão.

https://doi.org/10.35819/remat2021v7i2id5193.