

Análise de um método de coloração no estudo do número de Ramsey $R(3, 10)$

Analysis of a method coloring on study of Ramsey number $R(3, 10)$

Análisis de un método de coloración en el estudio del número de Ramsey $R(3, 10)$

Danielle Santos Azevedo¹

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), *Campus*
Alvorada, Alvorada, RS, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0003-2008-6086>,  <http://lattes.cnpq.br/8278999457848707>

Jonas Francisco de Medeiros²

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), *Campus*
Alvorada, Alvorada, RS, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-3662-5243>,  <http://lattes.cnpq.br/6585146522852623>

Daniel Coswig Zitzke³

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), *Campus*
Alvorada, Alvorada, RS, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0001-5292-4051>,  <http://lattes.cnpq.br/0861288350052587>

Rafael Rodrigues Pereira⁴

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), *Campus*
Alvorada, Alvorada, RS, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-7005-4755>,  <http://lattes.cnpq.br/6782490991566309>

Lenon Saturnino Bernardino⁵

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), *Campus*
Alvorada, Alvorada, RS, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-6064-0929>,  <http://lattes.cnpq.br/4419028665533338>

¹**Currículo sucinto:** Licenciada, mestre e doutora em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul e docente no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, *Campus* Alvorada. **Contribuição de autoria:** Administração do Projeto, Conceituação, Curadoria de Dados, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação, Metodologia. **Contato:** danielle.azevedo@alvorada.ifrs.edu.br.

²**Currículo sucinto:** Licenciado em Matemática pela Universidade de Coimbra, graduado em Matemática pela Universidade do Vale do Rio dos Sinos, mestre em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul e docente no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, *Campus* Alvorada. **Contribuição de autoria:** Administração do Projeto, Conceituação, Curadoria de Dados, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação, Metodologia. **Contato:** jonas.medeiros@alvorada.ifrs.edu.br.

³**Currículo sucinto:** Estudante do Curso Técnico de Produção em Áudio e Vídeo Integrado ao Ensino Médio no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, *Campus* Alvorada. **Contribuição de autoria:** Curadoria de Dados, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação. **Contato:** daniel.zitzke@aluno.alvorada.ifrs.edu.br.

⁴**Currículo sucinto:** Estudante do Curso Técnico de Produção em Áudio e Vídeo Integrado ao Ensino Médio no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, *Campus* Alvorada. **Contribuição de autoria:** Curadoria de Dados, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação. **Contato:** rafael.pereira@aluno.alvorada.ifrs.edu.br.

⁵**Currículo sucinto:** Estudante do Curso Técnico de Produção em Áudio e Vídeo Integrado ao Ensino Médio no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, *Campus* Alvorada. **Contribuição de autoria:** Curadoria de Dados, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação. **Contato:** lenon.bernardino@gmail.com.



Resumo: Sejam s, t números naturais; o número de Ramsey $R(s, t)$ é o menor inteiro positivo r tal que para toda bicoloração de K_r , digamos azul e vermelho, existe um subgrafo K_s monocromático de cor azul ou um subgrafo monocromático K_t vermelho. Essa teoria deu origem a vastas pesquisas utilizando, entre outros assuntos, o estudo de combinatória, iniciado com Ramsey (1928). Por mais simples que seja a definição, calcular os números de Ramsey é muito difícil e poucos são conhecidos. Exoo (1989), e Goedgebeur e Radziszowski (2013) mostraram que $40 \leq R(3, 10) \leq 42$. Assim, neste artigo, serão exibidos estudos e conclusões sobre uma bicoloração para $R(3, 10)$. Ainda não podemos afirmar que os resultados apresentados neste trabalho serão usados no cálculo final do número de Ramsey $R(3, 10)$. A ideia, aqui, é compartilhar o que estudamos em nosso grupo de pesquisa, a fim de que esses estudos sejam usados no cálculo de $R(3, 10)$ ou para mostrar aos colegas que também estudam números de Ramsey, o que já fizemos, evitando, assim, um retrabalho. Greenwood e Gleason (1955) usaram as noções de resíduos cúbicos e quadráticos, respectivamente, para mostrar que $R(3, 5) = 14$ e $R(4, 4) = 17$. Baseado nessas ideias, dado um grafo completo com 41 vértices, de forma isomorfa, vamos identificar esses vértices com os elementos $\{0, \dots, 40\}$ de um corpo com 41 elementos. E, com uma bicoloração usando resíduos de grau n módulo m ($m, n \in \mathbb{N}$), vamos mostrar que esse grafo contém uma cópia de K_3 azul ou uma cópia de K_{10} vermelha.

Palavras-chave: Teoria de Grafos; Grafos Bicoloridos; Coloração de Grafos; Número de Ramsey; Resíduos de Grau n .

Abstract: Let s, t natural numbers; the Ramsey number $R(s, t)$ is defined as the least positive integer r with the property that every bicolored graph K_r contains one blue monocromatic subgraph K_s or one red monocromatic subgraph K_t . This theory gave rise to extensive research using, among other subjects, the study of combinatorics, started with Ramsey (1928). As simple as the definition is, calculating Ramsey numbers is very difficult and few are known. Exoo (1989), and Goedgebeur and Radziszowski (2013) showed that $40 \leq R(3, 10) \leq 42$. Thus, in this article, will be displayed studies and conclusions about $R(3, 10)$. We cannot yet state that the results presented in this article will be used in the final calculation of the Ramsey number $R(3, 10)$. The idea here is to share what we have studied in our research group, so that these studies can be used in the calculation of $R(3, 10)$ or to show colleagues who also study Ramsey numbers, which already we did, thus avoiding rework. Greenwood and Gleason (1955) used the notions of cubic and quadratic residues, respectively, to show that $R(3, 5) = 14$ and $R(4, 4) = 17$. Based on these ideas, given a complete graph with 41 vertices, in an isomorphic form, we will identify these vertices with the elements $\{0, \dots, 40\}$ of a field with 41 elements. And, with a bicolouration using residues of degree n module m ($m, n \in \mathbb{N}$), we will show that this graph contains a copy of blue K_3 or a red copy of K_{10} .

Keywords: Graph Theory; Bicolored Graph; Edge-coloring Graph; Ramsey Number; Residues of Degree n .

Resumen: Sean s, t números naturales; el número de Ramsey $R(s, t)$ es el entero positivo más pequeño r tal que para cada bicolor de K_r , digamos azul y rojo, hay un subgrafo K_s color azul monocromático o un sub-



grafo monocromático roxo K_t . Esta teoria dio lugar a vastas investigaciones que utilizaron, entre otros temas, el estudio de la combinatoria, iniciado con Ramsey (1928). Tan simple como es la definición, calcular los números de Ramsey es muy difícil y se conocen pocos. Exoo (1989), y Goedgebeur y Radziszowski (2013) mostraron que $40 \leq R(3, 10) \leq 42$. Así, en este artículo se mostrarán estudios y conclusiones sobre un bicolor por $R(3, 10)$. Todavía no podemos decir que los resultados presentados en este trabajo se utilizarán en el cálculo final del número de Ramsey $R(3, 10)$. La idea aquí es compartir lo que hemos estudiado en nuestro grupo de investigación, para que estos estudios puedan usarse en el cálculo de $R(3, 10)$ o para mostrar a colegas que también estudian números de Ramsey, lo cual ya hicimos, así evitando un trabajo. Greenwood y Gleason (1955) utilizaron las nociones de residuos cúbicos y cuadráticos, respectivamente, para mostrar que $R(3, 5) = 14$ y $R(4, 4) = 17$. En base a estas ideas, dado un gráfico completo con 41 vértices, en forma isomorfa, identificaremos estos vértices con los elementos $\{0, \dots, 40\}$ de un campo con 41 elementos. Y, con un bicolor usando residuos de grado n módulo m ($m, n \in \mathbb{N}$), demostremos que este gráfico contiene una copia azul de K_3 o una copia de K_{10} roxo.

Palabras clave: Teoría de Grafos; Gráficos Bicolores; Coloración Gráfica; El Número de Ramsey; Residuales de Grado n .

Data de submissão: 18 de março de 2021.

Data de aprovação: 8 de novembro de 2021.

1 Introdução

Frank Ramsey (1928) publicou um problema em que indagava ao leitor qual era o número mínimo de pessoas que deveriam estar em uma festa a fim de que se garantisse que haviam três pessoas que se conheciam mutuamente ou três pessoas que não se conheciam mutuamente. Esse problema expandiu-se e, juntamente com a teoria de grafos, definiu-se o estudo dos números de Ramsey. Sejam $s, t \in \mathbb{N}$. O Teorema de Ramsey afirma que existe um menor inteiro positivo $R(s, t)$ para o qual toda coloração de arestas azul e vermelha, por exemplo, de um grafo completo com $R(s, t)$ vértices contém um K_s azul ou um K_t vermelho. A primeira versão desse resultado foi provada por Frank Ramsey (1928), e foi esse problema que deu origem a toda a teoria dos números de Ramsey. As pesquisas sobre esse tema buscam encontrar regularidades, porém, até hoje, se desconhecem resultados generalizados.

Apenas poucos números de Ramsey já foram determinados na Matemática. Por não existir padrão específico descoberto para o cálculo dos números de Ramsey e por dificuldades computacionais, grande parte desses números ainda se encontram indeterminados, apesar de limitados por



alguns estudos já realizados. O objetivo que norteou o trabalho aqui apresentado foi a busca pela determinação do número de Ramsey $R(3, 10)$. Através de cálculos e discussões, foram analisadas situações e realizada uma análise diante dos possíveis valores para o número de Ramsey $R(3, 10)$. Ainda não podemos afirmar que os resultados apresentados neste artigo serão usados no cálculo final do número de Ramsey $R(3, 10)$, como é salientado na conclusão desta pesquisa. A ideia, aqui, é compartilhar o que estudamos em nosso grupo de pesquisa, a fim de que esses estudos possam ser utilizados no cálculo de $R(3, 10)$ ou para mostrar aos colegas que também estudam números de Ramsey, o que já fizemos, evitando, assim, os cálculos aqui apresentados.

O presente artigo contextualiza o leitor através de conceitos básicos da teoria de grafos, dos números de Ramsey e de resíduos de grau n módulo m ($m, n \in \mathbb{N}$), após, apresenta o novo resultado descoberto e, por fim, convida o leitor a se aventurar na busca pela determinação de algum número de Ramsey ainda não descoberto.

2 Noções Básicas

2.1 Teoria de Grafos

Para compreendermos os tópicos abordados neste artigo, vamos, primeiramente, apresentar algumas definições e resultados sobre a teoria de grafos. As informações abaixo encontram-se em Diestel (2000), e para maiores detalhes veja Sanches (2013) e Sanches (2016).

Definição 2.1. Um **grafo** G é um par $G = (V, E)$, onde V é conjunto de vértices e E é o conjunto de arestas.

Denotamos a aresta $xy \in E$, como a aresta que liga os vértices x e y pertencentes ao conjunto V .

Definição 2.2. A **ordem** de um grafo G corresponde ao seu número de vértices, a qual será denotada por $|G|$.

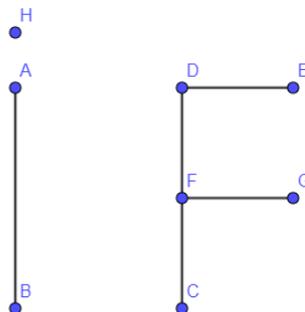
Para o número de arestas, usaremos a notação $||G||$. Veja um exemplo na Figura 1.

Definição 2.3. Seja $G = (V, E)$ um grafo. Dizemos que G é **completo** se para todo par de vértices distintos $v_1, v_2 \in V$ temos $v_1v_2 \in E$.

Denotaremos um grafo completo de ordem n por K_n .



Figura 1 – Exemplo de grafo G , onde $V = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ e $E = \{AB, DE, DF, FG, FC\}$, com $|G| = 8$ e $||G|| = 5$.



Fonte: Elaboração dos autores (2021).

Definição 2.4. O conjunto dos **vizinhos** de um vértice v em um grafo G é formado por todos os vértices adjacentes a ele e será denotado por $N(v)$. E, o **grau** de v é exatamente o número de vizinhos de v , denotado por $d(v)$.

Um resultado importante da teoria de grafos é sobre a quantidade de vértices de grau ímpar em um grafo qualquer.

Proposição 2.5. O número de vértices de grau ímpar em um grafo é sempre par.

2.2 Número de Ramsey

Agora que já vimos as principais definições que aparecerão no artigo, podemos introduzir a teoria principal deste trabalho, que são os números de Ramsey. As definições apresentadas a seguir são baseadas em Diestel (2000).

Definição 2.6. Um grafo é chamado **bicolorido** quando todas as suas arestas contém duas cores distintas.

Definição 2.7. Sejam s, t números naturais. O **número de Ramsey** $R(s, t)$ é o menor número natural r tal que uma bicoloração arbitrária das arestas de K_r contém uma cópia azul de K_s ou uma cópia vermelha de K_t .

Consequentemente, temos alguns resultados imediatos.

(i) $R(s, t) = R(t, s)$;

Para ver que isso ocorre, basta trocar as cores de cada aresta.



(ii) $R(s, 1) = 1$;

Como K_1 não possui arestas, não há o que colorir. Portanto, todo K_1 colorido conterá um K_1 vermelho.

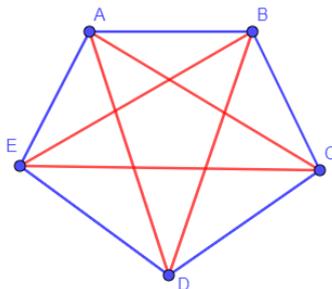
(iii) $R(s, 2) = s$.

Considere K_{s-1} colorido de azul. Esse grafo não possui um K_s azul e nem um K_2 vermelho. Logo, $R(s, 2) \geq s - 1$. Agora, considere K_s colorido de azul. Então, o grafo conterá um K_s azul. E, se tivermos, ao menos uma aresta colorida de vermelho, então o grafo conterá um K_2 vermelho, o que conclui a argumentação.

Exemplo 2.8. O número de Ramsey $R(3, 3)$ é igual a 6.

Inicialmente, observe o grafo bicolorido abaixo apresentado na Figura 2.

Figura 2 – Exemplo de grafo G , onde $|G| = 5$ e não existe K_3 vermelho nem K_3 azul.



Fonte: Elaboração dos autores (2021).

Através desse exemplo, temos uma bicoloração de K_5 sem cópias monocromáticas de K_3 .

Portanto,

$$R(3, 3) > 5.$$

Agora, vamos mostrar que $R(3, 3) \leq 6$, o que concluirá o exemplo. Para isso, veremos que toda bicoloração de K_6 apresenta K_3 monocromático.

Sabemos, pelo princípio da casa dos pombos, que dados cinco elementos divididos em duas classes, há, pelo menos, uma classe com 3 elementos. Assim, considerando que, em qualquer K_6 , cada vértice v se conecta com outros 5 vértices, temos que pelo menos 3 arestas são ou azuis ou vermelhas.

Vejamos o caso em que há 3 arestas vermelhas ligadas à v , digamos vv_1, vv_2, vv_3 . Se dentre as arestas que ligam os vértices v_1, v_2, v_3 existir uma aresta vermelha, obtemos, então, um K_3 vermelho. Caso contrário, todas as arestas serão azuis e teremos a existência de K_3 azul. De forma



análoga, o mesmo acontece quando temos 3 arestas azuis ligadas ao vértice v . Portanto, conclui-se que $R(3, 3) = 6$.

O cálculo dos números de Ramsey é uma tarefa árdua. A maioria dos números de Ramsey conhecidos foram descobertos através de programas computacionais. Mesmo com a alta complexidade deste problema, muitos números já foram encontrados. Os resultados de $R(s, t)$ para $s, t \leq 10$, com $s, t \in \mathbb{N}$, foram compilados a partir de Radziszowski (2021) na Tabela 2.2, sendo que os espaços em branco representam indeterminações.

Tabela 1 – Números de Ramsey $R(s, t)$ já determinados.

$R(s, t)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1	3	6	9	14	18	23	28	36	
4	1	4	9	18	25					
5	1	5	14	25						
6	1	6	18							
7	1	7	23							
8	1	8	28							
9	1	9	36							
10	1	10								

Fonte: Elaboração dos autores a partir de Radziszowski (2021).

Para consulta dos números de Ramsey, indicamos a referência Radziszowski (2021), que consiste em um resumo atualizado periodicamente, apresentando os principais estudos para cada número de Ramsey.

Apesar de muitos números ainda não terem sido determinados, alguns matemáticos demonstraram resultados que nos permitem calcular limitações para esses valores. A limitação superior a seguir está apresentada em Greenwood e Gleason (1955).

Proposição 2.9. *Sejam $s, t \in \mathbb{N}$. O número de Ramsey $R(s, t)$ é limitado superiormente por*

$$R(s, t) \leq \frac{(s + t - 2)!}{(s - 1)!(t - 1)!}.$$

O resultado a seguir, demonstrado em Spencer (1975), apresenta uma limitação inferior para os números de Ramsey utilizando análise combinatória.

Proposição 2.10. *Sejam $k, n \in \mathbb{N}$. Se*

$$4 \binom{k}{2} \binom{n}{k-2} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1,$$



então $R(k, k) \geq n$.

Naturalmente, dada a complexidade na determinação dos valores exatos dos números de Ramsey, é importantíssima a determinação de limites para esses valores. Isso auxilia na busca pela determinação desses valores, bem como otimiza métodos computacionais e de cálculo para a busca do efetivo resultado. Além desses limitadores apresentados, existem outros. Neste artigo, apresentamos apenas esses dois limitadores para que o leitor saiba da existência de resultados desse gênero e, caso tenha interesse, é possível utilizar a referência Radziszowski (2021) para encontrar as últimas publicações sobre as limitações de números de Ramsey que ainda não estão determinados.

3 Resíduos

3.1 Definições e Resultados

Nos resultados, que apresentaremos na próxima seção, foi utilizado o conceito de resíduos de grau n módulo m . Assim, nesta seção, vamos abordar algumas definições, exemplos e resultados sobre isto, para um melhor entendimento do leitor. Destacamos que é necessário um conhecimento preliminar sobre congruências. Segundo Euler (1761), temos a seguinte definição:

Definição 3.1. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Um inteiro a é denominado **resíduo de grau n módulo m** se a congruência*

$$x^n \equiv a \pmod{m}$$

tem solução para algum x natural.

Se essa congruência não tiver solução, então a é chamado de **não resíduo de grau n módulo m** .

Quando $n = 2$, os resíduos e não resíduos de grau 2 módulo m são ditos resíduos quadráticos módulo m , quando $n = 3$, cúbicos, e quando $n = 4$, biquadráticos ou quárticos.

Observe que o caso trivial $a = 0$ é geralmente excluído das listas de resíduos quadráticos [por exemplo, Hardy e Wright (1979, p. 67)] de forma que o número de resíduos quadráticos módulo m é considerado um a menos que o número de quadrados módulo m . No entanto, outras fonte incluem 0 como um resíduo quadrático. Neste artigo, não vamos considerar 0 como um resíduo de grau n módulo m .



Na prática, é suficiente restringir o intervalo a $0 < x < \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, onde $\lfloor x \rfloor$ denota a função de piso (que fornece o maior inteiro menor ou igual a x), por causa da simetria $(m - x)^2 \equiv x^2 \pmod{m}$ ($(m - x)^2 - x^2 = m^2 - 2mx + x^2 - x^2 = m(m - 2)$).

De fato, tome $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor \leq x < m$. Multiplicando por -1 , temos

$$-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor \geq -x > -m.$$

Somando, agora m , temos

$$\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = m - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \geq m - x > m - m = 0$$

ou seja $m - x$ recai em valores no intervalo de 0 a $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$. Por isso, é suficiente restringir o intervalo a $0 < x < \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$.

Observe que, até o momento, nas definições m não precisa ser um número primo.

Exemplo 3.2. Note que se $4^2 \equiv 6 \pmod{10}$, então 6 é um resíduo quadrático módulo 10. Todo o conjunto de resíduos quadráticos módulo 10 é dado por 1, 4, 5, 6 e 9, uma vez que

$$1^2 \equiv 1 \pmod{10}$$

$$2^2 \equiv 4 \pmod{10}$$

$$3^2 \equiv 9 \pmod{10}$$

$$4^2 \equiv 6 \pmod{10}$$

$$5^2 \equiv 5 \pmod{10}$$

$$6^2 \equiv 6 \pmod{10}$$

$$7^2 \equiv 9 \pmod{10}$$

$$8^2 \equiv 4 \pmod{10}$$

$$9^2 \equiv 1 \pmod{10}$$

tornando os números 2, 3, 7 e 8 os não resíduos quadráticos módulo 10.

O exemplo acima foi trivial, uma vez que os números envolvidos são pequenos. Mas nem sempre isso acontecerá. Para auxiliar nos cálculos de resíduos, veremos, agora, alguns resultados que facilitam o processo. Na definição de resíduo de grau n módulo m , o m não precisa ser um número primo. Mas no caso de um módulo primo p , a questão da solubilidade da congruência $x^n \equiv a \pmod{p}$ pode ser respondida usando o **critério de Euler**, como é descrito a seguir, segundo Euler (1761).



Proposição 3.3. Critério de Euler: *Seja p primo, n inteiro positivo e a um inteiro não múltiplo de p . Então, a congruência*

$$x^n \equiv a \pmod{p}$$

tem solução se, e somente se,

$$a^{\frac{(p-1)}{d}} \equiv 1 \pmod{p},$$

onde $d = (n, p - 1)$, com (\cdot, \cdot) representando o máximo divisor comum entre os números naturais envolvidos.

E mais, quando essa condição é satisfeita, a congruência original tem d diferentes soluções módulo p . Segue deste teste que entre os números $\{1, \dots, p - 1\}$ existem exatamente

$$\frac{(p - 1)}{d}$$

resíduos e

$$\frac{(p - 1)(d - 1)}{d}$$

não resíduos de grau n módulo p .

Definiremos a seguir o símbolo de Legendre, segundo a notação de Araújo (2013), e alguns resultados importantes para o nosso estudo.

Definição 3.4. *Seja p um inteiro primo ímpar. Para um inteiro a define-se o **Símbolo de Legendre de a módulo p** e denotamos por*

$$\left(\frac{a}{p}\right)$$

como sendo

- 1, se $p \nmid a$ e a é um resíduo quadrático de p ;
- 0, se $p \mid a$;
- -1, se $p \nmid a$ e a não é um resíduo quadrático de p .

Proposição 3.5. *Se um inteiro a não é divisível por um número primo $p > 2$, então a congruência*

$$a^{\frac{(p-1)}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \pmod{p}$$

ocorre.

Por 3.3 e 3.5, com $n = 2$, temos:



Proposição 3.6. *Seja $p > 2$ um primo. Então, um inteiro a coprimo com p é um **resíduo quadrático módulo p** se, e somente se,*

$$a^{\frac{(p-1)}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$$

*e **não** é um resíduo quadrático módulo p se, e somente se,*

$$a^{\frac{(p-1)}{2}} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Na seção 5, apresentamos, então, os resultados obtidos utilizando as teorias mencionadas até o presente momento.

4 Metodologia

A partir de um projeto de pesquisa intitulado de “Estudo dos números de Ramsey em grafos multipartidos”, desenvolvido no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS) no *Campus* Alvorada, dois professores pesquisadores junto a três alunos do Ensino Médio buscaram estudar os números de Ramsey e encontrar novos resultados para essa teoria. Além de inserir os alunos bolsistas no eixo técnico-científico, por meio da pesquisa, foi possível estudar conceitos novos de Matemática e mostrar o vasto campo de pesquisa que existe na área de ciências exatas. Os projetos de pesquisa desenvolvidos junto aos alunos do Ensino Médio mostram que professores e alunos podem compreender melhor a Matemática e aprofundar juntos os seus estudos, fazendo do projeto de pesquisa um espaço de formação contínua.

Inicialmente, os dois professores, mencionados acima, participaram de um grupo de pesquisa que estava sendo executado no *Campus* Canoas do IFRS sobre números de Ramsey. Nesse grupo, toda a teoria básica necessária para começarmos este artigo foi estudada e explorada. Com um conhecimento mais estruturado sobre o assunto, quando o projeto do *Campus* Canoas finalizou, foi aberto o grupo de pesquisa no próprio *Campus* dos professores, *Campus* Alvorada. Assim, com os bolsistas, realizou-se uma revisão bibliográfica, a fim de conceituar os principais tópicos da teoria trabalhada com os demais integrantes do grupo. Diestel (2000) foi o livro introdutório para que pudéssemos compreender a teoria de grafos e, com Sanches (2013) e Soares (2014), revisamos o estudo dos números de Ramsey. Ao longo da pesquisa, estudamos vários artigos, incluindo os citados nas referências. Por meio de apresentações de seminários, as ideias expostas neste trabalho foram surgindo e cálculos foram realizados e apresentados para o grupo de pesquisa. Os resultados encontrados estão apresentados na próxima seção.



5 Resultados e Discussões

Ao estudarmos as referências bibliográficas sobre os números de Ramsey, encontramos que Greenwood e Gleason (1955) provam que $R(3, 5) = 14$ por meio de um método de coloração baseado em resíduos cúbicos, e também provam que $R(4, 4) = 18$ por meio de um método de coloração baseado em resíduos quadráticos. Assim, expandimos e estudamos esse método de coloração de forma geral aplicada ao caso do número de Ramsey $R(3, 10)$.

5.1 Estudo do Número de Ramsey $R(3, 10)$

O número de Ramsey $R(3, 10)$ ainda continua indeterminado, porém se conhece uma boa limitação para esse valor. Em Exoo (1989), provou-se que $R(3, 10) \geq 40$ e, em Goedgebeur e Radziszowski (2013), encontrou-se um novo limite superior, determinando que $R(3, 10) \leq 42$.

Sabendo que $40 \leq R(3, 10) \leq 42$, buscou-se estudar um método de coloração para um grafo completo G bicolorido, utilizando como princípio de coloração o método dos resíduos de grau n módulo m , para m, n naturais. O resultado obtido está apresentado no teorema a seguir. A fim de aplicarmos a teoria apresentada na seção anterior, consideramos um grafo G cuja ordem seja um número primo e $40 \leq |G| \leq 42$, assim temos o estudo realizado considerando $|G| = 41$.

Teorema 5.1. *Sejam n um número natural, $G = (V, E)$ um grafo completo com 41 vértices, e o corpo de 41 elementos com os elementos numerados de 0 a 40 inclusive, e escreva cada elemento do corpo como um vértice do grafo G . Dados $x, y \in E$, com $x < y$ considere a bicoloração dada por*

- *Se $y - x$ é um resíduo de grau n módulo 41, então a aresta xy é azul;*
- *Caso contrário, a aresta xy é vermelha.*

Então, G contém uma cópia de K_3 azul ou uma cópia de K_{10} vermelha.

Prova. Dado um grafo G completo bicolorido, com $|G| = 41$ e $V = \{0, 1, 2, \dots, 40\}$. Consideramos, então, a Proposição 3.3, onde $p = 41$.

Inicialmente, é preciso observar que precisamos somente considerar os resíduos de grau n módulo 41 para $n \in R = \{2, 4, 5, 8, 10, 20\}$. Para $n = 1$ e $n = 40$, temos contra-exemplos triviais. Para os demais casos de n , temos que existe algum $k \in R$ tal que $d = (n, p-1) = (k, p-1)$ e, portanto, os



resíduos de grau k e n módulo 41 são iguais, implicando no mesmo método de coloração. Vamos, então, analisar cada caso.

Inicialmente, estudaremos o caso em que $n = 2$. Considerando os resíduos quadráticos módulo 41, temos pela observação após a Proposição 3.3 e pela Proposição 3.6, que existem 20 resíduos quadráticos módulo 41 e que

$$a \text{ é resíduo quadrático módulo } 41 \Leftrightarrow a^{20} \equiv 1 \pmod{41}$$

e, conseqüentemente,

$$a \text{ não é resíduo quadrático módulo } 41 \Leftrightarrow a^{20} \equiv -1 \pmod{41}.$$

A partir dessas observações, determinamos o conjunto dos resíduos quadráticos módulo 41 e denotamos esse conjunto por $R_2 = \{1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 16, 18, 20, 21, 23, 25, 31, 32, 33, 36, 37, 39, 40\}$. Definindo, então, a coloração da aresta $xy \in E$ como sendo azul quando $y - x \in R_2$, e vermelha caso contrário.

Bem, nesse caso, é fácil de notar que o conjunto de vértices $\{0, 1, 2\}$ forma um K_3 azul e a demonstração se encerra.

O segundo caso é dado quando $n = 4$. Neste caso, pela Proposição 3.3, temos que

$$a \text{ é resíduo de grau } 4 \text{ módulo } 41 \Leftrightarrow a^{10} \equiv 1 \pmod{41}.$$

Realizando os cálculos determinísticos, obtemos que o conjunto dos resíduos quárticos módulo 41 é dado por $R_4 = \{1, 4, 10, 16, 18, 23, 25, 31, 37, 40\}$. Para todos os demais valores $a \in V - R_4$, temos que a^{10} é congruente a algum dos elementos do conjunto $\{-1, 9, 32\}$.

Definimos, agora, o método de coloração de forma análoga à anterior: a aresta $xy \in E$ será azul, quando $y - x \in R_4$, e será vermelha, caso contrário.

Importante observar que esse argumento de coloração será útil e eficiente quando 1 e -1 forem ambos resíduos de grau n módulo 41, a fim de que a ordem de diferenciação não importe, isto é, se $x - y \in R_n$, então é preciso que também $y - x \in R_n$. Nesse caso, se $x - y \in R_4$, temos que

$$(y - x)^{10} = ((-1)(x - y))^{10} = (-1)^{10}(x - y)^{10} \equiv 1 \pmod{41},$$

isto implica na unicidade de coloração para qualquer notação dos vértices de G .



Para encontrar uma cópia K_{10} vermelha, consideramos um vértice qualquer a e denotamos os demais vértices por $a+1, a+2, \dots, a+40$. A partir de testes, obtivemos o seguinte contra-exemplo de cópia monocromática vermelha $K_{10} = \{0, 2, 8, 14, 17, 19, 22, 28, 34, 36\}$. Mais ainda, qualquer K_{10} formado pelos vértices $\{a, a+2, a+8, a+14, a+17, a+19, a+22, a+28, a+34, a+36\}$ é vermelho. Portanto, G possui uma cópia K_{10} vermelha como queríamos demonstrar.

Passamos, agora, para o caso $n = 5$. O conjunto dos resíduos de grau 5 módulo 41 é dado por:

$$R_5 = \{1, 3, 9, 14, 27, 32, 38, 40\}.$$

Neste caso, é possível encontrar o subgrafo K_{10} vermelho com os vértices $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 23, 25, 30\}$.

No caso em que $n = 5$ e nos três casos restantes, pode-se utilizar a ideia que está na observação a seguir a este teorema para provar a não existência de K_3 azul. Por isso, vamos apenas dizer o conjunto de resíduos em cada caso, juntamente com a cópia monocromática vermelha de K_{10} , a qual basta para a demonstração do teorema.

No caso $n = 8$, os resíduos de grau 8 módulo 41 são $R_8 = \{1, 10, 16, 18, 37\}$ e os vértices que formam o K_{10} são $\{1, 3, 5, 7, 9, 12, 23, 26, 31, 33\}$.

Com $n = 10$, os resíduos de grau 10 módulo 41 são $R_{10} = \{1, 19, 32, 40\}$. E,

$$K_{10} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}.$$

Quando $n = 20$, o conjunto $R_{20} = \{1, 40\}$ são os resíduos de grau 20 módulo 41. E os vértices $\{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21\}$ formam um K_{10} vermelho, concluindo a demonstração. \square

Na observação que apresentamos a seguir, está a prova de que não existe K_3 na coloração azul de acordo com a coloração apresentada no Teorema 5.1.

Observação 5.2 Em um primeiro momento, buscamos a existência de um grafo K_3 azul nos casos mencionados do teorema anterior. Para o caso dos resíduos quárticos, vejamos a seguir como podemos provar a não existência de tal grafo completo.

Suponhamos que exista K_3 azul. Sem perda de generalidade, um desses vértices pode ser considerado como sendo o elemento do corpo marcado como 0. E denotamos os outros dois vértices por a e b .



Nesse contexto, temos que $a, b, b - a \in R_4$. Como a é um elemento não nulo do corpo, multiplicamos os elementos do conjunto $\{a, b, b - a\}$ por a^{-1} , obtendo o conjunto $\{1, B, 1 - B\}$, onde $B = ba^{-1}$. Observe que os elementos desse último conjunto devem ser todos resíduos de grau 4 módulo 41 e nenhum deles pode ser zero.

De fato, se $B = 0$, então $ba^{-1} = 0$. Multiplicando ambos os lados da igualdade por a , teríamos que $b = 0$, o que é um absurdo, pois a e b não são o vértice nulo. Se $1 - B = 0$, então teríamos que $1 = ba^{-1}$. Multiplicando ambos os lados da igualdade por a , teríamos que $a = b$, o que também é um absurdo, pois a e b são vértices distintos. Veremos agora, o porquê de todos os elementos do conjunto $\{1, B, 1 - B\}$ serem resíduos de grau 4 módulo 41.

Suponhamos que B não seja resíduo de grau 4 módulo 41, então

$$B^{10} \equiv K \pmod{41},$$

com $K \in \{-1, 9, 32\}$. Substituindo $B = ba^{-1}$ e, após, multiplicando a equivalência por a^{10} , obtemos que

$$b^{10} \equiv Ka^{10} \pmod{41}.$$

Como a é um resíduo de grau 4 módulo 41, então teríamos

$$b^{10} \equiv K \pmod{41},$$

o que é um absurdo, pois b é um resíduo de grau 4 módulo 41. Logo, B é um resíduo de grau 4 módulo 41.

Agora, suponha que $1 - B$ não seja resíduo de grau 4 módulo 41, então

$$(1 - B)^{10} \equiv K \pmod{41}$$

com $K \in \{-1, 9, 32\}$. Trocando $B = ba^{-1}$, temos

$$(1 - ba^{-1})^{10} \equiv K \pmod{41}.$$

Usando Binômio de Newton, podemos reescrever essa equivalência da seguinte forma:

$$\sum_{i=0}^{10} C_{10}^i 1^i (-ba^{-1})^{10-i} \equiv K \pmod{41}$$

Desenvolvendo a parcela da esquerda, temos

$$b^{10}a^{-10} - 10b^9a^{-9} + 45b^8a^{-8} - 120b^7a^{-7} + 210b^6a^{-6} - 252b^5a^{-5}$$

$$+ 210b^4a^{-4} - 120b^3a^{-3} + 45b^2a^{-2} - 10ba^{-1} + 1 \equiv K \pmod{41}$$



Multiplicando por a^{10} , temos

$$b^{10} - 10b^9a^1 + 45b^8a^2 - 120b^7a^3 + 210b^6a^4 - 252b^5a^5 \tag{1}$$

$$+210b^4a^6 - 120b^3a^7 + 45b^2a^8 - 10ba^9 + 1a^{10} \equiv Ka^{10} \pmod{41}$$

Como a e $a - b$ são resíduos de grau 4 módulo 41, temos que

$$a^{10} \equiv 1 \pmod{41}$$

$$(a - b)^{10} \equiv 1 \pmod{41}$$

Agora, observe que

$$(a - b)^{10} = \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i a^i (-b)^{10-i} \tag{2}$$

Desenvolvendo a parcela da direita, temos

$$b^{10} - 10ab^9 + 45a^2b^8 - 120a^3b^7 + 210a^4b^6 - 252a^5b^5 + 210a^6b^4 - 120a^7b^3 + 45a^8b^2 - 10a^9b + a^{10} \equiv 1 \pmod{41}$$

De (1) e (2), temos que

$$1 \stackrel{(2)}{\equiv} (1 - ba^{-1})^{10} a^{10} \stackrel{(1)}{\equiv} Ka^{10} \equiv K \pmod{41}$$

o que é um impasse. Assim, $1 - B$ é um resíduo de grau 4 módulo 41.

Então, temos que $1, B$ e $1 - B$ são resíduos de grau 4 módulo 41.

Observe que, se $B \in \{4, 10, 16, 18, 23, 25, 31, 37, 40\}$, então $1 - B$ seria um elemento do conjunto $\{2, 5, 11, 17, 19, 24, 26, 32, 38\}$. Porém, nenhum elemento de $1 - B$ pertence ao conjunto R_4 . Logo, é absurdo que B e $1 - B$ sejam ambos resíduos de grau 4 módulo 41, o que implica que não existe K_3 azul. Restou, então, provar que G possui uma cópia de K_{10} vermelha.

Este mesmo raciocínio foi utilizado pelos autores para os casos em que $n \in \{5, 8, 10, 20\}$, para a prova de que não existe K_3 azul nesta coloração apresentada.



6 Considerações Finais

Após apresentarmos e estudarmos essa bicoloração, concluímos que ela, diretamente, não determina o número de Ramsey $R(3, 10)$. A ideia é continuar com o estudo desse número a fim de encontrarmos o seu valor exato. Apesar do resultado apresentado no Teorema 5.1 sempre gerar um grafo completo K_3 ou K_{10} monocromático, existe a possibilidade de que seja definida uma nova coloração, baseada nas classes dos valores não-resíduo encontrados em cada caso.

Outra possibilidade, seria estudar as variações do número de Ramsey clássico, onde se consideram outros tipos de grafos, como caminhos, ciclos, grafos estrela, entre outros. Esses estudos apresentam maiores facilidades em suas determinações. Indicamos Radziszowski (2021) como referência para análise dos valores já encontrados. Como continuidade desta pesquisa, buscaremos utilizar os resultados apresentados para estudo das variações do número de Ramsey clássico.

Além disso, não podemos deixar de mencionar, que introduzir esses assuntos para estudantes de cursos Técnicos Integrados ao Ensino Médio foi enriquecedor tanto para os professores quanto para os bolsistas envolvidos. As ideias aqui expostas foram pensadas em conjunto, proporcionando uma ampliação dos conhecimentos matemáticos e interação entre os participantes.

Com o uso dessa teoria, foi possível estudar com os alunos conteúdos de nível superior, como congruências, além de observar a aplicabilidade da análise combinatória em outros ramos da Matemática.

Por meio desta pesquisa, foi possível mostrar que podemos abordar conteúdos mais sofisticados de forma satisfatória com alunos de cursos Técnicos Integrados ao Ensino Médio. Com certeza, esse estudo colabora no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática e, sobretudo, agrega mais conhecimento sobre o número de Ramsey $R(3, 10)$.

Referências

ARAÚJO, L. R. **Congruências quadráticas, reciprocidade e aplicações em sala de aula.**

Orientador: Bruno Henrique Carvalho Ribeiro. 2013. 64 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, ago. 2013.

Disponível em:

<https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/7480/2/arquivototal.pdf>. Acesso em: 28 jan. 2022.

DIESTEL, R. **Graph Theory.** Eletronic edition 2000. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 2000.

Disponível em: <http://www.esi2.us.es/~mbilbao/pdf/Files/DiestelGT.pdf>. Acesso em: 28

AZEVEDO, Danielle Santos; MEDEIROS, Jonas Francisco de; ZITZKE, Daniel Coswig; PEREIRA, Rafael Rodrigues; BERNARDINO, Lenon Saturnino. Análise de um método de coloração no estudo do número de Ramsey $R(3, 10)$. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 8, n. 1, p. e3001, 31 de janeiro de 2022. <https://doi.org/10.35819/remat2022v8i1id4985>.



jan. 2022.

EULER, L. Theoremata circa residua ex divisione potestatum relicta. **Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae**, v. 7, p. 49-82, 1761. Disponível em: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/262>. Acesso em: 28 jan. 2022.

EXOO, G. On Two Classical Ramsey Numbers of the Form $R(3, n)$. **SIAM Journal on Discrete Mathematics**, v. 2, n. 4, p. 488-490, 1989. DOI: <https://doi.org/10.1137/0402043>.

GOEDGEBEUR, J.; RADZISZOWSKI, S. P. New Computational Upper Bounds for Ramsey Numbers $R(3, k)$. **Electronic Journal of Combinatorics**, v. 20, n. 1, 28 p. 20 mar. 2013. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1210.5826>. Acesso em: 28 jan. 2022.

GREENWOOD, R. E.; GLEASON, A. M. Combinatorial Relations and Chromatic Graphs. **Canadian Journal of Mathematics**, v. 7, p. 1-7, 1955. DOI: <https://doi.org/10.4153/CJM-1955-001-4>.

HARDY, G. H.; WRIGHT, E. M. **An Introduction to the Theory of Numbers**. 5. ed. Oxford: Oxford University Press, 1979.

RADZISZOWSKI, S. O. Small Ramsey numbers. **The Electronic Journal of Combinatorics**. Dynamical survey, revision 16, 15 jan. 2021. Disponível em: <https://www.combinatorics.org/files/Surveys/ds1/ds1v16-2021.pdf>. Acesso em: 28 jan. 2022.

RAMSEY, F. P. On a Problem of Formal Logic. **Proceedings of the London Mathematical Society**, v. 2, n. 30, p. 264-286, 13 dez. 1928. DOI: <https://doi.org/10.1112/plms/s2-30.1.264>.

SANCHES, J. **Ferramentas probabilísticas aplicadas a problemas de coloração em grafos**. Orientador: Carlos Hoppen. 2016. 191 f. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, dez. 2016. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/153219>. Acesso em: 28 jan. 2022.

SANCHES, J. **Números de Ramsey em grafos multipartidos**. Orientador: Emerson Luiz do Monte Carmelo. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.

SOARES, G. A. M. J. **O Teorema de Ramsey e outros resultados de combinatória que não são contagem**. Orientador: Carlos Gustavo Moreira. 2014. 45 f. Tese (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, 2014. Disponível em: https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/gustavo_adolfo_soares.pdf. Acesso em: 28 jan. 2022.

SPENCER, J. H. Ramsey's Theorem: A New Lower Bound. **Journal of Combinatorial Theory, Série A**, v. 18, n. 1, p. 108-115, 1975. DOI: [https://doi.org/10.1016/0097-3165\(75\)90071-0](https://doi.org/10.1016/0097-3165(75)90071-0).

