# Interpretação combinatória para uma identidade envolvendo sobrepartições em partes $\equiv l \pmod i$

## Combinatorial interpretation for an identity involving overpartitions into parts $\equiv l \pmod i$

Mateus Alegri
Universidade Federal de Sergipe (UFS), Departamento de Matemática (DMAI), Itabaiana, SE, Brasil
https://orcid.org/0000-0002-3735-5345, allegri.mateus@gmail.com

**Informações do Artigo**

**Como citar este artigo**

ALEGRI, Mateus. Interpretação combinatória para uma identidade envolvendo sobrepartições em partes $\equiv l \pmod i$. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 6, n. 1, p. 1-11, 29 jun. 2020. DOI: `https://doi.org/10.35819/remat2020v6i1id3856`

**Histórico do Artigo**
Submissão: 5 de Janeiro de 2020.
Aceite: 1 de Junho de 2020.

**Palavras-chave**
Partições de Inteiros
Sobrepartições de Inteiros
Funções Geradoras
Matrizes
Interpretações Combinatórias

**Resumo**
No presente artigo fornecemos uma interpretação combinatória para uma identidade envolvendo q-séries hipergeométricas em termos de matrizes. Esta perfaz uma identidade que pode ser interpretada como uma função geradora para o número de sobrepartições de um inteiro $n$ cujas partes são congruentes a $l$ módulo $i$. Faremos uso do conhecido método de Santos, descrito em Santos, Mondek e Ribeiro (2011), que interpreta coeficientes de q-séries como o número de certas matrizes, em que suas entradas respeitam algumas regras de vizinhanças.

**Keywords**
Integer Partitions
Integer Overpartitions
Generating Functions
Matrices
Combinatorial Interpretations

**Abstract**
In the present paper we provide a combinatorial interpretation for an identity involving hypergeometric q-series in terms of matrices. This makes an identity that can be interpreted as a generating function for the number of overpartitions of an integer $n$ whose parts are congruent to $l$ module $i$. We will use the well-known Santos method, described in Santos, Mondek and Ribeiro (2011), that interprets coefficients of q-series as the number of certain matrices, in which their entries respect some neighborhood rules.

## 1 Introdução

Neste artigo buscaremos uma interpretação combinatória para uma identidade em termos de q-séries hipergeométricas em que os coeficientes desta série são dados pelo número de sobrepartições de uma classe específica. Ressaltamos que os resultados presentes neste artigo fazem parte do elenco de resultados da tese de doutorado do autor (ALEGRI, 2010). Vamos a seguir lançar mão de objetos matemáticos como partições de inteiros e sobrepartições de inteiros, suas respectivas funções geradoras, e algumas identidades.

**Definição 1.1.** *Uma partição de um inteiro $n$ é uma soma não ordenada de inteiros positivos tais que $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_s = n$. Convencionamos $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_s$.*

**Exemplo 1.2.** *Para $n = 7$, temos as seguintes partições: $7,\ 6+1,\ 5+2,\ 5+1+1,\ 4+3,\ 4+2+1,$ $4+1+1+1,\ 3+3+1,\ 3+2+2\ \ 3+2+1+1,\ 3+1+1+1+1,\ 2+2+2+1,\ 2+2+1+1+1,$ $2+1+1+1+1+1,\ 1+1+1+1+1+1+1.$*

Denote por $p(n)$ a função que fornece o número de partições de um inteiro positivo $n$. Definimos $p(0) = 1$, associando o número zero à partição vazia. A sequência $(p(n))_{n\geq 0} = (1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, 56, 77, 101, 135, \ldots)$ é tal que a sua taxa de crescimento assintótico[1] é dada por:

$$p(n) \sim \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}}{4n\sqrt{3}}.$$

Pode-se provar que[2] $p(n) \leq F_{n+1}$, onde $(F_n)_{n\geq 0}$ é a sequência de Fibonacci. A função geradora para o número de partições, que é demonstrada em Andrews (1976), é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \frac{1}{(q;q)_\infty},$$

onde $|q| < 1$, e

$$(a;q)_n = \begin{cases} (1-a)(1-aq)(1-aq^2)\ldots(1-aq^{n-1}) & \text{, se} \quad n > 0 \\ 1 & \text{, se} \quad n = 0 \end{cases}$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos[3]:

[1] Uma demonstração deste fato pode ser visto no Capítulo 6 de Andrews (1976).
[2] Uma demonstração para este fato pode ser encontrado em Andrews e Eriksson (2004).
[3] O limite $(a;q)_\infty$ é chamado de símbolo de q-Pochhammer.

$$(a;q)_\infty = lim_{n\to\infty}(a;q)_n.$$

Há muitas formas de escrever a função geradora de $(p(n))_{n\geq 0}$, como exibido a seguir.

$$\frac{1}{(q;q)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{(q;q)_n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n^2} \tag{1}$$

A primeira equação é devida a Euler, descrita em Kratzer e Rudio (1911), e pode ser generalizada via o teorema q-binomial 1.3, que é enunciado a seguir. A segunda equação pode ser demonstrada utilizando um ferramental gráfico chamado de Diagrama de Ferrers, utilizando quadrados de Durfee, como em Andrews (1972), Andrews (1976), Andrews e Eriksson (2004).

**Teorema 1.3.** *Teorema q-binomial*

*Para* $|x| < 1$, $|q| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n x^n}{(q;q)_n} = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}.$$

Uma demonstração analítica deste teorema pode ser vista em Andrews, Askey e Roy (1999).

## 2 Resultados Preliminares

Nesta seção discutiremos conceitos e resultados específicos a fim de obtermos o resultado principal na seção seguinte. Iniciamos com o conceito de sobrepartição de inteiros. Esta terminologia surgiu em Corteel e Lovejoy (2004) e passou a ser largamente utilizado desde então. Em trabalhos importantes como Hirschhorn e Sellers (2005a, 2005b), Kim (2008) e mais recentemente em Al-Saedi (2019), faz-se uso desta generalização do conceito de partições de inteiros.

**Definição 2.1.** *Uma sobrepartição de um inteiro $n$ é uma partição de $n$ em que a primeira ocorrência de uma parte pode ser marcada.*

**Exemplo 2.2.** *Uma sobrepartição de $n = 51$ é $\bar{8}+8+7+5+5+\bar{4}+\bar{3}+3+3+2+\bar{1}+1+1$, enquanto $\bar{8}+\bar{8}+7+5+5+\bar{4}+\bar{3}+3+3+2+\bar{1}+1+1$ não é uma sobrepartição de $n = 51$, pois a parte $8$ aparece marcada duas vezes.*

Como a função geradora para o número de partições em partes distintas é dada por $(-q;q)_\infty$ (isto pode ser visto em Andrews, Askey e Roy (1999)), e como uma parte marcada é sempre distinta das demais marcadas, a função geradora para o número de sobrepartições é:

$$\frac{(-q;q)_\infty}{(q;q)_\infty}$$

Esta pode ser associada à equação:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1;q)_n q^n}{(q,q)_n} = \frac{(-q;q)_\infty}{(q;q)_\infty},$$

que pode ser provada via teorema *q*-binomial, colocando $a = -1$ e $x = q$. Ou também combinatoriamente, notando que o termo geral do somatório é:

$$\frac{(-1;q)_n q^n}{(q;q)_n} = \frac{(1+q)(1+q^2)\ldots(1+q^{n+1})2q^n}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)}$$

Para cada $n$ fixado, este termo geral gera sobrepartições em que a maior parte vale $n$, pois o fator $2$ no numerador diz que temos uma parte e a sua cópia, isto é, temos uma parte marcada e a mesma desmarcada; no denominador teremos partes não marcadas de $1$ a *n*, sem restrições.

A fim de obter o resultado principal do artigo, vamos utilizar um método estabelecido por Santos, Mondek e Ribeiro em (2011), que visa interpretar coeficientes de q-séries como o número de matrizes de duas linhas com leis específicas na formação das suas linhas. O próximo teorema utiliza a Equação (1). Os autores citados trocaram a variável $q$ em $\frac{q^n}{(q;q)_n}$ para $\frac{q^{kn}}{(q^j;q^k)_n}$ colocando expoentes $j$ e $k$ em (1) e, interpretando $j$ e $k$ como vetores, obtiveram o seguinte resultado como corolário.

**Teorema 2.3.** *(SANTOS; MONDEK; RIBEIRO, 2011) O número de partições irrestritas de um inteiro positivo $n$ é igual ao número de matrizes de duas linhas da forma:*

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \ldots & d_s \end{pmatrix}$$

*com $c_s = 0$, $c_t = c_{t+1} + d_{t+1}$, e $n = \sum c_t + \sum d_t$, para $t < s$.*

Podemos determinar $c_i$ em função de $d_i$ para todo $i \in \{1, ..., s-1\}$, de modo que a matriz $A$ pode ser representada como a seguir.

$$A = \begin{pmatrix} d_2 + d_3 \ldots + d_s & d_3 + d_4 \ldots + d_s & d_4 \ldots + d_s & \ldots & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & \ldots & d_s \end{pmatrix}$$

Pode-se notar que para uma partição de $n$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_k$, temos:

$$\begin{cases} d_1 & = & \lambda_1 - \lambda_2 \\ d_2 & = & \lambda_2 - \lambda_3 \\ \vdots & & \\ d_k & = & \lambda_k \end{cases}$$

Isto significa que uma partição é unicamente determinada por $d_i$, $1 \leq i \leq k$. Em Brietzke, Santos e Silva (2010, 2013), os autores encontraram interpretações combinatórias em termos de matrizes de duas linhas para diversas identidades presentes no artigo de Slater de 1952.

Em Alegri (2010) e Alegri *et al.* (2011), interpretações combinatórias em termos de matrizes de três linhas foram obtidas para identidades envolvendo sobrepartições irrestritas, como no teorema a seguir. Ainda em Alegri *et al.* (2011), os autores encontraram uma imersão do conjunto de sobrepartições no conjunto de partições planas por meio de um caminho reticulado no espaço.

**Teorema 2.4.** *(ALEGRI, 2010, ALEGRI et al., 2011) O número de sobrepartições de n é igual ao número de matrizes da forma:*

$$A_s = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \ldots & d_s \\ e_1 & e_2 & e_3 & \ldots & e_s \end{pmatrix}$$

*com* $c_s + e_s = 1$, $e_t = 0$ *ou* $1$, $i_t = 0$ *ou* $1$, $c_t = c_{t+1} + d_{t+1} - i_t$, $t < s$, $n = \sum c_t + \sum d_t + \sum e_t$.

Nosso principal resultado neste artigo é, de certa forma, análogo ao feito no teorema anterior, porém separando em certas classes de sobrepartições. Considerando a seguinte equação

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1, q^i)_n q^{ln}}{(q^i, q^i)_n} = \frac{(-q^l, q^i)_\infty}{(q^l; q^i)_\infty}, \tag{2}$$

no caso $i = 2$ e $l = 1$ temos sobrepartições em partes ímpares, sendo este um caso interessante no qual se tem uma interpretação combinatória bastante simples. A ideia original fora a de fazer uma mudança de variáveis do tipo $q \mapsto q^i$ no teorema *q*-binomial e considerar $x = q^l$ e $a = -1$, a fim de buscar uma interpretação para a nova identidade. O lado direito desta identidade pode ser interpretado como a função geradora de sobrepartições de *n* em partes $\equiv l \pmod{i}$.

## 3 Resultados Principais

Os resultados a seguir encontram-se no Capítulo 3 de Alegri (2010). O teorema a seguir fornece uma nova interpretação combinatória para a o caso $l = 1$.

**Teorema 3.1.** *Seja $s_1(n)$ o número de sobrepartições de n em partes pertencentes a $A_{k,j,\bar{k}} = \{ck + dj + e\bar{k} | c, d, e \geq 0\}$ da forma $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_s$, com $\mu_t = c_t k + d_t j + e_t \bar{k}$, $\mu_t$ e $\mu_{t+1}$ partes consecutivas, $c_s + e_s = 1$, $e_t = 0$ ou $1$, $d_t \equiv 0 \pmod{i}$ e $c_t = c_{t+1} + d_{t+1} - e_{t+1}$, para $t < s$, então:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_1(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1, q^{ik})_n q^{kn}}{(q^{ij}; q^{ik})_n}. \tag{3}$$

*Demonstração.* Denotamos por $s_1(m, n)$ o número de sobrepartições enumeradas por $s_1(n)$ e tendo exatamente *m* partes.

A relação abaixo é satisfeita por $s_1(m, n)$:

$$s_1(m, n) = s_1(m, n - kim + ik - ij) + s_1(m - 1, n - k) + s_1(m - 1, n - k - kim).$$

Consideremos estes conjuntos disjuntos de partições:

**A.** Aquelas em que $d_s \geq 0$;

**B.** Aquelas em que $k$ é parte;

**C.** Aquelas em que $\bar{k}$ é parte.

Para as partições no conjunto A, subtraímos $ij$ da menor parte e $ki$ das outras. Assim, teremos partições de $n - ki(m-1) - ij$ em $m$ partes, que são enumeradas por $s(m, n - kim + ik - ij)$. Para partições no conjunto B, em que apenas $k$ é parte, removemos a parte $k$ e teremos partições de $n - k$ em $m - 1$ partes. Finalmente para aquelas em que $\bar{k}$ é parte, removemos esta parte e $ik$ das demais, sendo estas enumeradas por $s(m - 1, n - k - kim)$.

Definimos:

$$F(z,q)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}s_1(m,n)z^mq^n$$

Pela construção feita acima, temos:

$$F(z,q)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}s_1(m,n-kim+ik-ij)z^mq^n+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}s_1(m-1,n-k)z^mq^n$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}s_1(m,n-k-kim)z^mq^n$$

$$=q^{ij-ik}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}s_1(m,n-kim+ik-ij)(zq^{ik})^mq^{n-kim+ik-ij}$$

$$+zq^k\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}s_1(m-1,n-k)z^{m-1}q^{n-k}+$$

$$zq^k\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}s_1(m-1,n-k-kim)(zq^{ik})^{m-1}q^{n-k}.$$

Considerando $h(m,q)=\sum_{n=0}^{\infty}s_1(m,n)q^n$, então $F(z,q)=\sum_{n=0}^{\infty}h(n,q)z^n$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}h(n,q)z^n=q^{ij-ik}\sum_{n=0}^{\infty}h(n,q)(zq^{ik})^n+zq^k\sum_{n=0}^{\infty}h(n,q)z^n+zq^k\sum_{n=0}^{\infty}h(n,q)(zq^{ik})^n.$$

Deste modo, temos a equação funcional:

$$F(z,q)=q^{ij-ik}F(zq^{ik},q)+zq^kF(z,q)+zq^kF(zq^{ik},q)$$

e comparando os coeficientes de $z^n$ temos:

$$h(n,q)=q^{ij-ik}h(n,q)+q^kh(n-1,q)+q^{k+kin}h(n-1,q).$$

Podemos colocar esta equação na seguinte forma:

$$h(n,q)=\frac{q^kh(n-1,q)+q^{k+kin}h(n-1,q)}{(1-q^{ij-ik+kin})}.$$

Fazendo *n* iterações e observando que $h(0,q)=1$, temos:

$$h(n,q)=\frac{(-1,q^{ik})_n q^{kn}}{(q^{ij},q^{ik})_n},$$

de modo que:

$$F(z,q)=\sum_{n=0}^{\infty}h(n,q)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1,q^{ik})_n q^{kn}z^n}{(q^{ij};q^{ik})_n}.$$

Fazendo $z=1$, obtemos a seguinte equação:

$F(1,q)=\sum_{n=0}^{\infty}s_1(n)q^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1,q^{ik})_n q^{kn}}{(q^{ij};q^{ik})_n}$, o que demonstra o teorema.

□

Vamos modificar a equação funcional que acabamos de obter, de modo a conseguir uma interpretação combinatória para a identidade em questão. Assim, a nova equação funcional é:

$$F(z,q)=q^{ij-ik}F(zq^{ik},q)+zq^kF(z,q)+zq^{\bar{k}}F(zq^{ik},q)$$

Podemos estender este resultado para partições em partes congruentes a *l módulo i*:

**Teorema 3.2.** *Seja $r_1(n)$ o número de sobrepartições de n em partes pertencentes a $A_{k,j,\bar{k}}$ da forma $\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_s$, com $\mu_t=c_tk+d_tj+e_t\bar{k}$, $\mu_t$ e $\mu_{t+1}$ partes consecutivas, $c_s+e_s=l$, $e_t=0$ ou $l$, $d_t\equiv 0 \pmod{i}$ e $c_t=c_{t+1}+d_{t+1}-e_{t+1}$ para $t<s$, então:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}s_1(n)q^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1,q^{ik})_n q^{kln}}{(q^{ij};q^{ik})_n}. \tag{4}$$

A partir deste teorema é possível encontrar a equação funcional:

$$F(z,q)=q^{ji-ki}F(zq^{ki},q)+zq^{\bar{k}l}F(z,q)+zq^{kl}F(zq^{ki},q)$$

A demonstração deste teorema é análoga à anterior e a omitiremos. Como feito anteriormente, vamos, a seguir, escrever o teorema principal na forma matricial.

**Teorema 3.3.** *A função geradora para matrizes da forma:*

$$\begin{pmatrix} c_1 \times k & c_2 \times k & c_3 \times k & \dots & c_s \times k \\ d_1 \times j & d_2 \times j & d_3 \times j & \dots & d_s \times j \\ e_1 \times \bar{k} & e_2 \times \bar{k} & e_3 \times \bar{k} & \dots & e_s \times \bar{k} \end{pmatrix}$$

*com $c_s + e_s = l$, $e_t = 0$ ou $l$, $d_t \equiv 0 \pmod{i}$, $c_t = c_{t+1} + d_{t+1} - e_{t+1}$ para $t < s$, é dada por:*

$$F(1, q) = \sum_{n=0}^{\infty} r_1(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1, q^{ik})q^{nlk}}{(q^{ij}; q^{ik})_n}.$$

**Corolário 3.4.** *O número de sobrepartições de n em partes $\equiv l \pmod{i}$ é igual ao número de matrizes da forma:*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_s \\ e_1 & e_2 & e_3 & \dots & e_s \end{pmatrix}$$

*com $c_s + e_s = l$, $e_t = 0$ ou $e_t = l$, $d_t \equiv 0 \pmod{i}, c_t = c_{t+1} + d_{t+1} - e_{t+1}$ para $t < s$, e $n = \sum c_t + \sum d_t + \sum e_t$. Caso se $\mu_t$ e $\mu_{t+1}$ são partes consecutivas de uma sobrepartição de $n$, sendo ambas marcadas e $\mu_{t+1} = \bar{1}$, então[4] $c_t = 0$.*

Para $i = 2$ e $l = 1$, como dito anteriormente, o lado direito da identidade abaixo é a função geradora para sobrepartições em **partes ímpares**, um caso particular do Teorema $q$-Binomial (Teorema 1.3)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1, q^2)_n q^n}{(q^2, q^2)_n} = \frac{(-q, q^2)_\infty}{(q; q^2)_\infty}. \tag{5}$$

**Exemplo 3.5.** *Para a sobrepartição de $n = 30$, $\lambda = \bar{9} + 7 + 5 + \bar{3} + 3 + \bar{1} + 1 + 1$, temos:*

$$A_s = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A Tabela 1 apresenta exemplos para $n = 5$ e suas respectivas representações matriciais.

[4] *A razão pela qual é que o $c_t$ correspondente teria que ser negativo, o que não é correto pois coeficientes negativos não fazem parte do conjunto $A_{k,j,\bar{k}}$.*

Tabela 1 – Exemplos para $n = 5$ e suas respectivas representações matriciais.

| | |
|---|---|
| $5$ | $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ |
| $3+1+1$ | $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |
| $1+1+1+1+1$ | $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |
| $\bar{3}+1+1$ | $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |
| $\bar{5}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ |
| $3+\bar{1}+1$ | $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| $\bar{3}+\bar{1}+1$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| $\bar{1}+1+1+1+1$ | $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |

## Agradecimentos

Agradeço aos professores José Plínio de Oliveira Santos e Eduardo Henrique de Mattos Brietzke em ocasião da defesa de minha tese de doutorado, pelos conselhos e paciência. Agradeço também aos avaliadores deste trabalho pelas valiosas sugestões.

## Referências

AL-SAEDI, A. H. Congruences for restricted plane overpartitions modulo 4 and 8. **The Ramanujan Journal**, v. 48, n. 2, p. 251-277, fev. 2019. DOI: `https://doi.org/10.1007/s11139-018-0036-5`.

ALEGRI, M.; BRIETZKE, E. H. M.; SANTOS, J. P. O.; SILVA, R. Bijections between lattice paths and plane partitions. **Open Journal of Discrete Mathematics**, v. 1, n. 3, p. 108-115, out. 2011. DOI: `https://doi.org/10.4236/ojdm.2011.13014`.

ALEGRI, M. **Interpretações para identidades envolvendo sobrepartições e partições planas**. 2010. 93 f. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) – Instituto de Matemática Estatística e Computacional Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2010.

ANDREWS, G. E.; ASKEY, R.; ROY, R. **Special Functions**. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

ANDREWS, G. E.; ERIKSSON, K. **Integer Partitions**. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

ANDREWS, G. E. Partitions identities. **Advances in Matematics**, v. 9, n. 1, p. 10-51, ago. 1972.

ANDREWS, G. E. **The Theory of Partitions**. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, v. 2. Gian-Carlo Rota Editor, Addison-Wesley, Reading, 1976. DOI: https://doi.org/10.1002/zamm.19790590632.

BRIETZKE, E. H. M.; SANTOS, J. P. O.; SILVA, R. Bijective Proofs Using Two-Line Matrix Representations for Partitions. **The Ramanujam Journal**, v. 23, p. 265-295, dez. 2010. DOI: https://doi.org/10.1007/s11139-009-9207-8.

BRIETZKE, E. H. M.; SANTOS, J. P. O.; SILVA, R. Combinatorial Interpretations as Two-Line Array for the Mock Theta Functions. **Bulletin Brazilian Mathematical Society**, v. 44, n. 2, p. 233-253, jun. 2013.

CORTEEL, S.; LOVEJOY, J. Overpartitions. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 356, n. 4, p. 1623-1635, 2004. DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9947-03-03328-2.

EULER, L. De partitione numerorum, Introductio in Analysin Infinitorum, Caput XVI (1753). In: EULER, Leonard. **Opera Omnia**. KRATZER, A.; RUDIO, F. (Eds.). Leipzig: Benedictus Gotthelf Teubner, 1911.

HIRSCHHORN, M. D.; SELLERS, J. A. An infinite family of over partition congruences modulo 12. **Integers**, v. 5, A20, ago. 2005.

HIRSCHHORN, M. D.; SELLERS, J. A. Arithmetic relations for overpartitions. **Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing**, v. 53, p. 65-73, 2005.

KIM, B. The overpartition function modulo 128. **Integers**, v. 8, A38, 2008.

SANTOS, J. P. O.; MONDEK, P.; RIBEIRO, A. C. New Two-Line Arrays Representing Partitions. **Annals of Combinatorics**, v. 15, n. 2, p. 341-354, 2011. DOI: https://doi.org/10.1007/s00026-011-0099-0.

SLATER, L. J. Further Identities of the ROGERS-RAMANUJAN Type. **Proceedings of the London Mathematical Society**, p. 147-167, 1952. DOI: https://doi.org/10.1112/plms/s2-54.2.147.