Equações Diofantinas Lineares: um estudo com estudantes do 1º ano do Ensino Médio

Linear Diophantine Equations: a study with First-year High School Students

Diego Adriano Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão (IFMA), Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Teresina, PI, Brasil
https://orcid.org/0000-0003-4500-1536, diego.silva@ifma.edu.br

Arnaldo Silva Brito
Universidade Estadual do Piauí (UESPI), Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Teresina, PI, Brasil
https://orcid.org/0000-0003-4162-2204, arnaldosilva@ccm.uespi.br

Valdirene Gomes de Sousa
Universidade Estadual do Piauí (UESPI), Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Teresina, PI, Brasil
https://orcid.org/0000-0002-8334-1702, valdirenevall@hotmail.com

Informações do Artigo

Como citar este artigo
SILVA, Diego Adriano; BRITO, Arnaldo Silva; SOUSA, Valdirene Gomes de. Equações Diofantinas Lineares: um estudo com estudantes do 1º ano do Ensino Médio. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 6, n. 2, p. e2009, 25 nov. 2020. DOI: https://doi.org/10.35819/remat2020v6i2id3839.

Histórico do Artigo
Submissão: 18 de janeiro de 2020.
Aceite: 17 de agosto de 2020.

Palavras-chave
Equações Diofantinas Lineares
Teoria dos Números
Ensino de Matemática

Resumo

Neste artigo, apresentamos as Equações Diofantinas Lineares como ferramenta matemática ao alcance dos estudantes do 1º ano do Ensino Médio, dentro de uma análise que compreende os aspectos históricos que embasam a teoria elementar dos números à sua aplicação com um grupo de estudantes do 1º ano do Ensino Médio de um *Campus* do Instituto Federal do Maranhão (IFMA). O presente trabalho está situado no campo da pesquisa empírica com abordagem quanti-qualitativa realizada por meio de sequência didática, intervenção e questionário. As atividades desenvolvidas objetivaram analisar a compreensão manifestada por estudantes do Ensino Médio no que tange a problemas envolvendo duas variáveis e apenas uma equação, com a resolução a partir das Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas. Os resultados indicam que é possível a apropriação dos conceitos propostos no Ensino Médio. Além disso, conclui-se que, apesar das dificuldades, foi possível a compreensão dos conceitos das Equações Diofantinas Lineares pelos estudantes promovendo reflexão e significado dos conteúdos envolvidos.

Keywords
Linear Diophantine Equations
Number Theory
Mathematics Teaching

Abstract

This study presents Linear Diophantine Equations as a mathematics resource available to High School learners, within an analysis that comprehends the historical aspects that underlie the elementary number theory to its application in a group of high school first-year students at a Federal Institute of Maranhão (IFMA) campus. The work present is situated in the field of empirical research with a quanti-qualitative approach conducted through didactic sequence, intervention and questionnaire applied to the student group. The developed activities aimed to analyze the students' comprehension regarding problems that contain two variables and only one equation, with the resolution from the Linear Diophantine Equations with two unknowns. The results indicate that it is possible to appropriate the concepts proposed in High School. In conclusion, despite the difficulties, students could understand the concepts of Linear Diophantine Equations, and the activities promoted reflection and meaning of the contents involved.

1. Introdução

O Ensino Médio, etapa final da Educação Básica, tem como função principal a formação geral do educando, a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental para progressão dos estudos (BRASIL, 1996). Dentre outros aspectos, deve-se desenvolver o espírito científico, estimular conhecimentos sobre o mundo atual suscitando no indivíduo o desejo permanente de intervir e participar da realidade em que vive.

Contudo, a realidade das escolas brasileiras tem evidenciado que o Ensino Médio como etapa final da Educação Básica não tem correspondido às demandas e aspirações da sociedade, tornando-se gargalo na garantia do direito à educação no País (BRASIL, 2017). Conforme o referido documento, os estudantes chegam ao Ensino Médio normalmente com desempenho e aprendizagem insuficiente, decorrente das etapas de escolaridade anteriores, tornando-se imprescindível ampliar e aprofundar as aprendizagens já construídas.

Nesse sentido, a escola pode oportunizar aos jovens o acesso a situações reais de enfrentamento, a partir de um conjunto de competências que possibilite relacionar os diferentes contextos das formas de produção e de trabalho, viabilizando aos estudantes o acesso às bases científicas e tecnológicas do mundo contemporâneo, relacionando teoria e prática por meio da garantia da contextualização dos conhecimentos (BRASIL, 2017). Diante disso, torna-se imprescindível mudar convicções sobre o ensino, além da promoção de competências, como o domínio de conceitos e a capacidade de utilizar fórmulas. Trata-se de um aprendizado ativo com atuação conjunta de escola, professor e sociedade na condução de projetos em processo interdisciplinar, capaz de produzir nova postura didática introduzindo conteúdos mais significativos e contextualizados (BRASIL, 1999).

Nessa perspectiva, a utilização de problemas contextualizados que envolvam o cotidiano dos estudantes se constitui como possibilidade de apropriação conceitual, contribuindo para reduzir as dificuldades comumente apresentadas pelos estudantes na disciplina de Matemática. Dessa forma, é desafiador a superação das dificuldades na aplicação de técnicas de resolução de equações e inequações que devem ser desenvolvidas, não como fim em si mesma, mas como maneira de representar e desenvolver determinados tipos de problemas (BRASIL, 2017).

Diante desses desafios, buscamos, por meio desse estudo, apresentar as Equações Diofantinas como possibilidade na resolução de problemas matemáticos presentes no cotidiano do aluno. A abordagem temática das Equações Diofantinas possibilita conexões entre diversos conceitos matemáticos entre diferentes formas de aplicação proporcionando a contextualização e a interdisciplinaridade, podendo garantir também melhor articulação na resolução de diversos problemas matemáticos presentes no cotidiano dos estudantes.

Além disso, o tema Equações Diofantinas Lineares é fundamental na Educação Básica, pois envolve conceitos e métodos aprendidos nessa etapa do ensino, exigindo interpretação de dados. Por exemplo, existem diversas situações-problema que são acessíveis à compreensão do estudante e cuja soluções são compreendidas e tornam-se mais fáceis com o uso dessa ferramenta na resolução de problemas (OLIVEIRA, 2006). Além disso, o tema tem sua importância realçada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+), e pela atual Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

O uso dessas equações em problemas matemáticos que recaem no cotidiano dos estudantes é dado no exemplo: é possível comprar algo que custa R$ 100,00 com apenas notas de R$ 2,00 e R$ 5,00? Quantas notas você precisa para que tenha esse valor com o menor número possível de cédulas? Exemplos como esse podem ser modelados por meio de uma equação Diofantina Linear com duas incógnitas, sendo x o número de notas de R$ 2,00 e y o número de notas de R$ 5,00. Modelando o problema com base nas condições apontadas teríamos:

$$2x + 5y = 100$$

Quando surgem problemas como esse em sala de aula, a resolução é, geralmente, realizada por professores e estudantes por meio da tentativa e erro, não sendo formulado um procedimento específico para encontrar a solução dessas equações.

Entretanto, observamos que a BNCC (BRASIL, 2017), ao abordar a organização curricular das aprendizagens propostas na área de Matemática e suas tecnologias, apresenta os conteúdos essenciais da Teoria Elementar dos Números, que são necessários para abordagem das Equações Diofantinas Lineares, porém, não faz menção a esse conteúdo, ou seja, a temática das Equações Diofantinas Lineares não consta como conteúdo na matriz curricular do Ensino Fundamental e/ou Ensino Médio.

Destacamos que o estudo das Equações Diofantinas Lineares é frequentemente utilizado em questões de olimpíadas de matemática como, por exemplo, a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Particulares (OBMEP), edição promovida pelo Ministério da Educação e pelo Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações (MCTIC) em parceria com o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e com a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), responsáveis pela Direção Acadêmica.

Além disso, a discussão do tema apresentado é justificada na Educação Básica, haja vista envolver conceitos e métodos que exigem a apresentação de dados e problemas de conhecimentos relativos à resolução de equações, sendo que, equações desse tipo estão presentes nos livros didáticos do Ensino Médio (OLIVEIRA, 2006). Portanto, a resolução de problemas com o uso dessa ferramenta pode favorecer o entendimento e a aplicação contextualizada pelo aluno.

Ressaltamos que este trabalho não se limita à intenção de inserir mais conteúdo aos estudantes, mas, sobretudo, para responder o seguinte problema de pesquisa: Qual a compreensão de aprendizagem manifestada por estudantes da 1º ano do Ensino Médio em relação ao estudo das Equações Diofantinas Lineares na resolução de problemas envolvendo duas variáveis e uma equação?

Diante do exposto, e partindo da hipótese de que os estudantes ingressantes no Ensino Médio podem compreender e resolver problemas que envolvam as Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas, o objetivo do presente artigo é analisar a compreensão manifestada por estudantes da 1º ano do Ensino Médio no que tange a problemas envolvendo duas variáveis e uma equação a partir do estudos de Equações Diofantinas Lineares. A metodologia utilizada está situada no campo da pesquisa empírica e descritiva com abordagem quanti-qualitativa (mista) através da análise de questionário aplicado.

2. Referencial teórico

2.1. Equações Diofantinas Lineares: aspectos históricos

Neste tópico trazemos uma abordagem histórica de dois dos principais matemáticos que contribuíram para o estudo das Equações Diofantinas Lineares: Diofanto de Alexandria e Euclides de Alexandria. Ressaltamos que os fatos históricos envolvendo esses matemáticos em sua maioria foi fundamentado em estudos realizados por Boyer e Pérez (1974), Hefez (2006) e Eves (2011).

Historicamente, a matemática tem caminhado junto com o processo de desenvolvimento da humanidade. Desde as primeiras civilizações conhecidas, estudos revelam a presença dos números em noções de contagem e medida. Na chamada “evolução da matemática” mesmo na Antiguidade, o homem já manifestava conhecimento acerca dos números ou noções de numeração. Um dos poucos registros é um achado de osso de lobo com incisões “em número de cinquenta e cinco”, na Tchecoslováquia, datado de período que precede a escrita e evidenciando a evolução numérica ao longo da história.

No contexto da Teoria do Números, vários matemáticos destacaram-se nesse estudo, entretanto, Diofanto de Alexandria ganha notoriedade por ser o percursor dessa área da matemática, que tem seu nome como homenagem. Existem algumas evidências indicando que Diofanto viveu no século III na "Idade da Prata” (250 - 350 d.C.) atuando na Universidade de Alexandria, cidade de mesmo nome, que foi o centro da atividade matemática, dos dias de Euclides (300 d.C.) aos de Hipatia[1] (em 415 d.C.). Alexandria era um centro cosmopolita, e a matemática que se originou dali não era toda de mesmo tipo, sendo Diofanto de Alexandria considerado o maior algebrista grego, conforme consta em Boyer e Pérez (1974).

[1]Filósofa neoplatônica grega do Egito Romano considerada a primeira mulher matemática que a humanidade tem registro.

Além de ser o precursor da Teoria dos Números, ganhando por alguns o título de “Pai da Álgebra”, tornou-se conhecido por suas obras, sendo a principal o tratado intitulado Arithmética. Segundo Hefez (2006), trata-se do primeiro tratado de álgebra hoje conhecido, pois a abordagem de Diofanto era totalmente algébrica, não sendo revestida de nenhuma linguagem ou interpretação geométrica, como faziam os seus predecessores. A maioria dos problemas estudados por Diofanto, em Aritmética, visava encontrar soluções em números racionais, muitas vezes contentando-se em encontrar apenas uma solução, de equações algébricas com uma ou várias incógnitas.

Embora seja grande a importância de Diofanto de Alexandria para o desenvolvimento da álgebra e a contribuição à teoria dos números, Boyer e Pérez (1974, p. 130), afirmam que “pouco se sabe da vida de Diofante, além de uma tradição referida numa coleção de problemas datando do quinto ou sexto século, chamada “Antologia Grega”. O epigrama que encontramos descrito na obra de Boyer e Pérez (1974, p. 130) está no jazigo de Diofanto sob a forma do famoso enigma matemático:

> Deus lhe concedeu ser menino pela sexta parte de sua vida, e somando uma duodécima parte a isso cobriu-lhe as faces de penugem; Ele lhe acendeu a lâmpada nupcial após uma sétima parte, e cinco anos após seu casamento concedeu-lhe um filho. Ai! infeliz criança tardia; depois de chegar à metade da vida de seu pai, o Destino frio o levou. Depois de se consolar de sua dor durante quatro anos com a ciência dos números ele terminou sua vida.

Montando esse enigma, a equação que representa o problema será:

$$x=\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4$$

Resolvendo essa equação, e sendo esse enigma historicamente exato, encontramos a resposta para a idade de Diofanto, concluindo que ele viveu 84 anos. Entretanto a incerteza da vida de Diofanto é tal que, não se sabe com segurança em que século viveu (BOYER; PÉREZ, 1974).

Assim como Diofanto de Alexandria, pouco se sabe sobre a vida e a personalidade de Euclides. Em decorrência disso, é desconhecida a data de seu nascimento. Segundo Hefez (2006), é provável que sua formação matemática tenha se dado na escola platônica de Atenas sendo, também, professor do Museu em Alexandria. Ainda segundo o autor, aparentemente Euclides não criou muitos resultados, mas teve o mérito de estabelecer um padrão de apresentação e rigor matemático jamais visto anteriormente, o que o fez ser seguido como exemplo por vários milênios.

Segundo Eves (2011), Euclides escreveu cerca de uma dúzia de tratados, cobrindo tópicos desde óptica, astronomia, música, mecânica e secções cônicas; porém, mais da metade do que ele escreveu se perdeu. Entre as obras[2] que sobreviveram até hoje, tem-se a obra “Os Elementos

[2]Os elementos, Os dados, Divisão de figuras, Os fenômenos e Óptica, são exemplos de algumas das obras de Euclides.

de Euclides", seu trabalho mais famoso composto por treze livros, sendo que dez deles tratam de geometria e três de teoria dos números.

Euclides desenvolveu a teoria dos números naturais, nos seus três livros de aritmética (Livros VII, VIII e IX), sempre com uma visão geométrica (para ele, números representam segmentos, e números ao quadrado representam áreas) (HEFEZ, 2006). Os conceitos de divisibilidade, de número primo, de números perfeitos, de máximo divisor comum e de mínimo múltiplo comum, entre outros são definidos no Livro VI. Nesse mesmo livro, segundo Hefez (2006), encontra-se a chamada divisão euclidiana, uma divisão com resto de um número natural por outro, sendo uma das quatro operações utilizadas nas escolas atuais em nível fundamental e uma das formas mais apropriadas para tratar da divisão entre números naturais. O Algarismo de Euclides é conhecido como mais eficiente método para cálculo do Máximo Divisor Comum - MDC.

2.2. Conceitos básicos da Teoria Elementar dos Números

Neste tópico apresentamos alguns conceitos básicos da Teoria Elementar dos Números por meio de definições, proposições e teoremas. Esses conceitos, entre outros, justificam-se por serem indispensáveis para a dedução da fórmula geral que fornece o número total de soluções inteiras de uma Equação Diofantina.

2.2.1. Divisibilidade

Temos que a divisão de um número inteiro por outro pode ser é exata, em que chamamos de relação de divisibilidade. Muitas vezes a divisão não é exata, porém existe mecanismo em que podemos expressar essa possibilidade quando não existir uma relação de divisibilidade, ainda assim é possível efetuar uma divisão com resto, denominada divisão euclidiana.

Definição 2.2.1.1. Sejam a e b dois números inteiros, com $a \neq 0$. Diz-se que a divide b se, e somente se, existe um número inteiro q tal que $b = a.q$.

Usamos a notação $a \mid b$, para indicar que a divide b. Acontecendo isso, dizemos que a é divisor de b, que a é um fator de b ou que b é um múltiplo de a. A negação dessa sentença significa que não existe nenhum número inteiro q tal que $b = a.q$, a qual denotamos $a \nmid b$ (lê se a não divide b).

2.2.2. Máximo Divisor Comum

Nesta seção vamos apresentar a definição do máximo divisor comum de dois números inteiros, e mostrar que é sempre possível encontrar esse número, além disso, vamos enunciar e demonstrar as suas principais propriedades[3].

Definição 2.2.2.1. O número inteiro d é chamado de máximo divisor comum de dois números inteiros a e b (com a ou b diferente de zero), denotado por:

$$d = mdc(a,b),$$

o maior inteiro que divide a e b , se d satisfazer as seguintes condições:

(1) d é um divisor comum de a e b.

(2) d é divisível por todo divisor comum de a e b , isto é, se c é um divisor comum de a e b então $c \mid d$.

Proposição 2.2.2.2. Sejam a e b números inteiros, com $a \neq 0$, temos que $a|b$ se, e somente se,

$$mdc(a,b) = |a|$$

2.3. Equações Diofantinas Lineares

Neste tópico vamos introduzir conceitos sobre as Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas. Enfatizamos que as Equações Diofantinas podem ter mais incógnitas, entretanto como o foco deste trabalho é sua aplicação no Ensino Médio, estudaremos “ [...] uma equação algébrica com uma ou mais incógnitas e coeficientes inteiros, para a qual são buscadas soluções inteiras. Uma equação deste tipo pode não ter solução, ou ter um número finito ou infinito de soluções”. (COURANT; ROBBINS, 2000, p. 59).

No estudo vamos considerar somente problemas envolvendo a busca de soluções inteiras para equação da forma $ax + by = c$, com a , b e c números inteiros, conhecida como Equação Diofantina Linear com duas incógnitas.

Definição 2.3.1. *(Equações Diofantinas)*: Dados $a,b,c \in Z$ chamamos de Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas as equações do tipo $ax + by = c$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Qualquer par de números inteiros que, quando substituído em x e y tornam a equação uma sentença verdadeira, são chamados de soluções para a equação, mas temos que nem sempre essas equações possuem soluções, como por exemplo $2x + 6y = 5$, não existem números inteiros x_0, y_0 , que sejam solução da equação, pois, caso contrário, teríamos $2x_0 + 6y_0$ par, e, portanto, nunca igual a 5. Como indagado anteriormente, podemos nos perguntar quando uma

[3]O Chamado Algoritmo de Euclides se configura como prova construtiva da existências do $mdc(a,b)$ primor do ponto de vista computacional sendo pouco aperfeiçoado em mais de dois milênios (HEFEZ, 2011). A demonstração do Algoritmo de Euclides pode ser observado em Hefez (2011, p. 54).

equação Diofantina tem solução, e caso as tenha, como determiná-las. Para responder às indagações, segue os teoremas e proposições, cuja as demonstrações podem ser encontradas em Hefez (2006).

Teorema: Dados $a,b,c \in Z$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, a equação diofantina $ax+by=c$ admite solução se, e somente se, $mdc(a,b)$ divide c.

Note que é suficiente estudar as equações do tipo $ax+by=c$, com $mdc(a,b)=1$.

Proposição 2.3.2. Seja, x_0, y_0 uma solução particular da equação $ax+by=c$, onde $mdc(a,b)=1$.

Então todas as soluções inteiras x, y da equação são da seguinte forma:

$$x = x_0 - bt\,,\ y = y_0 + at\,,$$

onde $t \in Z$.

O número inteiro t é também chamado de parâmetro, sendo que para cada valor de t, tem-se uma solução distinta para a equação diofantina.

Resolvemos um problema dos selos como exemplo de resolução de uma Equação Diofantina.

Exemplo 2.3.3. É possível comprar selos de R$ 5,00 e R$ 10,00 dispondo de R$ 95,00 sem que haja troco? Se for possível, quantas são as maneiras de se comprar os selos?

Solução: Para resolver o problema, seja x o número de selos de R$ 5,00 e y o número de selos de R$ 10,00 assim temos a equação diofantina $5x+10y=95$. Como o $mdc(5,10)=5$ e $5 \mid 95$ temos que a equação possui solução, dividindo a equação por 5 temos: $x+2y=19$ onde $x_0=1$ e $y_0=0$ é uma solução particular. Todas as soluções são do tipo $x=1+2t$ e $y=9-t$, com $t \in Z$. Logo, para todas as soluções do problema devemos ter $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Então devemos ter $1+2t \geq 0$ e $9-t \geq 0$, o que implica em $t \geq 0{,}5$ e $t \leq 9$ e, portanto $0{,}5 \leq t \leq 9$, o que leva aos valores da Tabela 1.

Tabela 1 — Valores de t, x, y para todas as soluções inteiras não negativas da equação diofantina $5x+10y=95$.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	3	5	7	9	11	13	15	17	19
y	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Fonte: Elaboração dos autores.

Esses são os valores de t, x, y para todas as soluções inteiras não negativas da equação diofantina $5x+10y=95$. Dessa forma, temos 9 maneiras de comprar os selos sem que haja troco.

3. Metodologia

Situamos nosso trabalho no campo da pesquisa empírica e descritiva com abordagem quanti-qualitativa (mista). Conforme Denzin e Lincoln (2006), a pesquisa qualitativa é uma atividade situada que posiciona o observador no mundo, consistindo num conjunto de práticas interpretativas e materiais. Já a pesquisa quantitativa serve para traduzir em números as opiniões e informações para então depois realizar a análise dos resultados e concluir o trabalho. Portanto, de acordo com Strauss e Corbin (2008) as pesquisas quantitativas e qualitativas podem complementar-se, pois essa combinação pode ser feita por razões suplementares, complementares, informativas, de desenvolvimento, entre outras.

Para buscar resposta ao problema desta pesquisa foi elaborado e aplicado um questionário com 15 estudantes da 1º ano do Ensino Médio do Instituto Federal do Maranhão (IFMA). A escolha dos sujeitos da pesquisa deu-se por ação voluntária dos estudantes, contando com a disponibilidade e desejo de participar da realização da oficina de Equações Diofantinas Lineares no contraturno da escola. As atividades desenvolvidas objetivaram analisar a compreensão manifestada por estudantes do Ensino Médio no que tange a problemas envolvendo duas variáveis e apenas uma equação, com a resolução a partir das Equações Diofantinas.

Com o propósito de analisar a compreensão dos estudantes a respeito da temática, utilizamos uma sequência didática conforme Artigue (1996) envolvendo sequência de atividades em quatro fases: 1ª fase, das análises preliminares; a 2ª fase, da concepção e da análise a *priori*; a 3ª fase, da experimentação; e a 4ª e última fase, da análise a *posteriori* e validação.

Inicialmente, foi feito um levantamento sobre o perfil dos estudantes e análises preliminares sobre o tema estudado. Na segunda fase foi aplicado um questionário chamado de Teste a *priori*, com o objetivo de analisar o número de erros e acertos e as estratégias utilizadas pelos estudantes na resolução das situações problemas.

O Teste a *priori* teve 8 (oito) questões com situações-problemas que envolveram as Equações Diofantinas Lineares sendo analisado quantitativamente (números de erros e acertos) e qualitativamente (estratégias utilizadas pelos estudantes na resolução das situações-problemas). Na terceira fase promovemos uma intervenção, realizando com os sujeitos participantes uma oficina de 16 horas.

Após a intervenção, foi aplicado um novo teste, o qual chamamos de Teste a *posteriori* com 8 (oito) questões, no qual os estudantes tinham uma nova ferramenta para resolver os problemas. O Teste a *posteriori* teve como objetivo analisar o conjunto de resultados e assim validar a exploração dos dados recolhidos. Após a resolução do Teste a *posteriori*, foi proposto para os participantes um questionário onde a proposta era emissão de opinião sobre o tema estudado durante a pesquisa.

4. Resultados e discussão

No Teste a *priori*, os estudantes resolveram os problemas do Quadro 1 conforme conhecimentos prévios da vivência escolar.

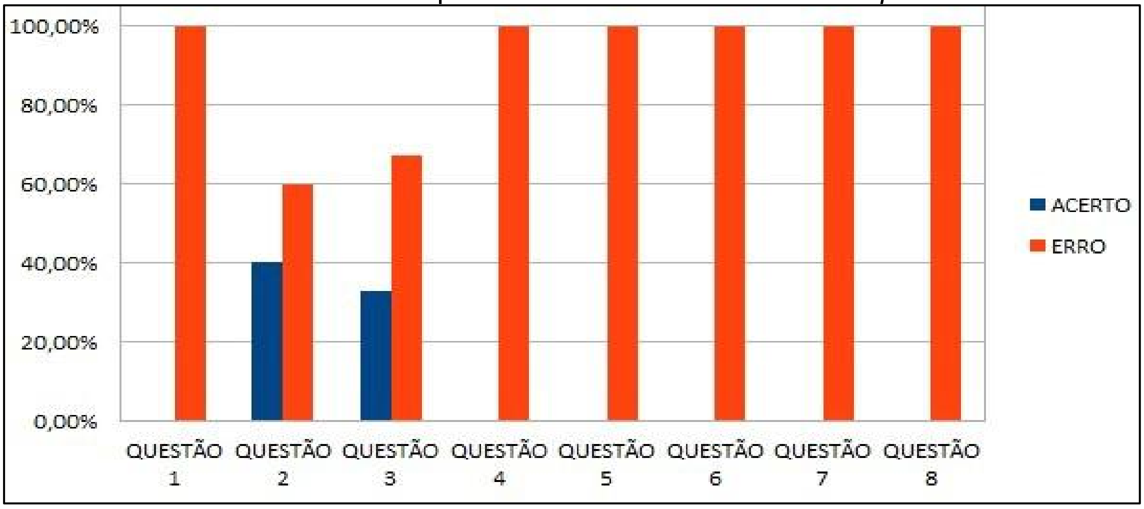
Quadro 1 – Teste a *priori.*

1. Em uma criação de coelhos e galinhas, contaram-se 400 pés. Quantas são as galinhas e quantos são os coelhos, sabendo que a diferença entre esses dois números é a menor possível?
2. Quantas quadras de basquete e quantas quadras de vôlei são necessárias para que 80 estudantes joguem simultaneamente qualquer um dos esportes?
3. O valor da entrada de um cinema é R$ 8,00 e da meia entrada é de R$ 5,00. Qual é o menor número de pessoas que podem assistir a uma sessão de maneira que a bilheteria seja de R$ 500,00?
4. João pediu a Pedro que multiplicasse o dia de seu aniversário por 12 e o mês do aniversário por 31 e somasse os resultados. Pedro obteve 368. Qual é o produto do dia do aniversário de Pedro pelo mês de seu nascimento?
5. Em um fazendeiro deseja comprar filhotes de pato e de galinha, gastando um total de R$ 1.770,00. Um filhote de pato custa R$ 31,00 e um de galinha custa R$ 21,00. Quantos de cada um dos dois tipos o fazendeiro poderá comprar?
6. (OBMEP 2012, NÍVEL 3) Para fazer várias blusas iguais, uma costureira gastou R$ 2,99 para comprar botões de 4 centavos e laços de 7 centavos. Ela usou todos os botões e laços que comprou. Quantas blusas ela fez?
7. Com notas de R$ 2,00 e de R$ 10,00 é possível comprar uma mesa de R$ 101,00? Se possível de quantas maneiras? Caso não seja possível justifique.
8. Uma pessoa resolve comprar refrigerantes para o almoço em família de domingo. Chegando ao mercado, essa pessoa percebe que só havia duas opções de refrigerantes disponíveis: Coca-Cola, cujo preço é R$ 5,00, e Guaraná Antarctica R$ 4,00. a) E essa pessoa deseja gastar R$ 100,00, qual é o número de opções que ela dispõe para fazer a compra dos refrigerantes? b) Qual é o número máximo de refrigerantes que ela pode comprar gastando R$ 100,00? c) E o número mínimo?

Fonte: Material da pesquisa (2018).

O Gráfico 1 mostra o desempenho dos estudantes no referido teste. A análise dos dados evidencia que parte dos estudantes (entre 30% e 40%) acertaram duas situações-problemas envolvendo uma equação e duas incógnitas, representando 25% do total das questões. Sobre o número de estudantes que acertaram as questões, observa-se que, exceto as questões 2 e 3, os estudantes erraram todas as questões restantes. Outro fato observado foi que, dos 8 (oito) problemas propostos, em apenas 2 (dois) os estudantes conseguiram obter êxito em encontrar a solução procurada.

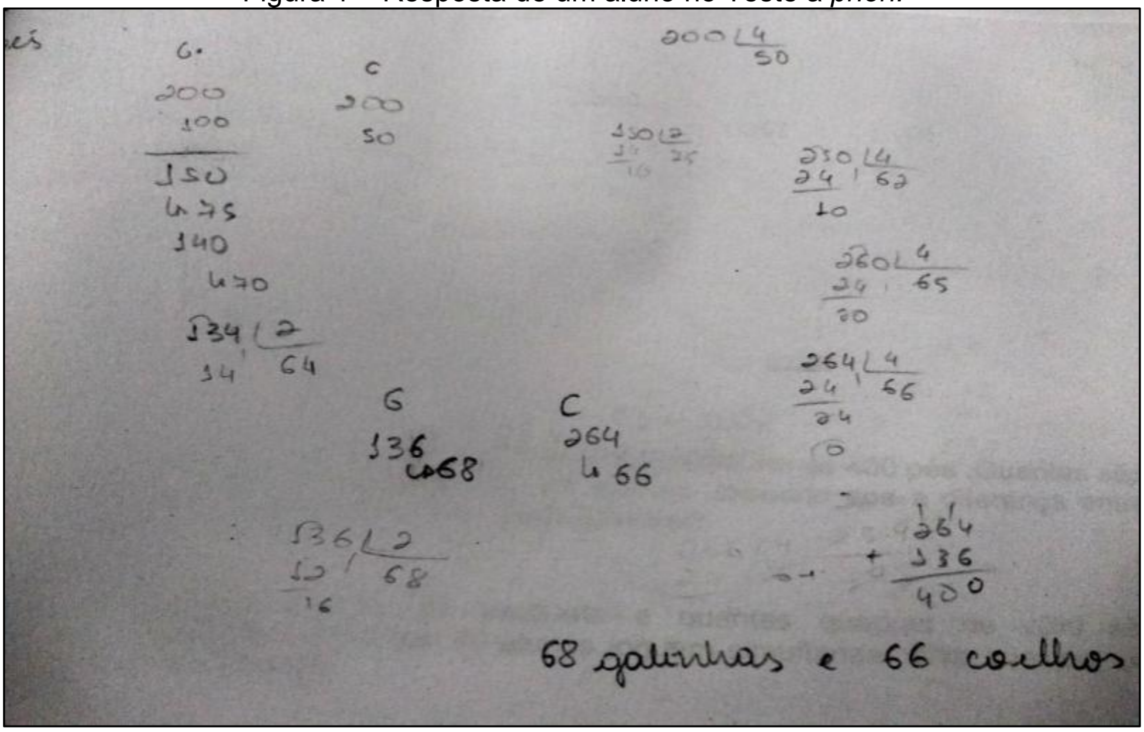
Gráfico 1 – Desempenho dos estudantes no Teste a *priori*.



Fonte: Dados da pesquisa (2018).

Observamos que alguns sujeitos da pesquisa tentaram montar um sistema linear com duas equações e duas incógnitas. Esse aspecto nos chamou a atenção, pois muitos desses estudantes comentaram que estava faltando dados no problema, mostrando que possivelmente poderiam responder o problema se fosse um sistema linear de duas equações e duas incógnitas. Por outro lado, os estudantes que encontraram a solução procurada pelo problema resolveram por tentativa e erro (Figura 1) com divisões sucessivas, que, embora seja um meio de resolução que permite encontrar solução em alguns problemas que envolvem uma equação e duas incógnitas, não permite verificar a inexistência de solução.

Figura 1 – Resposta de um aluno no Teste a *priori*.



Fonte: Dados da pesquisa (2018).

O Teste *a posteriori* (Quadro 2) corresponde à etapa da validação dos dados, que se apoia sobre o conjunto de dados obtidos ao longo da experimentação, após a aplicação da oficina de estudos sobre as Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas. Essa fase caracteriza-se pelo tratamento dos dados colhidos e a confrontação com a análise a *priori*, permitindo a interpretação dos resultados e em que condições as questões norteadoras levantadas foram respondidas (ARTIGUE, 1996).

Quadro 2 – Teste a *Posteriori*

1. De quantas maneiras pode-se comprar selos de R$ 3,00 e de R$ 7,00 de modo que se gaste R$ 150,00?
2. Com notas de R$ 2,00 e de R$ 10,00 é possível comprar uma mesa de R$ 101,00? Se possível de quantas maneiras? Caso não seja possível, justifique.
3. No Campeonato Espanhol, cada vitória vale 3 pontos, cada empate vale 1 ponto e cada derrota vale 0 ponto. Certo time terminou o primeiro turno invicto (nenhuma derrota) e com 51 pontos. De quantas formas é possível que isso ocorra?
4. Um fazendeiro pretende comprar filhotes de codorna e de galinha, gastando um total de R$ 500,00. Um filhote de pato custa R$ 42,00 e um de galinha custa R$ 19,00. Quantos filhotes de aves o fazendeiro poderá comprar?
5. João pediu a Pedro que multiplicasse o dia de seu aniversário por 12 e o mês do aniversário por 31 e somasse os resultados. Pedro obteve 368. Qual é o produto do dia do aniversário de Pedro pelo mês de seu nascimento?
6. Se um trabalhador recebe R$ 420,00 em tíquetes de alimentação, com valores de R$ 30,00 reais ou R$ 50,00 reais cada tíquete, de quantas formas pode ser formado o carnê de tíquetes desse trabalhador?
7. (OBMEP 2012, NÍVEL 3) Para fazer várias blusas iguais, uma costureira gastou R$ 2,99 para comprar botões de 4 centavos e laços de 7 centavos. Ela usou todos os botões e laços que comprou. Quantas blusas ela fez?
8. Uma pessoa resolve comprar refrigerantes para o almoço em família de domingo. Chegando ao mercado, essa pessoa percebe que só havia duas opções de refrigerantes disponíveis: Coca-Cola, cujo preço é R$ 5,00, e Guaraná Antarctica R$ 4,00. a) E essa pessoa deseja gastar R$ 100,00, qual é o número de opções que ela dispõe para fazer a compra dos refrigerantes? b) Qual é o número máximo de refrigerantes que ela pode comprar gastando R$ 100,00? c) E o número mínimo?

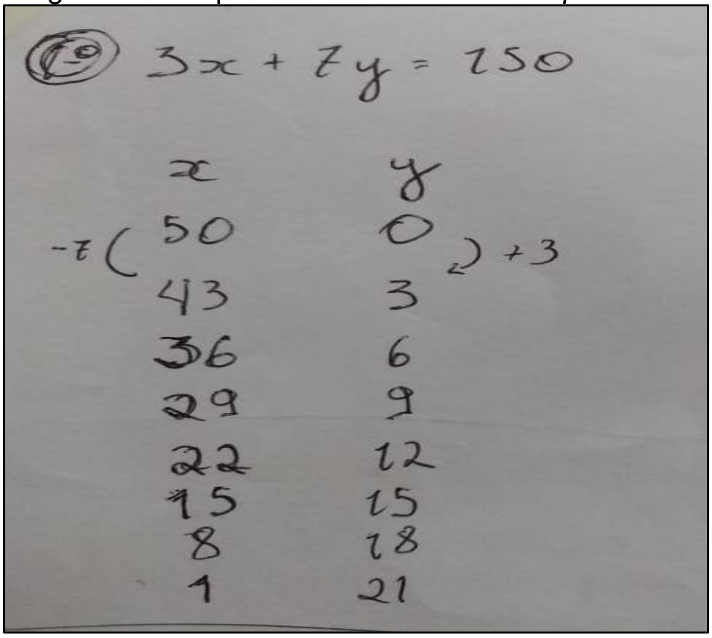
Fonte: Dados da pesquisa (2018).

O teste *a posteriori* foi aplicado após uma oficina, no qual foram apresentados 8 (oito) situações-problemas semelhantes ao teste *a priori*.

Nesse momento do desenvolvimento do trabalho, admitimos a hipótese inicial de que os estudantes poderiam apropriar-se dos conceitos do tema estudado, onde poderiam encontrar uma solução particular e a partir dela encontrar as outras soluções de uma equação diofantina, além de reconhecer quando elas teriam ou não solução.

Conforme podemos ver, um aluno escreveu corretamente a equação diofantina $3x+7y=150$, fato que não ocorreu no teste *a priori* (Figura 2). Além disso, o mesmo identificou uma solução particular $x_0 = 50$ e $y_0 = 0$ e pelos coeficientes da equação diofantina listou as soluções inteiras não negativas, pois no problema devemos ter a quantidade de maneiras que se poderia comprar os selos, onde não admitimos soluções inteiras negativas.

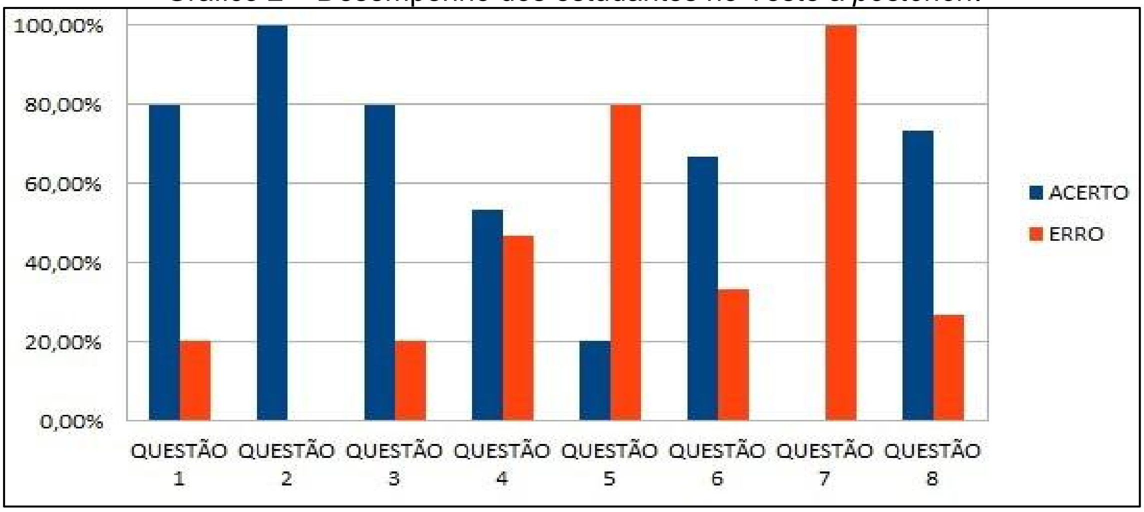
Figura 2 – Resposta do aluno no Teste a *posteriori.*



Fonte: Dados da pesquisa (2018).

A partir da leitura do Gráfico 2, percebemos que houve um avanço nos resultados quantitativos em relação ao Teste a *priori*. Conforme mencionado, o referido conteúdo não faz parte do currículo do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, mas pelo fato de os alunos terem estudado os conceitos básicos de teoria elementar dos números, inferimos que seja necessária uma experiência escolar para estudar diretamente as Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas.

Gráfico 2 – Desempenho dos estudantes no Teste a *posteriori*.



Fonte: Dados da pesquisa (2018).

O Gráfico 2 revela que, das oito situações-problemas apresentadas para os estudantes, apenas uma questão não teve acerto, o que implica 87,5% das questões respondidas corretamente. Comparando esses dados com os resultados do Teste a *priori* no qual apenas 25% das questões respondidas pelos estudantes estavam corretas, observamos que a sequência didática na metodologia descrita em Artigue (1996), promove importante impacto na aprendizagem dos estudantes.

Inferimos que, com a intervenção didática por meio da oficina de estudos e discussões sobre o tema, houve apropriação do assunto, validando a nossa hipótese de que os estudantes do Ensino Médio podem se apossar desses conceitos como técnica facilitadora na resolução de situações-problemas.

Após a realização do Teste a *posteriori*, os estudantes receberam um questionário para relatar suas opiniões sobre o tema trabalhado. Os resultados evidenciam grande envolvimento dos sujeitos da pesquisa nas atividades e bastante empolgação em relação aos rendimentos no Teste a *posteriori*, pois no primeiro Teste não conseguiram resolver quase nenhum problema e, no segundo Teste, perceberam uma melhora quantitativa em relação ao Teste a *priori*. Com isso, os resultados mostram-se satisfatórios sobre a compreensão dos estudantes em relação ao tema "Equações Diofantinas”.

5. Considerações finais

Neste trabalho, nosso objetivo principal foi analisar a compreensão manifestada por estudantes do Ensino Médio na resolução de problemas envolvendo duas variáveis e apenas uma equação, a partir das Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas. Foi realizada análise da resposta dos estudantes em dois questionários (*a priori* e *a posteriori*) do referido assunto. Conforme apresentado na pesquisa, os alunos acertaram duas questões (situações-problemas) no universo de 8 questões solicitadas no primeiro questionário aplicado (Teste *a priori*). Após oficina de estudos, foi aplicado o segundo questionário (*a posteriori*), no qual os estudantes acertaram 7 questões em um total de 8 questões aplicadas, evidenciando que a apropriação dos conceitos iniciais do tema estudado produziu avanços nos resultados em relação ao primeiro Teste.

Partindo da premissa de que os alunos do Ensino Médio poderiam se apropriar dos conceitos de Equações Diofantinas com duas incógnitas, buscamos responder ao seguinte problema de pesquisa: Qual a compreensão de aprendizagem manifestada por alunos da 1º ano do Ensino Médio em relação ao estudo das Equações Diofantinas lineares na resolução de problemas envolvendo duas variáveis e uma equação?

Com a intervenção didática proposta, por meio da oficina, os estudantes estudaram e discutiram diretamente o tema trabalhado, fato inédito na vida escolar desses alunos, pois, o referido conteúdo não faz parte do currículo da Educação Básica do nosso país.

Em resumo, a tentativa de resolução dos problemas no Teste *a priori* revelou o predomínio do uso da tentativa e erro, apresentando erro em torno de 25% das questões propostas. Dos 8 (oito) problemas propostos, em apenas 2 (dois) os estudantes conseguiram obter êxito em encontrar a solução procurada. Percebemos, nesse Teste, que os estudantes não conseguiram compreender que uma Equação Diofantina Linear pode não ter solução, ou ter mais de uma solução. Os sujeitos da pesquisa que conseguiram acertar os problemas propostos não escreveram a Equação Diofantina do problema, muitos estudantes escreveram um sistema linear para tentar resolver o problema, o que nos leva a constatação de que tiveram dificuldade em converter a linguagem do problema para linguagem matemática.

A intervenção didática possibilitou aos estudantes conhecer sobre os teoremas, propriedades da divisibilidade, condição para uma equação diofantina possuir solução, como determinar as soluções de uma equação.

Pelas análises das manifestações apresentadas pelos estudantes no Teste *a posteriori* à intervenção didática referente ao desenvolvimento conceitual de Equações Diofantinas Lineares, temos indícios de compreensão dos estudantes sobre como se comportam as soluções de uma equação diofantina a partir dos coeficientes da equação, apesar do uso da tentativa e erro ainda ser utilizado. Esse fato mostra que os estudantes conseguiram utilizar os conceitos apropriados durante a oficina, o que demonstra indícios de evolução nos resultados em comparação ao Teste *a priori*.

Contudo, identificamos que é preciso uma consolidação maior desse conteúdo para a resolução das Equações Diofantinas, tema não abordado nas escolas, mas, bastante rico em problemas do cotidiano, podendo ser trabalhado mesmo que de forma básica, ajudando os estudantes a manifestar maior interesse em matemática e assim diminuir suas dificuldades.

Portanto, conclui-se que, apesar das dificuldades, foi possível a compreensão dos conceitos das Equações Diofantinas Lineares pelos estudantes promovendo reflexão e significado dos conteúdos envolvidos.

Referências

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. **Didática das Matemáticas**. Trad.: FIGUEIREDO, M. J. Lisboa: Instituto Piaget, 1996, cap. 4, p. 193-217.

BRASIL. Casa Civil. **Lei Nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília, DF, 20 dez. 1996. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm. Acesso em: 23 nov. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Versão em revisão, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br. Acesso em: 11 jul. 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Ensino Médio e Tecnológico. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino médio**. Brasília: 1999. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em: 14 ago. 2019.

BOYER, C. B.; PÉREZ, M. M. **História de la matemática**. [S.I.]: Edgard Blücher, 1974.

COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é Matemática?** Trad.: BRITO, A. da S. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

DENZIN, N. K.; LINCOLN,Y. S. **O planejamento da pesquisa qualitativa**: teorias e abordagens. Trad.: NETZ, S. R. 2. ed. Porto Alegre: ARTMED, 2006.

Eves, H. **Introdução à história da matemática**. Trad.: DOMINGUES, H. H. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

HEFEZ, A. **Elementos de Aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

OBMEP. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**. 2012. Disponivel em: http://www.obmep.org.br/. Acesso em: 25 nov. 2020.

OLIVEIRA, S. B. **As Equações Diofantinas Lineares e o livro didático de Matemática para o Ensino Médio**. 2006. 102 f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

STRAUSS, A.; CORBIN, J. **Pesquisa qualitativa**: técnicas e procedimentos para o desenvolvimento de teoria fundamentada. Trad.: ROCHA, L. de O. da. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2008.