

Tractriz: uma abordagem na perspectiva da Geometria dos Rastros

Tractriz: an approach from the perspective of Trail Geometry

Delair Bavaresco

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS)
Campus Bento Gonçalves, RS, Brasil

<http://orcid.org/0000-0001-8127-799X>, delair.bavaresco@bento.ifrs.edu.br

Leonardo Consorte Veit

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS)
Campus Bento Gonçalves, RS, Brasil

<http://orcid.org/0000-0002-1278-2455>, leonardo.consorteveit@yahoo.com.br

Sandra Denise Stroschein

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS)
Campus Bento Gonçalves, RS, Brasil

<http://orcid.org/0000-0003-3292-2491>, sandra.stroschein@bento.ifrs.edu.br

Informações do Artigo

Como citar este artigo

BAVARESCO, Delair; VEIT, Leonardo Consorte; STROSCHEIN, Sandra Denise. Tractriz: uma abordagem na perspectiva da Geometria dos Rastros. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 6, n. 1, p. 01-16, abr. 2020. DOI: <https://doi.org/10.35819/remat2020v6i1id3712>

Resumo

O presente trabalho apresenta discussões sobre a Tractriz, um caso particular do conjunto de curvas de perseguição. A Tractriz é a curva que decorre do movimento de um bloco sendo puxado por meio de uma corda de comprimento constante. Essa corda, inicialmente posicionada na vertical, quando deslocada sua extremidade oposta ao bloco, na direção horizontal, o caminho descrito pelo bloco será a curva de perseguição Tractriz. A curva descrita pelo caminho desse bloco pode ser observada em diversas situações cotidianas, tais como o simples passeio com um cão, até em rastros de carros, possuindo aplicações tais como a fabricação de trompetes. Com o objetivo de ampliar as discussões sobre as curvas de perseguição, em especial da Tractriz, apresentamos aqui a obtenção da equação característica dessa curva e a verificação de seu comportamento por meio de uma atividade experimental realizada com uma bicicleta. Diante disso discutimos uma possível variação da curva de perseguição descrita pela roda traseira de uma bicicleta, a partir da variação do ângulo de giro do guidom, bem como possíveis aplicações para sistemas de estacionamentos e sua representação em fenômenos naturais.



Histórico do Artigo

Submissão: 17 de outubro de 2019.
Aceite: 26 de dezembro de 2019.

Palavras-chave

Curva de Perseguição
Roda de Bicicleta
Equação Diferencial

Abstract

This academic work presents discussions about the Tractriz, a particular case of the pursuit curves set. The Tractriz is the curve that results from the movement of a block being pulled by a constant length rope. This rope, firstly positioned vertically, when shifts its opposite ends of the block, horizontally, the path described by the block will be the Tractriz pursuit curve. The curve described by this block path can be observed in many daily situations, such as a simple walk with a dog, or even a car track, having applications such as trumpets fabrication. In order to increase the discussions about the pursuit curves, especially Tractriz, we present here the obtaining of the characteristic equation of this curve and its behavior verification through an experimental activity performed with a bicycle. In face of that, we discussed a possible pursuit curve variation described by the rear wheel of a bicycle, based on the variation of handlebar's angle of rotation, as well as possible applications for parking systems and its representation in natural phenomena.

Keywords

Pursuit Curve
Bicycle Wheel
Differential Equation

1 Introdução

Os primeiros indícios da utilização da roda são desconhecidos, mas, acredita-se que teve início às margens do rio Eufrates, na antiga Mesopotâmia, para o deslocamento de blocos e estruturas de grande peso. Inicialmente, objetos de grande peso eram colocados sobre roliços (formas cilíndricas) cortados de troncos de árvores, de modo que, a força aplicada para deslocar esses objetos sobre os roliços era menor do que a força necessária para arrastar o mesmo objeto. Posteriormente foi utilizada a roda como conhecida atualmente, com espessura pequena, formada por raios e um eixo central. Sistema esse bastante usado em carroças de tração animal (TNYT, 2005).

O movimento giratório da roda, e suas propriedades, trouxeram para as civilizações vários artifícios para facilitar suas práticas cotidianas. Um caso especial é o sistema de polias, ferramenta essencial para as construções de moinhos, para irrigação de lavouras, para drenagem de áreas alagada e, até mesmo, para a produção de energia.

A posição de duas rodas, uma a frente e a outra atrás, surgiu há pouco mais de 200 anos, por meio do velocípede, o qual evoluiu para aquilo que atualmente é conhecido como a bicicleta. Até então, as rodas eram utilizadas apenas na forma de eixo lateral, como nas carroças.

O velocípede era uma “invenção estranha” que “transformava um homem em um cavalo e uma carruagem”. O que muito parecia-se estranho ganhou força notória, sendo fabricada em grande escala até a origem dos automóveis. Criações como essa, deram origem aos sistemas de trações mundialmente conhecidos, além de revolucionar o conhecimento da época (TNYT, 2005).

Atualmente estão sendo desenvolvidos novos estudos e discussões sobre o uso da roda, bem como sobre inovações de mecanismos que utilizam esse artifício. Como slogan desse movimento é trazido o lema conhecido por “reinventando a roda”. Pesquisas na área da matemática e da engenharia vêm obtendo resultados importantes sobre a roda e suas utilidades. Segundo AND (2019, online), “O Brasil já tem um automóvel para cada 4,4 habitantes”, e com essa informação observa-se a necessidade de aprimorar e reinventar a roda constantemente, componente essencial no funcionamento dos automóveis.

As características dos rastros descritos pelo movimento de um veículo, praticamente na totalidade dos casos, não possui aplicabilidade óbvia no cotidiano ou visível na natureza. No entanto, Baima (2015) apresenta uma explanação sobre o cálculo de áreas entre os rastros de uma bicicleta, trazendo conhecimento científico de forma simplificada para o público em geral. O princípio utilizado em suas demonstrações usa o conhecimento rudimentar da construção de um equipamento denominado Planímetro. Com a criação e popularização dos computadores eletrônicos, o uso do planímetro se tornou fútil e, dessa forma, os conhecimentos e técnicas matemáticas a esse associado foram sendo deixados de lado em função dos avanços tecnológicos. A matemática envolvida nos rastros ainda é uma tarefa de difícil análise e, conseqüentemente, sua aplicabilidade não é simples.

Com o intuito de dar continuidade a esses estudos, este trabalho apresenta discussões sobre características geométricas das marcas deixadas pelo movimento de duas rodas alocadas uma na frente da outra. Apresentamos um estudo sobre uma curva específica que pode ser produzida por um conjunto de rodas alinhadas, a Tractriz. Apresentamos discussões sobre um modelo que descreve o rastro de uma roda em determinadas circunstâncias por meio da dedução de sua equação característica e possíveis variações para condições específicas.

A motivação desse estudo surge em decorrência de uma proposta interdisciplinar de dois componentes curriculares do curso de Matemática, a saber, Modelagem Matemática e Equações Diferenciais Ordinárias. Juntamente com a obtenção da solução analítica da equação diferencial associada ao movimento de geração da Tractriz, realizou-se a simulação numérica e a avaliação experimental dos resultados teóricos com uso de uma bicicleta infantil.

2 Curvas de Perseguição

Curvas de perseguição podem ser observadas em situações simples como uma brincadeira de pega-pega, ou em condições mais complexas, como um míssil teleguiado querendo abater um

alvo. Imaginemos um míssil teleguiado perseguindo um avião. Qualquer oscilação que o avião faz em sua trajetória, o míssil altera sua direção de forma que sempre esteja apontando para o alvo (avião). A trajetória que o míssil descreve em relações as posições que o avião se localiza representa uma curva de perseguição.

Originalmente, a obtenção da curva que descreve a perseguição pode ter sido proposto por Leonardo da Vinci, e o primeiro a aplicar o cálculo de Newton à solução desse problema foi o cientista francês Pierre Bouguer, em 1732, ao imaginar um navio pirata ultrapassando um navio mercante em alto mar (ARCHIBALD; MANNING, 1921). No entanto, o termo “curva de perseguição” foi definido pela primeira vez pelo britânico George Boole, em 1859. Em seu livro *Treatise on Differential Equations*, ele traz as duas condições para definir a curva de perseguição:

1. O perseguidor move-se apontando sempre diretamente para o perseguido;
2. A velocidade do perseguidor é diretamente proporcional a do perseguido.

Nestas condições, o perseguidor (P_r) atinge o perseguido (P_o) quando a velocidade de $P_r > P_o$, ou quando o perseguido se desloca na direção contrária do perseguidor. Caso a velocidade de $P_r < P_o$, o encontro só se realizará se o perseguido realizar uma trajetória que vá de encontro ao perseguidor. Se os dois estiverem no mesmo sentido e a velocidade de $P_r = P_o$ então nunca haverá encontro.

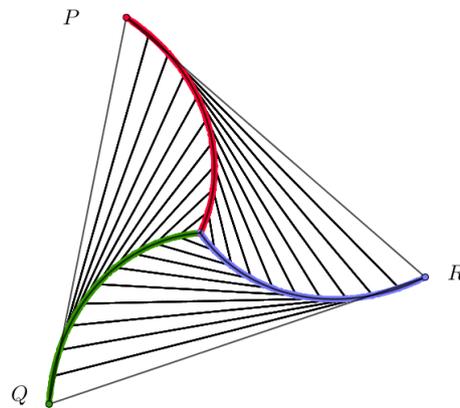
O problema a seguir descreve uma situação que resulta em uma curva de perseguição.

Três mísseis guiados P, Q e R, cujas bases se encontram situadas, respectivamente, nos três vértices de um triângulo equilátero, à distância de 100 km uns dos outros, são lançados simultaneamente. O objetivo de P é atingir Q, Q dirige-se para R e R deve atingir P. Em intervalos regulares, os mísseis corrigem a rota, de acordo com a nova posição de seus alvos. A curva verde representa a trajetória do míssil Q, a azul do míssil R e a vermelha do P. Se os mísseis se deslocam a uma velocidade constante de 50 km/h, a partir do lançamento, quanto tempo leva até que ocorra a explosão? (SOLDATELLI, 2016, p. 233).

A Figura 1 ilustra como as curvas de perseguição desse problema são representadas.

Um outro caso de uma curva de perseguição é obtida quando dois corpos se deslocam com velocidades P_r e P_o iguais, sendo que, o perseguido, desloca-se sempre em linha reta e o perseguidor inicia seu movimento na direção perpendicular à linha que o perseguido se desloca. Supondo que o perseguido sempre se desloque para frente, sem voltar no caminho já percorrido, o deslocamento do perseguidor segue uma curva denominada Tractriz.

Figura 1 – Representação das trajetórias dos projéteis.



Fonte: Soldatelli (2016, p. 233).

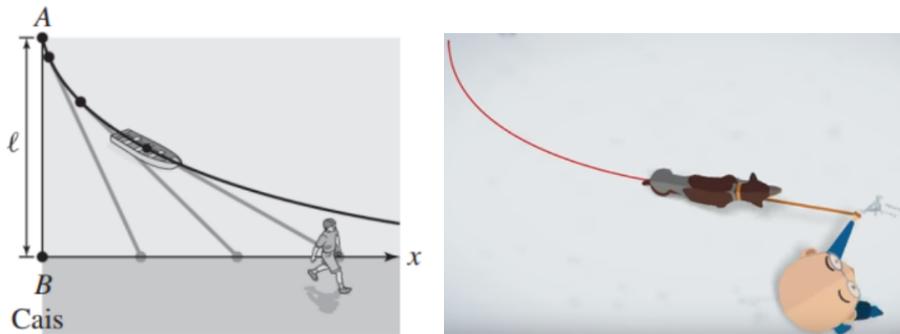
3 Tractriz

A curva Tractriz, além de descrever o caminho percorrido pelo perseguidor nas condições apresentadas anteriormente, pode ser visualizada em situações como a interpretação da marca deixada pelo arrasto em um plano horizontal de um objeto ligado por uma corda:

A Tractriz é a curva do plano xy que tem a propriedade que o segmento de reta tangente delimitado pelo ponto de tangência e o eixo y tem comprimento constante. Esta curva admite a seguinte descrição mecânica: admita que uma partícula A com certa massa é arrastada a partir de sua posição inicial sobre o eixo x ao longo de um plano horizontal áspero por meio de uma corda AB de comprimento $\varepsilon > 0$ mantida tensionada, de forma que a extremidade B esteja sobre o eixo y . Esta curva foi estudada primeiramente por James Bernoulli em 1691, tem aplicações mecânicas na construção de eixos e acústicas na construção de alto-falantes. (EIDAM, 2012, p. 11).

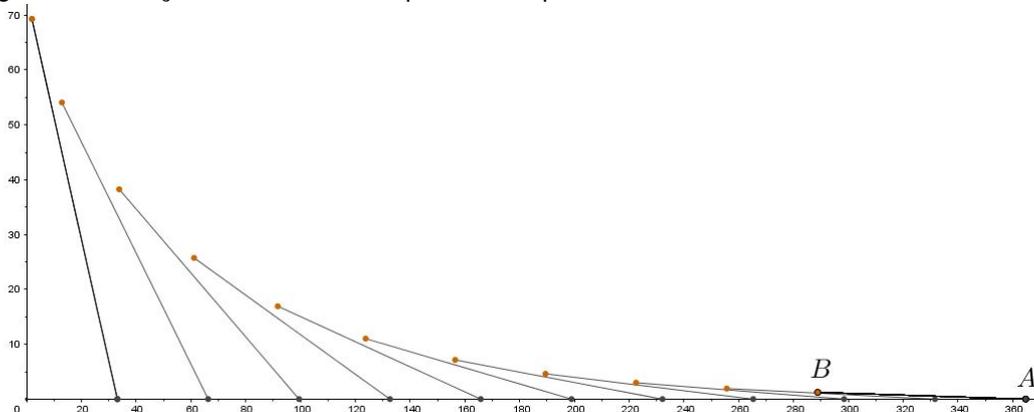
Apresentamos dois casos nos quais a curva Tractriz pode ser identificada, conforme ilustra a Figura 2. No primeiro caso temos um pequeno barco verticalmente posicionado em relação à margem do cais de um porto. Um operário puxa o barco por meio de uma corda de comprimento fixo ao longo da margem do cais. O movimento do barco segue uma Tractriz. No segundo caso temos uma ilustração representativa do deslocamento de um cão em um passeio guiado por seu cuidador, no qual, em uma situação similar a anterior, o caminho percorrido pelo cão segue uma Tractriz.

Figura 2 – Representações da curva Tractriz.



Fonte: Rogawski e Adams (2018, p. 486).

Para obtenção da função que descreve a Tractriz, inicialmente foi utilizado o software GeoGebra¹, no qual foi criada uma construção dinâmica que permitiu simular o movimento de um corpo B , arrastado por um corpo A e, com distância fixa, conforme definição da Tractriz. Com isso, vários pontos relativos a diferentes posições ocupadas por esses corpos são mostrados por meio dessa construção na representação da Figura 3.

Figura 3 – Posições relativas de B quando A é posto em movimento sobre o eixo horizontal.

Fonte: Elaboração dos autores (2019).

Nas condições da Figura 3:

1. Se o ponto A se movimentar na horizontal, suas coordenadas serão do tipo $(x_A, 0)$;

¹É um software de geometria dinâmica criado na Áustria, que combina tabelas, gráficos, geometria e cálculo. O software é programado em Java e tem sua distribuição gratuita para dispositivos móveis e desktops.

2. O ponto máximo da função se dá quando o ponto A está na posição $(0, 0)$ e o ponto B na posição $(0, \varepsilon)$, na qual ε é o tamanho do segmento \overline{AB} e, conseqüentemente, o tamanho da corda tensionada;
3. A curva gerada pelo conjunto de posições ocupadas pelo corpo B , no plano cartesiano, pode ser uma função (f) escrita como $y = f(x)$.

Consideremos uma reta que passa pelos pontos $A = (x_A, 0)$ e $B = (x_B, y_B)$. A equação dessa reta pode ser determinada pela equação geral da reta, ou seja:

$$y_B - y_A = m \cdot (x_B - x_A).$$

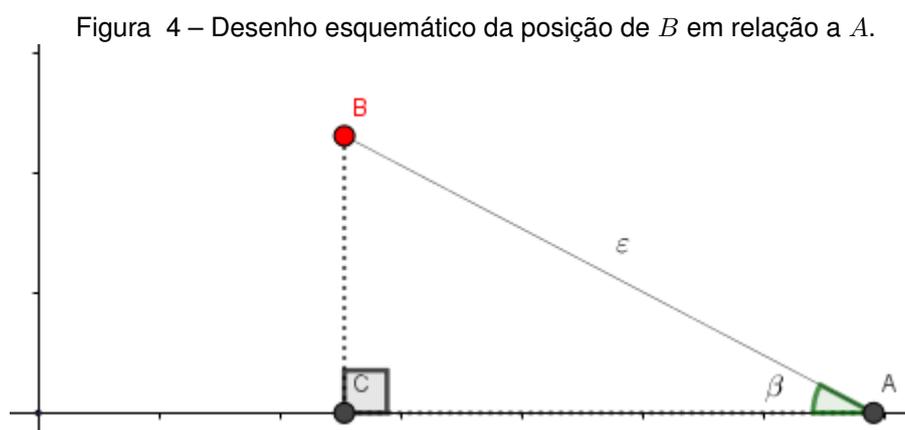
Como $y_A = 0$ em todas hipóteses, pode-se considerar que $y_B = y$, resultando em:

$$y = m(x_B - x_A). \quad (1)$$

O coeficiente m pode ser descrito da forma $m = f'(x)$, logo:

$$y = f'(x)(x_B - x_A). \quad (2)$$

Em seguida, consideremos um ponto C sobre o eixo x , tal que o triângulo ABC seja reto em C , para cada posição que os pontos B e A se localizam, como ilustra a Figura 4.



Fonte: Elaboração dos autores (2019).

Desse modo, podemos estabelecer as relações para as coordenadas x_A e x_B da seguinte forma:

1. A medida do lado $\overline{BC} = y_B - y_C$ e, como $y_C = 0$, $\overline{BC} = y_B$;
2. A medida do lado $\overline{AB} = \varepsilon$;
3. A medida do lado $\overline{AC} = (x_A - x_C)$ e, como $x_C = x_B$, podemos reescrever \overline{AC} como $\overline{AC} = (x_A - x_C) = |(x_B - x_A)|$.

No triângulo retângulo ABC , utilizando o teorema de Pitágoras para estabelecer a medida do lado \overline{AB} em função dos catetos, obtemos:

$$\begin{aligned}(x_B - x_A)^2 + y^2 &= \varepsilon^2, \\ (x_B - x_A)^2 &= \varepsilon^2 - y^2, \\ (x_B - x_A) &= \pm \sqrt{\varepsilon^2 - y^2}.\end{aligned}\tag{3}$$

Substituindo (3) em (2) obtemos:

$$y = f'(x) \cdot \sqrt{\varepsilon^2 - y^2}.\tag{4}$$

Na região considerada, $f'(x) < 0$, uma vez que a função que descreve a reta da Tractriz, com $x > 0$, é uma função decrescente. Caso $f'(x)$ fosse maior que zero, teríamos a função Tractriz crescente. Considerando que a função Tractriz está definida para $x \geq 0$, admitirá a seguinte condição:

$$\begin{cases} y = -f'(x) \cdot \sqrt{\varepsilon^2 - y^2} \\ y(0) = \varepsilon \end{cases}\tag{5}$$

que é a forma característica de uma equação diferencial sujeita a uma condição inicial, cuja solução é a função que descreve a Tractriz. Dessa forma:

$$\begin{aligned}y &= -f'(x) \cdot \sqrt{\varepsilon^2 - y^2}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{\sqrt{\varepsilon^2 - y^2}}.\end{aligned}\tag{6}$$

Pelo método de solução das variáveis separáveis obtemos:

$$-\frac{\sqrt{\varepsilon^2 - y^2}}{y} dy = dx,\tag{7}$$

$$\int -\frac{\sqrt{\varepsilon^2 - y^2}}{y} dy = x + C. \quad (8)$$

A solução da integral representada em (8) pode ser obtida a partir da parametrização de y em função do ângulo β que a corda faz com o sentido do deslocamento, conforme mostrado na Figura 4, ou seja:

$$y = \varepsilon \cdot \sin(\beta) \quad (9)$$

e

$$dy = \varepsilon \cdot \cos(\beta)d(\beta). \quad (10)$$

Substituindo (9) em (8):

$$\int -\frac{\sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon^2 \cdot \sin^2 \beta}}{\varepsilon \cdot \sin \beta} dy = x + C,$$

$$\int -\frac{\cos \beta}{\sin \beta} dy = x + C. \quad (11)$$

Substituindo (10) em (11) chegamos a:

$$\int -\frac{\cos \beta}{\sin \beta} \varepsilon \cdot \cos \beta d\beta = x + C,$$

e, conseqüentemente,

$$x = -\varepsilon \cdot (-\ln |\csc(\beta) + \cot(\beta)| + \cos(\beta)) + C. \quad (12)$$

Considerando que no início do movimento, $\beta = \frac{\pi}{2}$ e $x = 0$, logo:

$$x = \varepsilon \cdot (\ln |\csc(\pi/2) + \cot(\pi/2)| - \cos(\pi/2)) + C \quad (13)$$

na qual $C = 0$. Dessa forma, a solução de (5) é descrita pelo conjunto de equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = \varepsilon \cdot (\ln |\csc(\beta) + \cot(\beta)| - \cos(\beta)) \\ y = \varepsilon \cdot \sin(\beta) \end{cases} \quad (14)$$

Como admitimos que a função f da Tractriz pode ser escrita como $y = f(x)$, essa função pode ser obtida com o auxílio da Figura 4. Como as medidas dos catetos da Figura 4 só dependem de coordenadas y e da constante ε , podemos reparametrizar em coordenadas (x, y) utilizando a equação (14) para:

$$x = +\varepsilon \cdot \ln \left(\frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - y^2}}{y} \right) - \sqrt{\varepsilon^2 - y^2} \quad (15)$$

4 Avaliação Experimental

Com a finalidade de verificar experimentalmente o seguimento de uma trajetória Tractriz, foi idealizado um episódio com base na teoria dos rastros, utilizando-se de uma bicicleta infantil. Em uma bicicleta, a distância das rodas é constante e a trajetória que a roda traseira descreve é uma curva de perseguição com relação a roda dianteira. A forma como as bicicletas são construídas permitem que o guidom gire em um ângulo maior de noventa graus. Com isso, se posicionarmos o guidom de forma que a roda dianteira fique perpendicular a roda traseira e movermos a bicicleta na direção da roda dianteira, a roda traseira seguirá uma curva de perseguição Tractriz em relação à roda dianteira.

A confecção do aparato experimental iniciou com a utilização de uma folha de papel pardo de cinco metros, com marcação de um sistema cartesiano ortogonal para valores positivos na horizontal e na vertical. Para a marcação da curva de perseguição Tractriz da referida bicicleta, o pneu traseiro foi pintado com tinta esmalte branca. Como a bicicleta possuía pneu liso, o rastro deixado pela roda resultou em uma curva bem definida permitindo mensuração significativamente precisa de diversos de seus pontos com relação ao sistema cartesiano demarcado. A Figura 5 apresenta imagens do posicionamento inicial da bicicleta sobre o sistema cartesiano e o rastro da roda traseira após o deslocamento da roda dianteira na direção horizontal.

Figura 5 – Posição inicial da bicicleta e rastro deixado da roda traseira.



Fonte: Material da pesquisa (2019).

O experimento foi iniciado posicionando-se a bicicleta conforme a Figura 5, satisfazendo as condições propostas por uma Tractriz, movendo-se a roda dianteira sobre a linha horizontal, marcando o rastro deixado pela roda traseira. As medições da curva em cada posição que a roda esteve durante a trajetória foram realizadas com auxílio de um esquadro, uma trena e um paquímetro digital. Foram coletados 38 valores experimentais. Para isso, no eixo horizontal, foram feitas marcações a cada cinco centímetros até o primeiro metro. A partir do primeiro metro as marcações foram feitas a cada vinte centímetros, em função da menor taxa de variação, após o início da curva. Para cada marcação na linha correspondente ao eixo x foi medida a distância até a curva descrita pelo rastro, obtendo-se com isso, os valores mostrados na Tabela 1.

O processo de avaliação experimental da curva Tractriz inicia considerando-se que a bicicleta descreve uma curva de perseguição na qual o perseguido é a roda da frente e o perseguidor a roda de trás. Para o caso do experimento realizado, a distância fixa entre as rodas da bicicleta é dada por $\varepsilon = 76$. Desse modo a equação diferencial que caracteriza o modelo da Tractriz, dada pela equação (6), fica:

$$y' = \frac{y}{\sqrt{76^2 - y^2}}, \quad (16)$$

cuja solução é dada por:

$$x = 76 \cdot \ln \left(\frac{76 + \sqrt{76^2 - y^2}}{y} \right) - \sqrt{76^2 - y^2}. \quad (17)$$

Diante da determinação do parâmetro ε foi possível realizar uma comparação entre os dados teóricos e experimentais. Os valores teóricos e experimentais referentes a cada marcação do eixo x são apresentados na Tabela 1.

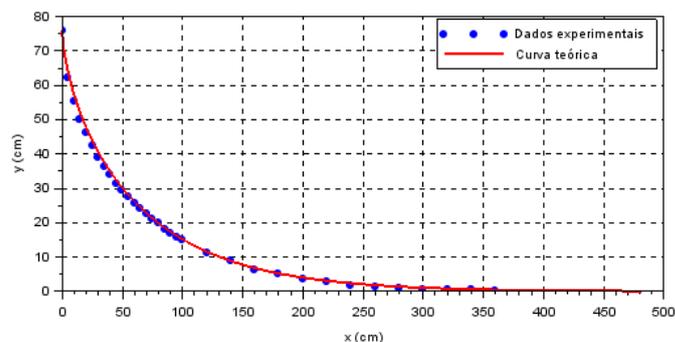
Tabela 1 – Dados experimentais (distâncias De e Dt em cm).

Distância	Experimental (De)	Teórico (Dt)	Distância	Experimental (De)	Teórico (Dt)
0	76	76	85	18,2	18,54993
5	62	63,77399	90	17	17,33562
10	55,5	57,2023	95	15,9	16,20487
15	50	52,03885	100	15	15,15116
20	46,2	47,69447	120	11,3	11,59729
25	42,5	43,92013	140	8,8	8,89246
30	39	40,578254	160	6,3	6,8253
35	36,4	37,58212	180	5	5,24172
40	34	34,87231	200	3,7	4,02693
45	31,5	32,40551	220	2,7	3,09429
50	29,5	30,1488	240	1,8	2,37793
55	27,5	28,07629	260	1,1	1,82754
60	25,8	26,16704	280	0,765	1,4046
65	24	24,40379	300	0,626	1,07957
70	22,5	22,7020	320	0,559	0,82976
75	21	21,25935	340	0,355	0,63776
80	19,8	19,8551	360	0,147	0,4902

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

A comparação dos dados mostrados na Tabela 1 pode ser melhor visualizada na Figura 6.

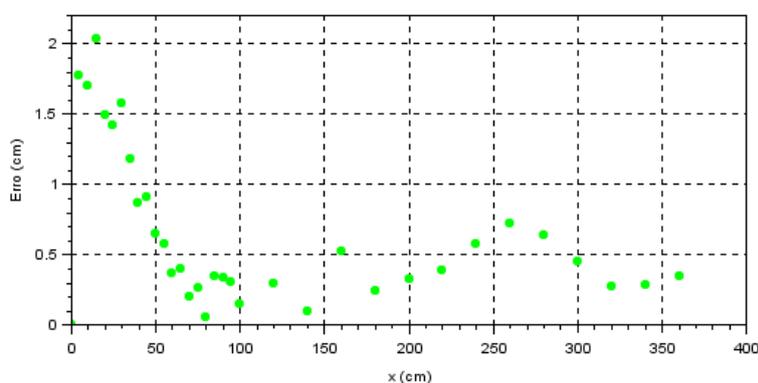
Figura 6 – Curva tratrix ideal com pontos experimentais.



Fonte: Elaboração dos autores (2019).

Uma primeira análise visual do comportamento dos pontos experimentais obtidos, em comparação com a curva Tractriz ideal, parece se aproximar quase que perfeitamente. No entanto, um olhar mais aproximado evidencia uma diferença significativa, principalmente nos primeiros 50 centímetros de deslocamento. Observamos ainda, que nesse trecho, os pontos experimentais estão todos abaixo da Tractriz ideal. Diante dessa observação, foi elaborado um gráfico dos pontos de erro ($Dt - De$) entre a distância teórica de cada ponto ao eixo x e a distância ideal dada pelo modelo da Tractriz, conforme mostra a Figura 7.

Figura 7 – Gráfico de erros ($Dt - De$).



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Analisando o comportamento dos pontos correspondentes ao erro entre dados experimentais e teóricos, observamos uma oscilação entre os valores de $x = 200$ e $x = 350$ característica de um erro de seguimento de trajetória realizado pela roda dianteira. Ou seja, durante a condução da bicicleta, provavelmente a roda dianteira não tenha seguido sua trajetória linear com precisão. No entanto, o erro no início do deslocamento nos leva a conjecturar que existisse algum outro fator interferindo nesses resultados.

Os pontos correspondentes aos erros em cada posição apresenta uma tendência decrescente, tendendo a zero, se desconsiderarmos a oscilação descrita acima, com valores máximos no início do deslocamento. Desse modo, considerando que o valor do ângulo β é máximo no início e tende a zero, parece haver uma relação de dependência entre a variação do referido ângulo e a magnitude dos erros. Considerando que, para termos a curva Tractriz, o meio de tração, seja ela uma corda, ou algum material rígido, a distância entre os dois corpos que se movimentam deve ser constante em toda sua extensão. Procurando identificar possíveis fatores para que o rastro não satisfaça as condições estabelecidas para a determinação de uma Tractriz, observamos que o giro

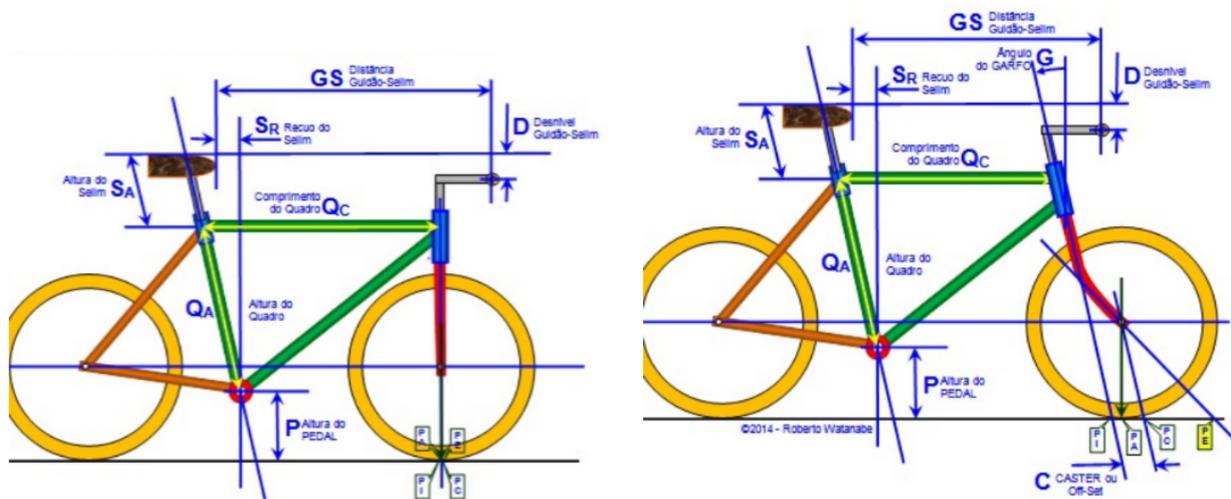
do guidom altera a distância entre as rodas. Ou seja, a bicicleta utilizada não apresenta distância constante entre as rodas.

A bicicleta utilizada possui a sua distância ε variável, pelas seguintes condições:

- Se o eixo que sustenta o garfo da bicicleta estiver posicionado perpendicularmente ao plano ao qual a bicicleta se apoia, a distância entre os pontos que tangenciam o solo é constante;
- Se o eixo que sustenta o garfo da bicicleta for diferente do que o caso anterior, a distância entre os pontos que tangem o solo se modifica conforme varia o ângulo de giro do guidom. Nessa condição, quando a roda dianteira estiver perpendicular a roda traseira, teremos a distância mínima. Quando a roda dianteira estiver paralela a roda traseira, a distância entre os eixos é máxima.

A Figura 8, a seguir, ilustra essas condições.

Figura 8 – Condições na qual uma bicicleta pode se apresentar.



Fonte: Watanabe (2014, online).

A bicicleta utilizada é do tipo descrito na segunda condição. A distância entre as rodas se modifica conforme o ângulo formado pelo quadro da bicicleta e o guidom varia. Ou seja, o valor ε varia conforme β varia. Havendo uma relação de dependência entre essas grandezas, pode ser obtida uma função do tipo $\varepsilon(\beta)$, a qual, poderá aperfeiçoar o modelo que descreve o rastro da roda traseira desse tipo de bicicleta, como uma função do ângulo de giro do guidom.

5 Conclusão

Com base nas discussões aqui apresentadas nesse texto, entendemos que o lema “redescobrimo a roda” ainda se faz presente nos estudos matemáticos. Fenômenos que descrevem curvas de perseguição, em especial a curva Tractriz, são campos férteis de indagações e estudos aprofundados.

A obtenção da equação característica do modelo da curva Tractriz evidencia a importância do uso das equações diferenciais ordinárias para representar fenômenos dinâmicos. Por meio da observação experimental realizada, foi possível identificar comportamentos até então não descritos nesse modelo de curva de perseguição. No entanto, a modelagem matemática precisa das características de fenômenos reais e que não é de fácil obtenção. A representação analítica das características dinâmicas, tais como o movimento de uma bicicleta, permite determinação de parâmetros precisos e abrem caminho para aprimoramentos e inovações.

O estudo analítico, quando associado a recursos tecnológicos contemporâneos, tais como o uso do software GeoGebra dão novas perspectivas para esse tipo de estudo pois permite simulação numérica e variação dinâmica de parâmetros.

Como continuação dos estudos relativos a curva Tractriz, pretende-se discutir a variação da distância entre o ponto de tangência das rodas com o solo, em função do ângulo de giro do guidom.

Referências

AND. Associação Nacional dos DETRANS. **Brasil já tem 1 carro a cada 4 habitantes, diz Denatran**. 10 mar. 2019. Disponível em:

<http://www.and.org.br/brasil-ja-tem-1-carro-a-cada-4-habitantes-diz-denatran/>.

Acesso em: 26 jun. 2019.

ARCHIBALD, R. C.; MANNING H. P. Remarks and historical notes [on the pursuit problem]. **The American Mathematical Monthly**, v. 28, p. 91-93, 1921.

BAIMA, C. Rogério Martins, matemático: ‘Tenho uma bicicleta que calcula áreas’. **O Globo**, Rio de Janeiro, 8 ago. 2015. Disponível em:

<https://oglobo.globo.com/sociedade/conte-algo-que-nao-sei/>

rogerio-martins-matematico-tenho-uma-bicicleta-que-calcula-areas-17124188. Acesso em: 24 jun. 2019.

EIDAM, J. C. C. **Exercícios de Equações Diferenciais e Aplicações - CM121**. DMAT/UFPR, 2º semestre de 2012. Disponível em:

https://docs.ufpr.br/~eidam/2012/2/CM121/CM121_Listas.pdf. Acesso em: 24 jun. 2019.

ROGAWSKI, J.; ADAMS, C. **Cálculo**. v. 2, 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2018.

SOLDATELLI, A. A Matemática do pega-pega. **Scientia cum Industria**, Caxias do Sul, v. 4, n. 4, p. 232-236, 2016.

TNYT. The New York Times. **Bicycle**. 30 jan. 2005. Disponível em:
<https://www.nytimes.com/2005/01/30/books/chapters/bicycle.html>. Acesso em: 24 jun. 2019.

WATANABE, R. **As partes de uma bicicleta**. 2014. Disponível em:
<http://www.ebanataw.com.br/trafegando/partes.htm>. Acesso em: 26 nov. 2019.