Progressões Aritméticas de Ordem Superior e Recorrências Lineares

Higher Order Arithmetic Progressions and Linear Recurrences

Rafael Jorge Pontes Diógenes
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB), Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Redenção, CE, Brasil
https://orcid.org/0000-0002-1362-5179, rafaeldiogenes@unilab.edu.br

Erika Joyce Silva Lima
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB), Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Redenção, CE, Brasil
https://orcid.org/0000-0001-8755-2198, erikajoyce.8@gmail.com

Informações do Artigo

Como citar este artigo

DIÓGENES, Rafael Jorge Pontes; LIMA, Erika Joyce Silva. Progressões Aritméticas de Ordem Superior e Recorrências Lineares. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 6, n. 1, p. 1-12, 3 jun. 2020. DOI: https://doi.org/10.35819/remat2020v6i1id3700

Histórico do Artigo

Submissão: 10 de Outubro de 2019.
Aceite: 27 de Abril de 2020.

Palavras-chave
Progressões Aritméticas
PA de Ordem Superior
Recorrências Lineares
Polinômios

Resumo

Neste artigo apresentamos algumas relações entre progressões aritméticas de ordem superior e recorrências lineares com coeficientes constantes. De maneira particular, apresentamos uma nova prova usando as recorrências lineares de um resultado clássico que relaciona as progressões aritméticas de ordem superior com os polinômios. Tal prova afirma que o termo geral de uma sequência é um polinômio de grau k se, e somente se, essa sequência é uma progressão aritmética de ordem k.

Keywords
Arithmetic Progression
PA of Higher Order
Linear Recurrences
Polynomials

Abstract
In this article we present some relationships between higher order arithmetic progressions and linear recurrences with constant coefficients. In particular, we present a new proof using the linear recurrences of a classic result that relates the arithmetic progressions of a higher order to the polynomials. According to this proof, the general term of a sequence is a polynomial of degree k if, and only if, that sequence is an arithmetic progression of order k.

1 Introdução

Neste trabalho procuramos relacionar dois tipos especiais de sequências: as recorrências lineares de ordem superior (seção 2) e as progressões aritméticas de ordem superior (seção 3). Tais sequências aparecem, com bastante frequência, em problemas das Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) (PINHEIRO; LAZZARIN, 2015), Ciências da Computação (JESUS; SILVA, 2006), etc. Com o advento do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), na sua disciplina de Matemática Discreta, muitos trabalhos sobre estes assuntos surgiram, mostrando suas várias aplicações e relações.

Nosso objetivo principal é mostrar um resultado clássico que relaciona uma Progressão Aritmética (PA) de ordem k com um polinômio de grau k usando recorrência linear de ordem k. Mais especificamente, uma sequência (a_n) é uma PA de ordem k se, e somente se, o termo geral a_n é um polinômio de ordem k em n. Em geral, a abordagem usada para mostrar esse resultado usa somas polinomiais (para maiores detalhes veja por exemplo Carvalho e Morgado (2015)). Ressaltamos que não conseguimos encontrar na literatura algum trabalho que tenha a demonstração aqui exposta.

Este artigo está organizado da seguinte maneira: na seção 2 abordaremos alguns aspectos das recorrências lineares, de maneira particular com coeficientes constantes; na seção 3 abordaremos as progressões aritméticas, principalmente as de ordem superior e, ao seu final, mostraremos o resultado supracitado.

2 Recorrências Lineares

Vamos nesta seção apresentar alguns resultados de recorrências lineares que consideramos importantes para nosso objetivo principal.

Definição 2.1. *Uma sequência numérica é uma função real com domínio $\mathbb{N}$ que, a cada n associa um número real a_n. Denotaremos (a_n) para descrever a sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$. Os números $a_1, a_2, a_3, \ldots$ são chamados termos da sequência. O termo genérico a_n é chamado termo geral da sequência.*

Exemplo 2.2. *São exemplos de sequências:*

1. $(a_n) = (1, 3, 5, 7, 9, \ldots) = (2n - 1)$;

2. $(a_n) = (2, 4, 8, 16, \ldots) = (2^n)$;

3. $(a_n) = (1, 2, 6, 24, 120, \ldots) = (n!)$.

Definida o que é uma sequência, vamos relembrar a definição de recorrências lineares.

Definição 2.3. *Uma recorrência linear de primeira ordem é do tipo*

$$x_{n+1} = f(n)x_n + g(n)$$

onde $f(n)$ e $g(n)$ são funções que dependem apenas de n. Quando $g(n) = 0$, dizemos que a recorrência é homogênea.

Note que as progressões aritméticas $x_{n+1} = x_n + r$ são exemplos de recorrências lineares de primeira ordem com $f(n) = 1$ e $g(n) = r$. Outros exemplos são as progressões geométricas $x_{n+1} = ax_n$, bastando tomar $f(n) = a \neq 0$ e $g(n) = 0$.

Definição 2.4. *Uma recorrência linear de segunda ordem é uma recorrência do tipo*

$$x_{n+2} = f(n)x_{n+1} + g(n)x_n + h(n)$$

com $f(n)$, $g(n) \neq 0$, e $h(n)$ funções cujos domínios são o conjunto dos números naturais. Quando $h(n) = 0$, dizemos que a recorrência é homogênea.

Quando as funções f e g são constantes na Definição 2.4 temos, então, uma recorrência linear de segunda ordem com coeficientes constantes

$$x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n + h(n) \tag{1}$$

e uma equação característica associada a esta recorrência dada por

$$r^2 = pr + q \tag{2}$$

Exemplo 2.5. *A equação de Fibonacci, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ com $F_0 = F_1 = 1$, forma uma recorrência linear homogênea (F_n) de ordem 2 com equação característica $r^2 = r + 1$.*

Dizemos que uma equação de recorrência foi resolvida quando determinamos uma fórmula fechada para a recorrência. Por exemplo, vamos resolver a recorrência linear de primeira ordem

$x_{n+1} = nx_n$ com $x_1 = 2$. Nesse caso, aplicando a recorrência para $n = 1, 2, \ldots$, tem-se

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 \cdot x_1 \\ x_3 &= 2 \cdot x_2 \\ x_4 &= 3 \cdot x_3 \\ &\vdots \\ x_n &= (n-1) \cdot x_{n-1} \end{aligned}$$

e multiplicando membro a membro obtemos

$$\begin{aligned} x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \ldots \cdot x_n &= x_1 \cdot 2x_2 \cdot 3x_3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot x_{n-1} \\ x_n &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot x_1 \\ x_n &= (n-1)! \cdot x_1 \end{aligned}$$

Como $x_1 = 2$,

$$\begin{aligned} x_n &= (n-1)! \cdot 2 \\ x_n &= 2(n-1)! \end{aligned}$$

Resolver uma recorrência linear de segunda ordem com coeficientes constantes é bem diferente, pois usa-se a equação característica. O próximo resultado mostra a solução para o caso homogêneo.

Teorema 2.6. *Sejam r_1 e r_2 as raízes da equação característica $r^2 = pr + q$. Então, todas as soluções da recorrência linear de coeficientes constantes $x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n$ são da forma*

i) $x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, *se* $r_1 \neq r_2$*;*

ii) $x_n = (C_1 + C_2 n) r^n$, *se* $r_1 = r_2 = r$*;*

onde C_1 e C_2 são constantes.

Uma demonstração sobre esse resultado pode ser encontrada em Carvalho e Morgado (2015). Voltemos à sequência de Fibonacci (Exemplo 2.5), cuja equação característica é dada por $r^2 = r + 1$ e possui raízes distintas $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Logo, a solução da recorrência é dada por

$$F_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{3}$$

Determinaremos C_1 e C_2 usando $F_0 = F_1 = 1$. Substituindo $n = 0$ e $n = 1$ em (3), temos

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

de onde concluímos que

$$C_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \text{ e } C_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$$

Daí,

$$F_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

ou ainda,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

De maneira geral, podemos generalizar as recorrências lineares de ordem 2 para ordens maiores.

Definição 2.7. *Uma* ***recorrência linear de ordem*** k *com coeficientes constantes é uma sequência numérica onde existem constantes reais* $p_0, p_1, \ldots, p_{k-1}$ *e uma função* f *cujo domínio é o conjunto dos números naturais, e tal que*

$$x_{n+k} = p_{k-1}x_{n+k-1} + p_{k-2}x_{n+k-2} + \ldots + p_0x_n + f(n) \tag{4}$$

com $p_0 \neq 0$*. Quando a função* $f(n) = 0$*, dizemos que a recorrência é homogênea.*

Da mesma forma que ocorre em uma recorrência linear de ordem 2, temos uma equação característica associada à recorrência (4) dada por

$$r^k = p_{k-1}r^{k-1} + p_{k-2}r^{k-2} + \ldots + p_1r + p_0 \tag{5}$$

De maneira similar ao Teorema 2.6, podemos considerar a multiplicidade das raízes da equação característica (5) e reescrevê-la como

$$(x-r_1)^{\alpha_1}(x-r_2)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot (x-r_t)^{\alpha_t} = 0$$

com $r_i \neq r_j$ quando $i \neq j$ e $\forall i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, t\}$, e $\alpha_i \geq 1$ é a multiplicidade da raiz r_i. Note que devemos ter

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_t = k$$

Daí, obtemos a solução de uma recorrência linear homogênea de ordem k com coeficientes constantes:

$$x_n = q_1(n)r_1^n + q_2(n)r_2^n + \ldots + q_t(n)r_t^n \tag{6}$$

em que $q_i(n)$ é um polinômio de grau no máximo $\alpha_i - 1$ em n. Para maiores detalhes veja Fischer (2015).

A solução de uma recorrência linear de ordem k com coeficientes constantes não-homogênea é a soma da solução do caso homogêneo com uma solução particular do caso não-homogêneo.

3 Progressões Aritméticas de Ordem Superior

Naturalmente temos que as progressões aritméticas e geométricas são sequências com padrões bem determinados. Queremos aqui explorar um pouco as progressões aritméticas de ordem superior, mas antes relembremos as principais características das progressões aritméticas.

Definição 3.1. *Uma **Progressão Aritmética**, ou simplesmente PA, é uma sequência (a_n) em que a diferença entre dois termos consecutivos é sempre constante. Essa diferença é denominado razão da PA e será denotada por r, ou seja, $a_{n+1} - a_n = r$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Exemplo 3.2. *Alguns exemplos de PA:*

1. $(a_n) = (-7, -4, -1, 2, 5, \ldots)$ *é uma PA de razão* $r = 3$*;*

2. $(a_n) = (10, 5, 0, -5, -10, \ldots)$ *é uma PA de razão* $r = -5$*;*

3. $(a_n) = (2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots)$ *é uma PA de razão* $r = 0$*.*

Dizemos que uma PA é estacionária quando sua razão $r = 0$, como é o caso do terceiro item do Exemplo 3.2. Quando $r \neq 0$, dizemos que a PA é não-estacionária.

O termo geral de uma PA pode ser facilmente deduzido a partir do primeiro termo e da razão. Assim,

$$a_n = a_1 + (n-1)r \tag{7}$$

Note que o termo geral de uma PA não-estacionária é um polinômio de grau 1 em n. Esse fato vale em casos mais gerais de progressões aritméticas.

Dada uma sequência (a_n) definimos o **operador diferença** por $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$. Note que (a_n) é uma PA se, e somente se, a (Δa_n) é uma sequência de termos constantes. Se (Δa_n) é uma nova sequência, esta pode ser uma PA. Isso motiva a seguinte definição:

Definição 3.3. *Dizemos que uma sequência (a_n) é uma **Progressão Aritmética de segunda ordem ou de ordem 2** quando (Δa_n) é uma PA não-estacionária.*

Exemplo 3.4. $(a_n) = (4, 5, 8, 13, 20, \ldots)$ *é uma PA de segunda ordem, pois* $(\Delta a_n) = (1, 3, 5, 7, \ldots)$ *é uma PA de razão* $r = 2$.

Como já mencionamos, o termo geral de uma PA (7) é um polinômio de grau 1. Consideremos agora (a_n) uma PA de segunda ordem. Daí, (Δa_n) é uma PA, digamos de razão r e, portanto, por (7), segue que

$$\Delta a_n = \Delta a_1 + (n-1)r$$

Assim, teremos

$$\begin{array}{rcl} \Delta a_1 & = & \Delta a_1 \\ \Delta a_2 & = & \Delta a_1 + r \\ \Delta a_3 & = & \Delta a_1 + 2r \\ & \vdots & \\ \Delta a_{n-1} & = & \Delta a_1 + (n-2)r \end{array}$$

Somando membro a membro e tendo em vista que

$$\begin{array}{rcl} \sum_{k=1}^{n-1} \Delta a_k & = & (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1}) \\ & = & a_n - a_1 \end{array}$$

obtemos

$$a_n - a_1 = (n-1)\Delta a_1 + [1 + 2 + \ldots + (n-2)]r$$

isto é,

$$\begin{array}{rcl} a_n & = & a_1 + (n-1)\Delta a_1 + \dfrac{(n-2)(n-1)}{2}r \\ & = & a_1 - \Delta a_1 + n\Delta a_1 + \dfrac{n^2 - 3n + 2}{2}r \\ & = & \dfrac{r}{2}n^2 + (\Delta a_1 - \dfrac{3}{2}r)n + r + a_1 - \Delta a_1 \end{array} \tag{8}$$

que é um polinômio do segundo grau em n, visto que $r \neq 0$.

Podemos generalizar essa noção de PA de segunda ordem para ordens maiores. Para isso, iremos denotar $\Delta^2 a_n = \Delta(\Delta a_n) = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n$ e, de maneira mais geral, $\Delta^k a_n = \Delta(\Delta^{k-1} a_n)$. Com isso, temos a seguinte definição:

Definição 3.5. *Dizemos que (a_n) é uma **Progressão Aritmética de ordem** k, com $k > 2$, se a sequência das diferenças entre cada termo e o termo anterior forma uma PA não-estacionária de ordem $k-1$.*

Assim, podemos dizer que uma progressão aritmética é uma PA de primeira ordem. Para uma melhor compreensão, considere os dois próximos exemplos.

Exemplo 3.6. *Exemplos de PA de ordem superior:*

1. $(a_n) = (5, 9, 14, 22, 35, 55, \ldots)$ *é uma PA de ordem 3, pois* $(\Delta a_n) = (4, 5, 8, 13, 20, \ldots)$ *é uma PA de segunda ordem;*

2. $(a_n) = (7, 12, 21, 35, 57, 92, \ldots)$ *é uma PA de ordem 4, pois* $(\Delta a_n) = (5, 9, 14, 22, 35, \ldots)$ *é uma PA de ordem 3.*

Veja que em (7) temos que o termo geral de uma PA (de ordem 1) é um polinômio de grau um em n e de (8) temos que o termo geral de uma PA de segunda ordem é um polinômio de grau dois em n. Esse fato não é coincidência, conforme o seguinte resultado:

Teorema 3.7. *Uma sequência numérica (x_n) é uma progressão aritmética de ordem k, com $k \geq 2$, se, e somente se, seu termo geral x_n é um polinômio de grau k, na variável n.*

Uma demonstração clássica desse resultado, que usa somas polinomiais, pode ser encontrado em Carvalho e Morgado (2015). No presente artigo, queremos mostrar esse resultado usando recorrências lineares.

Inicialmente, vamos mostrar a próxima proposição que relaciona as PA's de ordem k com as recorrências lineares de ordem k. Vale ressaltar que um resultado similar foi obtido por Pereira (2014), que relaciona uma PA de ordem k com uma recorrência linear homogênea de ordem $k+1$.

Proposição 3.8. *Toda PA (x_n) de ordem k pode ser representada por uma recorrência linear não-homogênea de ordem k, tal que*

$$x_{n+k} - \binom{k}{1} x_{n+k-1} + \binom{k}{2} x_{n+k-2} + \ldots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} x_{n+1} + (-1)^k \binom{k}{k} x_n = c$$

onde c é uma constante real não nula.

Prova: Vamos mostrar usando indução sobre k. Para $k = 1$ temos $\Delta x_n = c$, em que c é uma constante não nula; logo $x_{n+1} - x_n = c$ e o resultado é verdadeiro para $k = 1$. Suponha agora que o resultado seja verdadeiro para k. Vamos mostrar que o resultado é verdadeiro para $k+1$.

Considere (x_n) uma PA de ordem $k+1$; então Δx_n é uma PA de ordem k não-estacionária. Assim, pela hipótese de indução

$$\begin{aligned}
c &= \Delta x_{n+k} - \binom{k}{1}\Delta x_{n+k-1} + \binom{k}{2}\Delta x_{n+k-2} + \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}\Delta x_{n+1} + (-1)^k\binom{k}{k}\Delta x_n \\
&= x_{n+k+1} - x_{n+k} - \binom{k}{1}x_{n+k} + \binom{k}{1}x_{n+k-1} + \binom{k}{2}x_{n+k-1} - \binom{k}{2}x_{n+k-2} + \ldots \\
&\quad +(-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}x_{n+2} - (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}x_{n+1} + (-1)^k\binom{k}{k}x_{n+1} - (-1)^k\binom{k}{k}x_n
\end{aligned}$$

Observando os termos semelhantes e usando a relação de Stifel

$$\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} = \binom{k+1}{p+1}$$

teremos

$$\begin{aligned}
c &= x_{n+k+1} - \left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1}\right]x_{n+k} + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{2}\right]x_{n+k-1} + \ldots \\
&\quad +(-1)^k\left[\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k}\right]x_{n+1} + (-1)^{k+1}\binom{k+1}{k+1}x_n \\
&= x_{n+k+1} - \binom{k+1}{1}x_{n+k} + \binom{k+1}{2}x_{n+k-1} + \ldots \\
&\quad +(-1)^k\binom{k+1}{k}x_{n+1} + (-1)^{k+1}\binom{k+1}{k+1}x_n
\end{aligned}$$

Logo, o resultado é verdadeiro para $k+1$. Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, o resultado é verdadeiro para todo k natural. $\square$

A próxima proposição mostra a relação dos graus dos polinômios quando aplicados no operador diferença.

Proposição 3.9. *Se x_n é um polinômio de grau k em n com coeficiente líder α_k, então Δx_n é um polinômio de grau $k-1$ em n com coeficiente líder $k\alpha_k$.*

Prova: Como x_n é um polinômio de grau k em n com coeficiente líder α_k, podemos escrever x_n como

$$\begin{aligned} x_n &= \alpha_k n^k + \alpha_{k-1} n^{k-1} + \ldots + \alpha_1 n + \alpha_0 \\ &= \sum_{j=0}^{k} \alpha_j n^j \end{aligned}$$

Note que, pelo desenvolvimento do binômio de Newton,

$$\begin{aligned} (n+1)^j &= \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} n^{j-i} = n^j + \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} n^{j-i} \\ (n+1)^j - n^j &= \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} n^{j-i} \end{aligned}$$

Usando essa expressão obtemos

$$\begin{aligned} \Delta x_n &= x_{n+1} - x_n = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j (n+1)^j - \sum_{j=0}^{k} \alpha_j n^j \\ &= \sum_{j=0}^{k} \alpha_j [(n+1)^j - n^j] = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} n^{j-i} \\ &= \alpha_k \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{k-i} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} n^{j-i} \\ &= \alpha_k \binom{k}{1} n^{k-1} + \alpha_k \sum_{i=2}^{k} \binom{k}{i} n^{k-i} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} n^{j-i} \\ &= k\alpha_k n^{k-1} + P_{k-2}(n) \end{aligned}$$

em que $P_{k-2}(n)$ é um polinômio de grau $k-2$ em n. Portanto, Δx_n é um polinômio de grau $k-1$ em n com coeficiente líder $k\alpha_k$. □

Ao aplicarmos o resultado da Proposição 3.9 seguidamente obteremos o seguinte corolário:

Corolário 3.10. *Se x_n é um polinômio de grau k em n com coeficiente líder α_k, então (x_n) é uma PA de ordem k e $\Delta^k x_n = k!\alpha_k$.*

Prova: Aplicando o resultado da Proposição 3.9 para o polinômio Δx_n teremos que $\Delta^2 x_n$ é um polinômio de grau $k-2$ em n, com coeficiente líder $k(k-1)\alpha_k$. Aplicando esse resultado sucessivas vezes, teremos que $\Delta^{k-1} x_n$ é um polinônio de grau 1 em n, com coeficiente líder $k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2\alpha_k$. E, por fim, $\Delta^k x_n = k!\alpha_k \neq 0$ é uma constante. Portanto, (x_n) é uma PA de ordem k. □

Agora estamos preparados para demonstrar o Teorema 3.7 usando recorrências lineares.

3.1 **Prova do Teorema 3.7**

Prova: Suponhamos inicialmente que (x_n) é uma PA de ordem k. Então, pela Proposição 3.8, temos que x_n é uma recorrência linear não-homogênea de ordem k tal que

$$\begin{aligned} x_{n+k} &- \binom{k}{1}x_{n+k-1} + \binom{k}{2}x_{n+k-2} + \ldots \\ &+ (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}x_{n+1} + (-1)^k\binom{k}{k}x_n = c \end{aligned}$$

em que c é uma constante real não nula. Ou ainda,

$$\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}(-1)^p x_{n+k-p} = c \tag{9}$$

cuja equação característica é dada por

$$0 = \sum_{p=0}\binom{k}{p}(-1)^p r^{k-p} = (r-1)^k$$

Portanto, a solução do caso homogêneo é dada por

$$\begin{aligned} y_n &= (b_0 + b_1 n + \ldots + b_{k-1}n^{k-1})1^n \\ &= b_0 + b_1 n + \ldots + b_{k-1}n^{k-1} \end{aligned} \tag{10}$$

Como a solução geral da recorrência (9) é dada pela solução do caso homogêneo mais uma solução particular de (9), precisamos determinar uma solução particular. Para isto, consideremos $a_n = \dfrac{c}{k!}n^k$. Então, pela Proposição 3.9 e pelo Corolário 3.10, temos que a_n satisfaz

$$\Delta^k a_n = k! \cdot \frac{c}{k!} = c$$

Portanto, (a_n) satisfaz a recorrência (9), logo é uma solução particular. Combinando esse resultado com (10) temos que a solução geral de (x_n) é dada por

$$\begin{aligned} x_n &= y_n + a_n \\ &= b_0 + b_1 n + \ldots + b_{k-1}n^{k-1} + \frac{c}{k!}n^k \end{aligned}$$

que é um polinômio de grau k em n, visto que $c \neq 0$.

Reciprocamente, suponhamos que x_n é um polinômio de grau k em n. Aplicando a Proposição 3.9 juntamente com o Corolário 3.10, o resultado segue de imediato. □

4 Considerações Finais

Neste trabalho provamos um resultado clássico de Progressões Aritméticas de ordem superior usando recorrências lineares de ordem superior. Além disso, exibimos alguns resultados que mostram a relação direta existente entre esses entes matemáticos. As provas encontradas na maioria dos livros para esse resultado usa somas polinomiais, que tem suas vantagens. Nossa abordagem não pode ser considerada mais geral que essa clássica, entretanto, traz uma nova visão e relação das progressões aritméticas de ordem superior com as recorrências lineares de coeficientes constantes.

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente desenvolvido durante a elaboração do Trabalho de Conclusão de Curso da segunda autora (LIMA, 2019). A autora agradece aos professores do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira pela excelente formação recebida.

Referências

CARVALHO, P.; MORGADO, A. **Matemática Discreta**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

FISCHER, H. **Linear recurrence relations with constant coefficients**. 2015. Disponível em: http://matematicas.uam.es/~mavi.melian/CURSO_15_16/web_Discreta/recurrence.pdf. Acesso em: 01 out. 2019.

JESUS, E. A. de; SILVA, E. F. S. e. **Relações de Recorrência**. 2006. Monografia (Trabalho nas Jornadas de Iniciação Científica) – Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2006.

LIMA, E. **Progressões e Recorrências**. 2019. 59f. Monografia (Curso de Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-brasileira, Redenção, 2019.

PEREIRA, M. **Recorrências - Problemas e Aplicações**. 2014. 61f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília, Brasília, 2014.

PINHEIRO, T.; LAZZARIN, J. Recorrência matemática na OBMEP. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 37, Ed. Especial PROFMAT, p. 36-46, 2015.