Um instrumento de medições: construção e aplicações do “Visor de Paralaxe”

A measurement instrument: construction and applications of the “Parallax Display”

Laerte Bemm
Universidade Estadual de Maringá (UEM), Departamento de Matemática (DMA), Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Maringá, PR, Brasil
http://orcid.org/0000-0002-0326-7662, lbemm2@uem.br

Alexandra de Oliveira Abdala Cousin
Universidade Estadual de Maringá (UEM), Departamento de Matemática (DMA), Maringá, PR, Brasil
http://orcid.org/0000-0001-7072-0749, aoacousin@uem.br

Wagner Szpak
Colégio Estadual Marechal Rondon, Campo Mourão, PR, Brasil
http://orcid.org/0000-0003-2447-1678, wagabond78@gmail.com

Informações do Artigo

Histórico do Artigo
Submissão: 30 de março de 2019.
Aceite: 24 de junho de 2019.

Palavras-chave
Visor de Paralaxe
Medição de Ângulos
Medição de Distâncias
Área de Polígonos
História da Matemática

Resumo
O presente artigo infere sobre a construção de um instrumento que permite a medição de ângulos e distâncias entre dois pontos sem a necessidade de acesso a um destes pontos e, consequentemente, permite estimar a área de polígonos convexos. Esse instrumento é conhecido como Visor de Paralaxe, o qual será descrito teoricamente nas seções deste trabalho, bem como a metodologia utilizada para sua construção. Também será apresentada uma atividade (experimento) em que comprovamos a eficiência deste instrumento. Destaca-se ainda que em nossa pesquisa utilizamos como referencial teórico e metodológico a História da Matemática e Investigações em Geometria na sala de aula.

Keywords
Parallax Display
Angle Measurement
Distance Measurement
Polygon Area
History of Mathematics

Abstract
The present article infers on the construction of an instrument that allows the measurement of angles and distances between two points without the need of access to one of these points and, consequently, allows to estimate the area of convex polygons. This instrument is known as “Parallax Display”, which will be described theoretically in the sections of this work, as well as the methodology used for its construction. We will also present an activity (an experience) in which we prove the efficiency of this instrument. It is also worth noting that in our research we use as theoretical and methodological reference the History of Mathematics and Investigations in Geometry in the schoolroom.

1 Introdução

Os conteúdos específicos a serem trabalhados pelo professor de Matemática em sala de aula podem transitar por diversas tendências metodológicas, Resolução de Problemas, Etnomatemática, Modelagem Matemática etc., as quais tem grau de importância equivalentes entre si e complementam-se umas as outras.

Isto posto, neste trabalho não utilizamos apenas uma tendência, mas enfocar naquelas que sejam mais apropriadas para as ações propostas. Importante observar, no entanto, que enfatizamos no referencial teórico a História da Matemática e as Investigações Matemáticas, vistas tanto como tendências de aporte teórico como metodológicas.

Segundo Miguel e Miorim (2004), a história deve ser o fio condutor que direciona as explicações dadas aos porquês da Matemática. Assim, pode promover uma aprendizagem significativa, pois proporciona ao aluno entender que o conhecimento matemático, em geral, é construído historicamente a partir de situações concretas e necessidades reais.

Por outro lado, diversos autores e investigadores da Educação Matemática tem sublinhado a importância de se atribuir, na escola, um papel central ao objetivo "pensar matematicamente", sustentando que uma contribuição decisiva pode vir da realização de atividades que envolvam os alunos em problemas abertos, em explorações e investigações matemáticas. Com efeito, estas lidam com processos fundamentais do pensamento matemático, como formular e demostrar conjecturas ou comunicar descobertas (Abrantes, 1999).

A proposta que estamos abordando está enfocada na área de Geometria e, portanto, entendemos que, neste momento, algumas considerações sobre este assunto se fazem necessárias.

Ao buscarmos, pela etimologia, o significado da palavra geometria encontramos que ela é oriunda da junção dos termos gregos "geo" (terra) e "metro" (medir). Portanto, em sua origem, Geometria foi a ciência de medir terra. O início desta área da Matemática é um tanto incerta. O historiador grego Heródoto (500 a.C.) faz esta atribuição ao povo egípcio, mas civilizações mais antigas, como os babilônios, hindus e chineses, também possuíam informações geométricas. Por meio da obra *Os Elementos*, Euclides de Alexandria (300 a.C) formalizou axiomaticamente o conhecimento de Geometria que se tinha na época. Assim, esta é conhecida como Geometria Euclidiana.

Atualmente, o entendimento de Geometria é muito mais amplo, pois ao longo da história surgiram a Geometria Descritiva, Analítica, Hiperbólica, Elíptica etc., que utilizam os mais variados métodos para resolver problemas.

Mesmo que tenha havido um grande desenvolvimento de outras geometrias ao longo dos séculos e embora as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná (PARANÁ, 2008), por exemplo, sugiram a introdução de Geometrias Não Euclidianas no Ensino Básico, apenas a Geometria Euclidiana é abordada nos livros didáticos da Educação Básica. E, um dos conteúdos apresentados é o cálculo de área de figuras geométricas planas. Porém, de modo geral, esse conteúdo é apresentado aos alunos sem uma contextualização adequada e, muitas vezes, sem sugestões de atividades que evidenciem a teoria com a prática. Mais ainda, em muitos casos, apenas figuras como triângulo, retângulo, círculos, trapézios e paralelogramos são exploradas, enquanto que figuras obtidas por junção destas são pouco estudadas.

Por outro lado, atualmente, existem muitas possibilidades de se trabalhar os conceitos geométricos por meio de tendências metodológicas, como a História da Matemática e Investigações Matemáticas . Estas práticas pedagógicas procuram com que o aluno deixe de ser um simples receptor de conteúdos, passando a interagir e participar do próprio processo de construção do conhecimento.

A partir da nossa prática em ministrar aulas tradicionais e pouco atraentes em escolas de Ensino Básico, nos motivamos a elaborar uma proposta de atividade para o Ensino Médio, relacionado à Geometria Euclidiana. Tal proposta consiste em construir um instrumento, conhecido como Visor de Paralaxe, que permite determinar distâncias, ângulos e áreas. Também apresentamos uma atividade (experimento), realizado por nós, que comprova a eficiência deste instrumento.

O Visor de Paralaxe é um instrumento em formato de “T”, que permite determinar a distância de um ponto fixo A até um ponto B sem a necessidade de termos acesso a este ponto B. Com isso podemos determinar perímetros, ângulos e calcular áreas de polígonos convexos a partir de um vértice fixo. Portanto, ele pode ser utilizado para resolver problemas cotidianos dos alunos no que tange perímetros e áreas.

O principal objetivo deste trabalho é descrever passo a passo a construção do Visor de Paralaxe e discutir sua eficácia. Para tanto, nosso trabalho está estruturado em 6 seções. Na seção 2, trazemos uma revisão de literatura da Geometria Euclidiana (abordando alguns conceitos e resultados) que utilizaremos em seções seguintes. Na seção 3, apresentamos os materiais necessários e descrevemos a construção do Visor de Paralaxe, enquanto que na seção 4, mostramos como manipulá-lo. Na seção 5, relatamos uma experiência realizada por nós, em que calculamos a área de um polígono regular utilizando este instrumento. Na última seção fazemos as considerações finais.

2 Revisão de literatura

Nesta seção, apresentamos os principais referenciais teóricos utilizados no trabalho. Iniciamos apresentando um breve panorama histórico da Geometria Euclidiana. Em seguida, apresentamos um esboço histórico do Ensino da Geometria enfocando nos conceitos de ângulo e de área de polígonos convexos. E, encerrando esta seção, expomos os conceitos e resultados matemáticos que serão necessários para o desenvolvimento da proposta ora apresentada.

2.1 Considerações históricas da Geometria Euclidiana

Segundo entrevista de Bicudo (2011), registros de filósofos como Heródoto e Aristóteles, a Geometria nasceu no antigo Egito. No século V a.C, ela foi levada pelo filósofo Tales de Mileto para a Grécia, ganhando embasamento teórico fundamentado na razão, graças a Euclides de Alexandria, matemático grego que viveu por volta de 300 a.C. em Alexandria, no Egito, que reuniu em seu tratado “Os Elementos” os cinco postulados geométricos que são ensinados até hoje nas escolas. Para Heródoto, conforme registrado no segundo livro da sua obra “História”, a geometria teria surgido graças ao Faraó Sesóstris III, que dividiu as terras da região para a agricultura, fazendo com que cada proprietário pagasse tributos conforme o tamanho do terreno. Quando o Rio Nilo transbordava e tomava parte dessa terra, os agricultores requeriam nova metragem para pagar menos impostos. A partir dessas medições, teria surgido a Geometria. Já a versão de Aristóteles diz que no Egito havia uma classe sacerdotal que se dedicava aos estudos geométricos teóricos. Ou seja, nas versões desses filósofos, percebemos claramente origens distintas da geometria, uma calcada na prática e outra simplesmente na teoria.

Ainda, segundo Bicudo (2011), é preciso lembrar que as visões filosóficas eram completamente diferentes no Egito e na Grécia. No Egito e na Babilônia, por exemplo, o critério de verdade era a experiência, ou seja, acreditava-se naquilo que a pessoa via. Já a visão que se tinha na Grécia era diferente, pois não bastava ver para crer, e sim provar com a razão. De posse dos conhecimentos práticos do Egito e da Babilônia, os gregos começaram a aperfeiçoar a Geometria baseados na lógica e raciocínio.

O alicerce da Geometria que é hoje ensinada nas escolas da Educação Básica provem dos ensinamentos de Euclides, um professor e Matemático platônico, conhecido como o “Pai da Geometria” por ter escrito uma das obras mais famosas da Matemática, Os Elementos, um compendio em treze volumes, que se constituiu como pilar no desenvolvimento da lógica e da ciência matemática moderna. Segundo Boyer (1996), Os Elementos de Euclides é o livro didático mais bem sucedido e influente já escrito e perde somente para a Bíblia em número de edições publicadas, chegando a quase mil. O que o tornou famoso foi o método usado: dedução lógica de teoremas a partir de nove noções comuns e de cinco postulados.

Por outro lado, Greenberg (1993) afirma que a fundamentação sistemática da Geometria foi realizada pela escola pitagórica, por volta de 400 a.C., em um tratado chamado “Elementos” escrito pelo matemático Hipócrates de Chios. Um século depois, Euclides publicou sua obra, de nome parecido, onde reuniu quase tudo que se conhecia de Matemática até então, inclusive cobrindo quase todo o tratado de Hipócrates. A Geometria então passa a ser o ponto central da Matemática neste período, tanto que, no século IV a.C., Platão fundou sua famosa academia onde na entrada estava fixado o lema “**Que ninguém que ignore a geometria entre aqui**”.

Euclides foi um discípulo da escola platônica e produziu o tratamento definitivo da geometria grega e da teoria dos números nos seus treze volumes do “Os Elementos”. O destaque nessa conjuntura é que o método axiomático usado por Euclides em sua obra é o modelo de tudo que chamamos hoje de Matemática Pura, pura no sentido de “puro pensar”; onde nenhum experimento físico é preciso para verificar se suas afirmações são corretas, somente o raciocínio nas demonstrações precisa ser conferido. Para Euclides, a Geometria era uma ciência dedutiva que ele operava a partir de certas noções básicas (ou comuns) e os axiomas (ou postulados), que eram verdades aceitas para que o raciocínio lógico pudesse se desenvolver.

Ressaltamos ainda que em sua obra, Euclides utiliza-se das figuras geométricas de áreas iguais em muitas demonstrações. Os gregos utilizavam um método de medição de áreas chamado “quadratura”. Esse método consistia em transformar as figuras em outras de mesma área e, posteriormente, em um quadrado de área igual à da figura original. Utilizavam o quadrado como padrão de comparação e, portanto, não recorriam aos números para o cálculo de áreas. Em Os Elementos, Euclides mostra como, a partir de qualquer polígono é possível construir, usando régua e compasso, um quadrado de área igual à da figura original (PITOMBEIRA; ROQUE, 2012).

Assim, verificamos que o cálculo de áreas é um problema que se coloca historicamente desde a Antiguidade e permanece como um campo de interesse nos dias atuais. Corroborando com essa afirmação, abordaremos nas Seções 3 e 4 desse trabalho a construção e aplicação do instrumento Visor de Paralaxe que permite o cálculo de áreas de polígonos convexos.

2.2 Breve panorama do ensino de Geometria

Como observamos, na seção anterior, a constituição dos saberes matemáticos está intimamente ligada as necessidades do homem em resolver problemas de sua subsistência. Logo, inferimos que, como o homem, a Matemática não se desenvolveu sozinha e isolada ao longo do tempo. Apontar as relações entre a Matemática e o desenvolvimento do homem, tanto socialmente quanto economicamente, é um caminho para se obter um panorama que promova a compreensão dos conhecimentos matemáticos atuais, bem como suas origens (LOPES; FERREIRA, 2013).

Esta perspectiva, está em concordância com Santos (2009) que afirma ser "importante olhar para o passado para estudar matemática, pois perceber as evoluções das ideias matemáticas observando somente o estado atual dessa ciência não nos dá toda a dimensão das mudanças" (SANTOS, 2009, p. 19).

E ainda, citando Lopes e Ferreira (2013), ao conhecer a História da Matemática, o aluno a percebe como uma ciência desenvolvida pela humanidade, passível de erros e construída a partir de muitas tentativas em solucionar problemas cotidianos. Nessa perspectiva, Santos (2009, p. 20) *apud* Lopes e Ferreira (2013, p.78) diz que a História da Matemática:

> [...] dá a este aluno a noção exata dessa ciência, como uma ciência em construção, com erros e acertos e sem verdades universais. Contrariando a idéia positivista de uma ciência universal e com verdades absolutas, a História da Matemática tem este grande valor de poder também contextualizar este saber, mostrar que seus conceitos são frutos de uma época histórica, dentro de um contexto social e político.

Segundo Miguel e Miorim (2011, p. 53), *apud* Lopes e Ferreira (2013, p. 80), a abordagem histórica dos conteúdos matemáticos serve como apoio para se atingir objetivos pedagógicos que levem os alunos a perceber, por exemplo:

> (1) a Matemática como uma criação humana; (2) as razões pelas quais as pessoas fazem Matemática; (3) as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das idéias matemáticas; (4) as conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e lógica etc.; (5) a curiosidade estritamente intelectual que pode levar à generalização e extensão de idéias e teorias; (6) as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; (7) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova.

Para esses autores, no momento em que os alunos percebem o surgimento da Matemática a partir da busca por resolução de problemas cotidianos, conhecem também as preocupações de vários povos em diferentes momentos históricos. Isto proporcionará estabelecer comparações entre os processos matemáticos do passado e do presente, bem como compreender que os saberes ensinados na escola não se originaram sem um propósito, sem um porquê.

Por outro lado, segundo Abrantes (1999), a Geometria parece ser, dentro da Matemática escolar, uma área particularmente propícia à realização de atividades de natureza exploratória e investigativa. Porém, a partir da abordagem puramente formal da Matemática, a Geometria tornou-se um "parente pobre" da Álgebra Linear. As atividades envolvendo construções geométricas foram consideradas matéria de outras disciplinas. A "importância prática" da Geometria reduzia-se ao Teorema de Pitágoras e a umas quantas fórmulas para o cálculo de áreas e volumes. Nesta abordagem, a intuição e a visualização desempenham um papel menor no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Ainda, segundo Abrantes (1999), a tendência de revalorização da Geometria que, nos últimos anos, tem marcado a evolução curricular em Matemática um pouco por todo o mundo, com "reflexos visíveis em Portugal" baseia-se noutros pressupostos, onde o nome de Hans Freudenthal surge neste contexto. Para ele a Geometria é essencialmente "compreender o espaço" e que a criança "deve aprender a conhecer, explorar, conquistar, de modo a poder aí viver, respirar e mover-se melhor" (FREUDENTHAL, 1973, p. 403). Nesta perspectiva, a Geometria torna-se um campo privilegiado de matematização da realidade e de realização de descobertas.

É particularmente interessante que Freudenthal (1973) chame a atenção para dois aspectos da riqueza da Geometria que poderiam parecer contraditórios mas que na verdade se completam: por um lado, as descobertas geométricas, sendo feitas também "com os próprios olhos e mãos, são mais convincentes e surpreendentes" (FREUDENTHAL, 1973, p. 407); por outro lado, salientando a necessidade de explicação lógica das suas conclusões, a geometria pode fazer sentir aos alunos "a força do espírito humano, ou seja, do seu próprio espírito" (FREUDENTHAL, 1973, p. 407).

Fazendo apelo à intuição e à visualização e recorrendo, com naturalidade, à manipulação de materiais, a geometria torna-se, talvez mais do que qualquer outro domínio da Matemática, especialmente propícia a um ensino fortemente baseado na realização de descobertas, desde os níveis escolares mais elementares. Na Geometria, há um imenso campo para a escolha de tarefas de natureza exploratória e investigativa, que podem ser desenvolvidas na sala de aula, sem necessidade de um grande número de pré-requisitos e evitando, sem grande dificuldade, uma visão da

Matemática centrada na execução de algoritmos e em “receitas” para resolver exercícios-tipo. A riqueza e variedade da Geometria constituem, de fato, argumentos muito fortes para a sua valorização no currículo e nas aulas de Matemática. Na Geometria, constata-se uma grande variedade de objetos e situações. Trabalha-se no plano ou no espaço, com figuras planas ou com poliedros, por exemplo, podendo descobrir-se e explorar-se um grande número de propriedades e conexões.

A relação entre situações da realidade concreta e situações matemáticas encontra na Geometria inúmeros exemplos e concretizações. Ela é uma fonte de problemas de vários tipos: de visualização e representação; de construção e lugares geométricos; envolvendo transformações geométricas; em torno das ideias de forma e de dimensão; implicando conexões com outros domínios da Matemática, como os números, a álgebra, o cálculo combinatório, a análise; apelando a processos de “organização local” da Matemática, nomeadamente de classificação e hierarquização a partir de determinadas definições e propriedades.

Já as atividades investigativas em Geometria conduzem rapidamente à necessidade de se lidar com diversos aspectos essenciais da natureza da própria Matemática. Formular e resolver problemas, fazer conjecturas, testá-las, validá-las ou refutá-las, procurar generalizações, comunicar descobertas e justificações, tornam-se processos naturais. Ao mesmo tempo, surgem oportunidades para se discutir o papel das definições e para se examinar as consequências de se adotar uma ou outra definição, assim como para se compreender a natureza e o valor da demonstração em Matemática.

Além disso, a Geometria oferece numerosas ocasiões para se conhecerem exemplos sugestivos da história e da evolução da Matemática. Explorações e investigações em Geometria podem fazer-se em todos os níveis de escolaridade e a diversos níveis de desenvolvimento (Abrantes, 1999).

2.3 Conceitos e resultados de Geometria

Conforme mencionamos anteriormente, um dos nossos objetivos é a construção do Visor de Paralaxe e mostrar como podemos usá-lo para determinar distâncias, ângulos e áreas. Para podermos justificar matematicamente que o instrumento é viável, algumas definições e resultados de Geometria são necessários. Por comodidade ao leitor e para embasar matematicamente nosso trabalho, optamos em apresentá-los. Os resultados e definições desta seção são, em geral, conhecidos e podem ser encontrados na maioria dos livros de Geometria e também em alguns livros didáticos do Ensino Básico. Para o leitor interessado em maiores detalhes, sugerimos Barbosa (2006), Dolce e Pompeo (2005) e Gerônimo e Franco (2010).

Iniciamos a seção estabelecendo algumas notações que serão usadas no texto. Pontos do plano sempre serão denotados por letras latinas maiúsculas. Se A e B são dois pontos, o segmento determinado por eles será denotado por AB e a medida deste segmento por $\overline{AB}$. Se A, B e C são três pontos não colineares, o ângulo com vértice em A será denotado por $B\hat{A}C$ ou simplesmente por $\hat{A}$, quando não houver possibilidade de confusão. Se dois ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ tiverem a mesma medida, diremos que eles são congruentes e denotamos por $\hat{A} \equiv \hat{B}$.

Dizemos que dois triângulos são semelhantes se existe uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam congruentes e os lados correspondentes proporcionais (Barbosa, 2006). Desta forma, se ABC e $A'B'C'$ são dois triângulos semelhantes e se $A \mapsto A', B \mapsto B'$ e $C \mapsto C'$ é a correspondência que estabelece a semelhança, então

$$\begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \hat{C} \equiv \hat{C}' \end{cases} \text{ e } \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}.$$

Pode ser difícil demonstrar que dois triângulos são semelhantes utilizando a definição. Porém, há três teoremas que nos permitem dizer quando dois triângulos são semelhantes sem a necessidade de verificarmos as seis condições exigidas na definição anterior. Apresentamos apenas um destes teoremas, pois este será utilizado nas próximas seções. A demonstração pode ser encontrada em (BARBOSA, 2006, p. 110-111).

Teorema 2.1. *Dois triângulos são semelhantes se há uma correspondência bijetora entre seus vértices de modo que dois ângulos correspondentes são congruentes. Em particular, dois triângulos retângulos que tem um ângulo agudo em comum são semelhantes.*

Os polígonos convexos são os principais entes matemáticos do nosso estudo. Para a definição deste conceito são necessárias as próximas duas definições.

Definição 2.2. *(BARBOSA, 2006, p. 38) Uma poligonal, é uma figura geométrica formada por uma sequência de n $(n \geq 3)$ pontos, $A_1, A_2, ..., A_n$ (chamados vértices), e pelos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-1}A_n$ (chamados lados). Ângulo de uma poligonal com vértice A_j é o ângulo definido pelos lados que tem A_j como ponto comum. Uma tal poligonal será denotada por $A_1A_2 \ldots A_n$.*

Definição 2.3. *(BARBOSA, 2006, p. 38) Polígono é uma poligonal $A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1}$ que satisfaz as seguintes condições:*

i) $A_{n+1} = A_1$*;*

ii) os lados da poligonal interceptam-se somente em suas extremidades;

iii) dois lados com mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta.

Um polígono de vértices $A_1, A_2, ..., A_n, A_{n+1} = A_1$ será denotado simplesmente por $A_1 A_2 ... A_n$.

Um polígono é **convexo** se ele sempre está contido em um dos semiplanos determinados pelas retas que contém seus lados (BARBOSA, 2006, p. 40).

O próximo resultado estabelece que todo polígono pode ser decomposto como a união de triângulos que não possuem pontos interiores em comum.

Proposição 2.4. *(GERÔNIMO; FRANCO, 2010, Proposição 6.3) Todo polígono com* n *lados determina* $n-2$ *triângulos tais que dois quaisquer desses triângulos não possuem pontos interiores em comum e seus vértices são os vértices do polígono.*

Chamamos de **triangulação** ao processo de decompor um polígono na união de dois ou mais triângulos tais que, dois a dois, não tem pontos interiores em comum. Nesse caso, a área do polígono é a soma das áreas desses triângulos. Assim, a área de um polígono de n lados é igual a soma das áreas dos $(n-2)$ triângulos que a Proposição 2.4 se refere. Concluímos, portanto, que se soubermos uma "fórmula" para a área de um triângulo, podemos aplicá-la $(n-2)$ vezes para determinar a área de um polígono de n lados.

Uma "fórmula" bem conhecida diz que a área de um triângulo é a metade do produto da medida de qualquer base pela medida da altura correspondente (GERÔNIMO; FRANCO, 2010, p. 110). Porém, há duas maneiras alternativas para calcular a área de um triângulo, conforme os próximos dois resultados.

Proposição 2.5. *(DOLCE; POMPEO, 2005, p. 255). A área de um triângulo qualquer é igual ao metade do produto das medidas de dois lados pelo seno do ângulo que eles formam entre si.*

Assim, se ABC é um triângulo qualquer, então sua área S_{ABC} é dada por

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot sen B\hat{A}C = \frac{1}{2} \cdot \overline{BA} \cdot \overline{BC} \cdot sen A\hat{B}C = \frac{1}{2} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{CB} \cdot sen A\hat{C}B.$$

Teorema 2.6. *(IEZZI, 1978, p. 82-83). Se os vértices de um triângulo* ABC *tem coordenadas cartesianas iguais a* (x_1, y_1)*,* (x_2, x_2) *e* (x_3, y_3)*, então a área* S_{ABC} *do triângulo* ABC *é dada por ,*

$$S_{ABC} = \frac{|D_{ABC}|}{2},$$

em que $D_{ABC} = det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} = x_1y_2 + y_1x_3 + x_2y_3 - x_3y_2 - y_3x_1 - x_2y_1.$

As definições e resultados que acabamos de apresentar são aquelas que nos permitem dar um embasamento matemático ao nosso trabalho, uma vez que precisamos justificar que o Visor de Paralaxe é matematicamente consistente.

3 Construção do Visor de Paralaxe

A construção do Visor de Paralaxe é algo simples e requer poucos materiais e de baixo custo. Por isso, acreditamos que, com o devido acompanhamento, um tal instrumento pode ser construído pelos alunos em sala de aula.

Nesta seção apresentamos a construção de um Visor de Paralaxe proposto. Para tanto, serão necessários os materiais descritos a seguir.

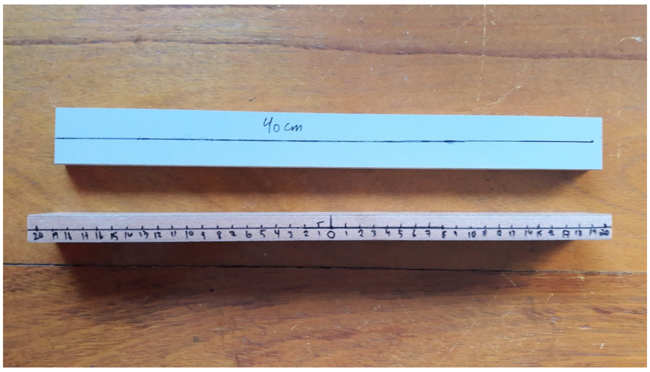
- 2 ripas de madeira ou MDF de $42cm \times 4cm \times 1cm$;
- 6 pregos de $6cm$;
- 1 régua graduada em centímetros e milímetros;
- 1 caneta;
- 1 martelo.

Caso seja conveniente, os pregos podem ser substituídos por parafusos (com cabeça de fenda) e o martelo por uma chave de fenda.

A confecção do Visor de Paralaxe consiste em algumas etapas, as quais passamos a descrever. Para facilitar a nossa a descrição, vamos nomear as duas ripas de R_1 e R_2. Em cada uma das ripas há duas faces de $42cm \times 4cm$, que chamamos faces F_1 e F_2, e duas faces de $42cm \times 1cm$ que chamamos de faces F_3 e F_4.

Etapa 1. *Na face F_3 da ripa R_1 trace uma reta, de modo que a face fique dividida em duas partes, cada uma de $42cm \times 0,5cm$. Demarque pontos na reta a cada 1 centímetro. O ponto médio da reta será chamado de origem e a ele atribuímos o número 0 (zero). Aos demais pontos serão* *atribuídos os números de 1 a 20 (tanto à esquerda quanto à direita da origem) de maneira ordenada e crescente. Observe que sobrará* $1cm$ *de cada lado para podermos manusear a ripa. Fixe um prego na origem e um prego em cada um dos dois pontos identificados pelo número 20. Estes pregos chamamos de visores (veja Figura 1).*

Figura 1 – Marcações sobre as ripas.

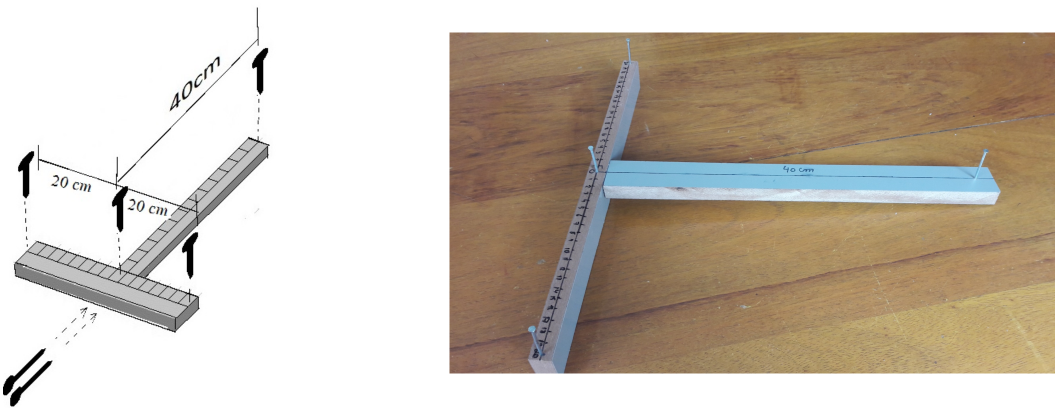


Fonte: Elaboração dos autores.

Etapa 2. *Na face* F_1 *da ripa* R_2*, trace uma reta dividindo-a em duas partes de* $42cm \times 2cm$ *cada. Chamamos um dos pontos extremos desta reta também de origem. Sobre esta reta, a* $40cm$ *da origem, fixe um dos pregos. Este prego também será chamado de visor (Figura 1).*

Etapa 3. *Devemos unir as duas ripas* R_1 *e* R_2*, utilizando os dois pregos restantes, de forma que: as ripas estejam dispostas perpendicularmente; que as origens fiquem próximas e alinhadas; as ripas não estejam sobrepostas (Figura 2).*

Figura 2 – Fixação dos visores.



Fonte: Elaboração dos autores.

A Figura 2 mostra as posições que os pregos (visores) devem ser fixados e também mostra um Visor de Paralaxe pronto para ser usado. Importante observarmos que a ripa R_1 contém três visores e a ripa R_2 contém apenas um visor.

4 Como determinar distâncias, ângulos e áreas usando o Visor de Paralaxe

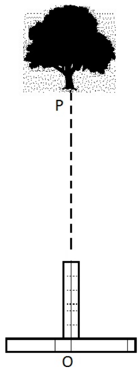
Conforme vimos na Seção 2, pelo menos desde os tempos dos antigos egípcios o homem necessita determinar distâncias e áreas. A maneira mais simples de medição é a fita métrica, mas, em alguns casos, o uso deste instrumento fica inviável, como por exemplo, medir a largura de um rio, estando de um lado da margem e sem atravessá-lo. Uma alternativa é usar o Visor de Paralaxe.

Apresentamos nesta seção a justificativa teórica-matemática de porque a manipulação adequada deste instrumento permite calcular a distância entre dois pontos sem a necessidade de acesso a um deles. E também indicamos como medir ângulos com o Visor de Paralaxe acoplando a ele um transferidor. Finalizamos a seção com um exemplo teórico de cálculo de área de um polígono convexo utilizando as medidas obtidas com um Visor de Paralaxe e usando resultados da Seção 2.3.

4.1 Determinar distâncias

Suponhamos que uma pessoa (observador) queira medir a distância entre dois pontos utilizando o Visor de Paralaxe. Chamamos de O o ponto que observador tem acesso e P o ponto que observador não tem, necessariamente, acesso. O observador deve posicionar-se sobre o ponto O e em seguida deve alinhar o visor da origem, com o visor da ripa R_2 e com o alvo escolhido, conforme mostra a Figura 3.

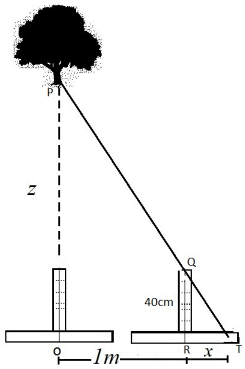
Figura 3 – Alinhamento dos visores com o alvo.



Fonte: Elaboração dos autores.

Na sequência, o observador deve deslocar a origem do Visor de Paralaxe um metro em linha reta para sua direita ou esquerda (sem girá-lo, rotacioná-lo ou incliná-lo). Em seguida, deve alinhar o olhar com o visor da ripa R_2 e o alvo. Finalmente, deve marcar na ripa R_1 a medida *x* que este alinhamento promoveu (Figura 4).

Figura 4 – Visor de Paralaxe deslocado 1 metro.



Fonte: Elaboração dos autores.

Denotamos por z a medida (em centímetros) a ser determinada e observamos que na Figura 4 temos dois triângulos retângulos, OPT e RQT. No triângulo OPT, as medidas dos catetos são iguais a z e $(100+x)$ e no triângulo RQT as medidas dos catetos são iguais a x e $40cm$. Como estes dois triângulos retângulos tem um ângulo agudo em comum eles são semelhantes pelo Teorema 2.1. Portanto, lados correspondentes são proporcionais, ou seja,

$$\frac{z}{40} = \frac{100+x}{x} \Longrightarrow z = \frac{40(100+x)}{x} \quad (1)$$

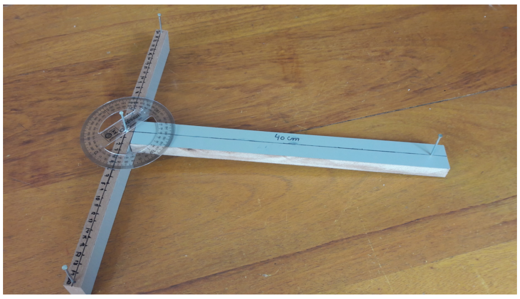
Logo, a Equação (1) nos dá a distância entre os pontos O e P.

É importante ressaltarmos que a distância determinada com um Visor de Paralaxe é uma aproximação da distância real, pois imprecisões são cometidas quando graduamos a ripa e quando marcamos a medida x. Também, caso o leitor queira, as medidas das ripas podem ser maiores ou menores. Vale ressaltar que quanto maiores forem estas peças, mais precisa será a medida encontrada. Finalmente, o deslocamento de 1 metro para a direita ou esquerda também pode ser alterado. Nós escolhemos esta medida por simplificação dos cálculos.

4.2 **Determinar ângulos**

O Visor de Paralaxe também pode ser usado para medir ângulos. Para isso, acoplamos um transferidor de $360°$, de modo que o seu centro esteja no visor de origem, conforme a Figura 5.

Figura 5 – Visor de Paralaxe com um transferidor acoplado.



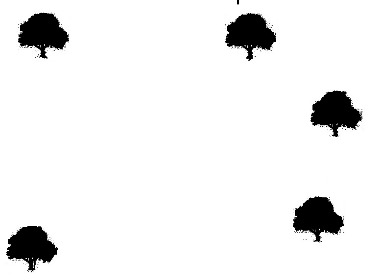
Fonte: Elaboração dos autores.

Suponha que um observador esteja num ponto O e que queira medir um ângulo $P\hat{O}Q$, em que P e Q são dois outros pontos. Para determinarmos a medida deste ângulo, devemos alinhar o visor da origem com o visor da ripa R_2 e com o ponto P. Depois o observador deve girar o transferidor de modo que o grau 0 (zero) esteja neste alinhamento. Em seguida, sem movimentar o Visor de Paralaxe, o observador deve alinhar o olhar com o visor de origem e com o ponto Q, e ver a medida no transferidor que este alinhamento determinou. Esta será a medida do ângulo $P\hat{O}Q$.

4.3 Determinar áreas

Para encerrar esta seção, apresentamos a seguinte situação problema: calcular a área delimitada por cinco árvores localizadas em uma superfície plana, conforme a Figura 6.

Figura 6 – Área delimitada por cinco árvores.

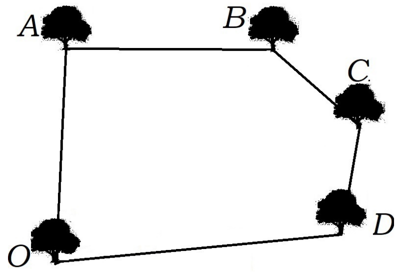


Fonte: Elaboração dos autores.

Sabemos que há diversas maneiras de solucionar este problema. Apresentaremos uma utilizando o Visor de Paralaxe.

Primeiro vamos fixar uma das árvores, a partir da qual podemos obter as medições necessárias com o Visor de Paralaxe. Esta árvore será denotada por O e as demais por A, B, C e D. Percebemos (Figura 7) que as cinco árvores formam um polígono convexo de cinco vértices.

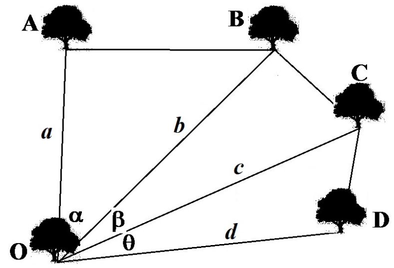
Figura 7 – Polígono das árvores.



Fonte: Elaboração dos autores.

Podemos dividir o polígono da Figura 7 em três triângulos sem pontos interiores em comum, conforme a Figura 8. Com o auxílio de um Visor de Paralaxe podemos determinar as medidas dos segmentos OA, OB, OC e OD os quais denotaremos por a, b, c e d, respectivamente. Com o transferidor acoplado ao Visor de Paralaxe, determinamos as medidas dos ângulos $\alpha = A\hat{O}B$, $\beta = B\hat{O}C$ e $\theta = C\hat{O}D$.

Figura 8 – Distâncias e ângulos entre as árvores.



Fonte: Elaboração dos autores.

A área S do polígono $OABCD$ é dada por $S = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCD}$, em que S_{OAB}, S_{OBC} e S_{OCD} são as áreas dos triângulos OAB, OBC e OCD, respectivamente. Pela Proposição 2.5,

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \text{sen}\,\alpha; \;\; S_{OBC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \text{sen}\,\beta; \;\; S_{OCD} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot d \cdot \text{sen}\,\theta.$$

Portanto, com o Visor de Paralaxe podemos estimar a área delimitada entre as cinco árvores.

A mesma ideia pode ser utilizada para estimar a área de qualquer polígono convexo, pois o procedimento é sempre o mesmo: dividir a região em triângulos sem pontos interiores em comum;

medir os lados e os ângulos necessários usando o Visor de Paralaxe; calcular as áreas dos triângulos e somá-las.

5 Comprovando a eficiência do instrumento

Conforme vimos na seção anterior, é possível utilizar o Visor de Paralaxe para determinarmos distâncias, ângulos e áreas de polígonos convexos. Nesta seção, descrevemos um atividade (experimento) que fizemos com o intuito de comprovar a eficiência do instrumento em determinar distâncias e áreas.

Em uma pista de corrida relativamente plana, construímos (com linha de pesca) um sistema cartesiano de coordenadas ortogonais (cuja unidade básica foi $1m$) e dispomos sobre ela 5 objetos que nominamos A, B, C, D e E de coordenadas $(1,2), (0,6), (4,5), (5,3)$ e $(5,1)$, respectivamente (Figura 9).

Figura 9 – Disposição dos objetos.

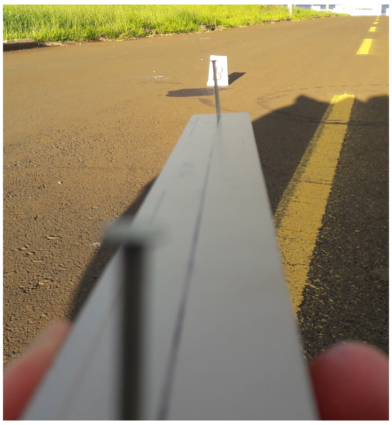
Fonte: Elaboração dos autores.

Os pontos A, B, C, D e E representam os vértices de um pentágono convexo, que decompomos na união dos triângulos ABC, ACD e ADE, os quais não tem pontos interiores em comum. A área S do pentágono $ABCDE$ é igual a soma das áreas destes triângulos que denotamos por S_{ABC}, S_{ACD} e S_{ADE}. Aplicando Teorema 2.6, obtivemos $S = S_{ABC} + S_{ACD} + S_{ADE} = 16m^2$.

A partir de agora, vamos descrever nossa experiência em determinar a mesma área usando o Visor de Paralaxe.

Iniciamos fixando o ponto A como ponto do observador e medimos os segmentos AB, AC, AD e AE usando o Visor de Paralaxe. Para medir AB, alinhamos o visor da origem do Visor de Paralaxe, com o visor da ripa R_2 e com objeto B (Figura 10).

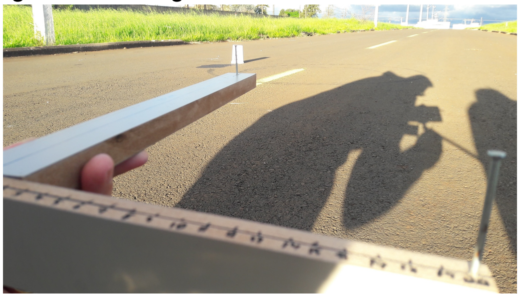
Figura 10 – Primeiro alinhamento de visores.



Fonte: Elaboração dos autores.

Em seguida, deslocamos o visor de origem um metro em linha reta para a direita do objeto A e alinhamos o visor da ripa R_2 com o objeto B (Figura 11).

Figura 11 – Segundo alinhamento de visores.



Fonte: Elaboração dos autores.

Nós observamos que a medida aproximada de $10{,}8cm$ alinhou-se com o visor da ripa R_2 e objeto B, ou seja, o valor de x é $10{,}8cm$. Substituindo o valor de x na Equação 1, temos:

$$z = \frac{40(100+x)}{x} = \frac{40(100+10,8)}{10,8} = 411cm = 4,11m.$$

Portanto, a medida de AB é aproximadamente $4,11m$.

De maneira análoga, medimos os demais segmentos e obtivemos as seguintes medidas: $\overline{AC} = 4,24m$; $\overline{AD} = 4,11m$ e $\overline{AE} = 4,11m$.

Para medir os ângulos necessários, acoplamos um transferidor conforme descrito anteriormente e obtivemos as seguintes medidas: $B\hat{A}C = 59°$, $C\hat{A}D = 31°$e $D\hat{A}E = 28°$.

Pela Proposição 2.5, as áreas dos triângulos ABC, ACD e ADE são, respectivamente, $S_{ABC} = 7,468m^2$, $S_{ACD} = 4,4875m^2$ e $S_{ADE} = 3,96516m^2$.

Logo, a área S do polígono $ABCDE$ é dada por $S = S_{ABC} + S_{ACD} + S_{ADE} = 15,92066m^2$.

Comparando este valor com área real do polígono de $16m^2$ obtido anteriormente, verificamos que o erro no cálculo da área usando o Visor de Paralaxe foi de $0,08m^2$. Desta forma, podemos concluir que apesar de ser um instrumento rudimentar, o Visor de Paralaxe mostra-se eficiente.

6 Considerações finais

As sugestões apresentadas neste estudo são alternativas de ampliar ao professor caminhos metodológicos para o ensino de Geometria Euclidiana no Ensino Médio, em especial, no contexto de distâncias, ângulos, áreas, semelhanças etc. Trata-se de apresentar uma ferramenta que possibilita a resolução de problemas cotidianos nos contextos escolares.

As possibilidades metodológicas de utilização do Visor de Paralaxe se estendem: medir a altura de uma escola ou o tronco de uma árvore sem ter que cortá-la; distribuir alguns objetos sobre uma superfície plana (quadra de esportes, por exemplo) e solicitar que os alunos calculem a área da poligonal delimitada por estes objetos; determinar a área de um canteiro ou terreno em formato de polígono convexo etc.

Nossa proposta consiste em, uma vez determinada a atividade a ser realizada, iniciá-la deixando que os alunos resolvam o problema da maneira que conseguirem. Depois, apresentar o Visor de Paralaxe, hora que pode-se introduzir a História da Matemática apresentando situações (relativas ao conteúdo) de diversas civilizações, como a egípcia. Num segundo momento, solicitar que calculem a área utilizando o instrumento; sempre solicitando os registros dos caminhos percorridos.

Em sala de aula pode-se construir o Visor de Paralaxe, por grupo ou por aluno. Também sugerimos que o professor apresente outras resoluções para o problema, utilizando os conceitos e métodos dedutivos para que se possa comparar os diversos resultados e a eficácia do equipamento.

Finalizando, importante destacar as diversas maneiras que o professor tem de utilização do Visor de Paralaxe e, é claro, as possibilidades de escolhas metodológicas, os problemas que podem ser abordados, as atividades a serem desenvolvidas, os caminhos descobertos e encontrados juntamente com seus alunos, a dinâmica de orientação e compreensão dos contextos que lhes foram apresentados.

Referências

ABRANTES, P. Investigações em Geometria em sala de aula. In: VELOSO, E.; FONSECA, H.; PONTE, J. P.; Abrantes P. (Orgs.). **Ensino da Geometria no virar do milénio**, Lisboa: Departamento de Educação da FCUL, 1999. p. 51-62.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana plana**. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

BICUDO, I. **A história da geometria euclidiana do antigo Egito às salas de aula**. Globo Ciência, 10 dez. 2011. Disponível em: http://redeglobo.globo.com/globociencia/noticia/2011/12/historia-da-geometria-euclidiana-do-antigo-egito-salas-de-aula.html. Acesso em: 03 jun. 2019.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Trad. GOMIDE, Elza F. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar**. v. 9, 8. ed. São Paulo: Atual, 2005.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an educational task**. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1973.

GERÔNIMO, J. R.; FRANCO, V. S. **Geometria plana e espacial: um estudo axiomático**. 2. ed. Maringá: Eduem, 2010.

GREENBERG, M. J. **Euclidean and non-Euclidean geome tries**: Development and history. 3. ed. New York, US: W. H. Freeman and Company, 1993.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar**. v. 7, 1. ed. São Paulo: Atual, 1978.

LOPES, L. S.; FERREIRA, A. L. A. Um olhar sobre a história nas aulas de matemática. **Abakós**, Belo Horizonte, v. 1, n. 2, p. 75-88, 2013.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática**: propostas e desafios. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História da Matemática**: propostas e desafios. Coleção Tendências em Educação Matemática. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática**, Curitiba: SEED, 2008.

PITOMBEIRA, J. B.; ROQUE, T. M. **Tópicos de História da Matemática**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SANTOS, L. M. dos. **Tópicos de história da física e da matemática**. Coleção Metodologia do ensino de Matemática e Física. v. 5. Curitiba: Ibpex, 2009.