Entropia máxima em inversões geométricas

Maximal entropy in circle inversions

Arlane Manoel Silva Vieira
Universidade Federal do Maranhão (UFMA)
Centro de Ciências Exatas e Tecnologias, São Luís, MA, Brasil
arlane@ufma.br

Lauro Mandela Silva Cruz
Universidade Federal do Maranhão (UFMA)
Centro de Ciências Exatas e Tecnologias, São Luís, MA, Brasil
lauromandela@gmail.com

Pedro Fernandes da Silva Júnior
Universidade Federal do Maranhão (UFMA)
Centro de Ciências Exatas e Tecnologias, São Luís, MA, Brasil
pedroca_fsj@hotmail.com

Vinícius Moura Silva
Universidade Federal do Maranhão (UFMA)
Centro de Ciências Exatas e Tecnologias, São Luís, MA, Brasil
silva.v.m@hotmail.com

Informações do Artigo

Histórico do Artigo
Submissão: 9 de novembro de 2017.
Aceite: 17 de janeiro de 2018.

Palavras-chave
Entropia
Inversões Geométricas
Cadeia de Markov
Sistemas Dinâmicos
Teoria Ergódica

Keywords
Entropy
Circle Inversions
Markov Chain
Dynamical Systems
Ergodic Theory

Resumo
Consideramos a dinâmica induzida por inversões em círculos e estudamos a dinâmica mensurável no atrator do sistema. Mostramos que a dinâmica induzida é metricamente equivalente a uma cadeia de Markov topológica e o *pull-back* da medida de Parry é a única medida invariante suportada no atrator com entropia métrica máxima.

Abstract
We consider the induced dynamics by circle inversions and study its measurable dynamics on the attractor. We show the induced dynamics is metrically equivalent to a topological Markov chain and pull-back of the Parry measure is the only invariant measure supported on the attractor with maximal metric entropy.

1 Introdução

Fixado um número inteiro $d \geq 3$, sejam $D_1, D_2, \ldots, D_d$ discos fechados no plano complexo dois a dois disjuntos. Para cada $j = 1, 2, \ldots, d$, seja Γ_j a fronteira geométrica de D_j, isto é, Γ_j é uma circunferência. Denotaremos a *esfera de Riemann* por $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Uma *inversão em um círculo*, também chamada de *inversão geométrica*, é uma transformação geométrica na esfera de Riemann análoga à reflexão em uma reta no plano. Mais especificamente, se $I_\Gamma : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ é a inversão geométrica na circunferência $\Gamma := \partial D(z_0, r)$ então

$$I_\Gamma(z) = z_0 + \frac{r^2}{\overline{z} - \overline{z_0}}. \tag{1}$$

Seja $\Gamma_j := \partial D_j$ e denotemos por I_j a inversão geométrica em Γ_j, para cada $j = 1, \ldots, d$. As inversões geométricas $I_1, \ldots, I_d$ induzem um sistema dinâmico natural no *espaço métrico compacto* $X_d := \cup_{j=1}^{d} D_j$ (com a métrica induzida) da seguinte forma: uma *órbita* em X_d é uma sequência $\langle x_n \rangle \in X_d^{\mathbb{N}}$, com $x_j \in X_d$ e tal que $x_{j+1} = I_i(x_j)$ para algum $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ com $i \neq j$.

Denotaremos por $O(X_d) \subset X_d^{\mathbb{N}}$ o espaço métrico compacto de todas as órbitas (com a métrica produto) em X_d. Note que $O(X_d)$ é um subespaço próprio de $X_d^{\mathbb{N}}$, uma vez que a sequência definida por $x_n = 1$ para todo $n \geq 1$, por exemplo, não é uma órbita em X_d.

Dada uma órbita $\langle x_n \rangle$ em X_d, para cada $j \geq 1$ inteiro, existe um único $s_j \in \{1, 2, \ldots, d\}$ tal que $x_j \in D_{s_j}$. A sequência $\langle s_n \rangle$ é chamada *itinerário* da órbita $\langle x_n \rangle$. Por [1, Teorema 1], todas as órbitas com o mesmo itinerário têm o *mesmo conjunto limite*. O conjunto limite de uma sequência $\langle x_n \rangle$, denotado usualmente por $\omega(\langle x_n \rangle)$, é o conjunto dos pontos de acumulação desta sequência em X_d.

Esta última condição induz uma relação de equivalência em $O(X_d)$, identificando-se todas as órbitas que possuem o mesmo itinerário. Denotaremos o *espaço quociente* por $\mathfrak{O}(X_d) := O(X_d)/\sim$, com a topologia quociente, e representaremos a classe de equivalência de uma órbita $\langle x_n \rangle$ por $[x_n]$. Neste caso, $\mathfrak{O}(X_d)$ também é compacto.

A dinâmica induzida em $\mathfrak{O}(X_d)$ é definida naturalmente por uma transformação contínua f, definida por $f([x_n]) = [x_{n+1}]$. Em [1] foi demonstrado que a *entropia topológica* de f é igual a $\log(d-1)$.

Neste artigo abordamos a existência de medidas borelianas em $\mathfrak{O}(X_d)$ invariantes por f. Nossa principal contribuição é o seguinte resultado.

Teorema 1.1. *A aplicação $f : \mathfrak{O}(X_3) \to \mathfrak{O}(X_3)$ definida por $f([x_n]) = [x_{n+1}]$, admite uma única medida μ boreliana suportada em $\mathfrak{O}(X_3)$ com entropia métrica máxima. Além disso,*

$$h_\mu(f) = \log(2).$$

Corolário 1.2. *Seja $f : \mathfrak{O}(X_3) \to \mathfrak{O}(X_3)$ a aplicação definida por $f([x_n]) = [x_{n+1}]$. Para cada $h \in (0, \log(2))$ existe um contínuo de medidas de Markov borelianas com suporte em $\mathfrak{O}(X_3)$ para as quais a entropia métrica é h.*

A principal ideia da prova do Corolário 1.2 é que a função $v \to h_v(\sigma)$ definida em (5) é infinitamente diferenciável e possui um único ponto crítico em $\mathcal{Q}_3$, cuja imagem é $\log 2$. A conclusão segue do Teorema 7.1. Mais precisamente, pode-se verificar que a superfície de nível $h_v(\sigma) = c \in (0, \log 2)$ é fechada e compacta (homeomorfa a uma esfera).

2 Preliminares

Consideremos a topologia discreta em $\{1, 2, \ldots, d\}$. Então $\Sigma_d := \{1, 2, \ldots, d\}^{\mathbb{N}}$ é um espaço topológico, com a topologia produto. A função

$$d_p(\langle r_n \rangle, \langle s_n \rangle) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|r_n - s_n|}{d^n}$$

é uma métrica em Σ_d e induz a mesma topologia produto.

Em [1, 2] foi demonstrado que a aplicação $\Psi : X_d^{\mathbb{N}} \to \Sigma_d$ definida por $\Psi(\langle x_n \rangle) = \langle s_n \rangle$ é contínua e sobrejetora, mas não é injetora, onde $\langle s_n \rangle$ é caracterizada pela relação $x_n \in D_{s_n}$.

Seja $A_d = (a_{ij})$ a matriz de transição quadrada de ordem d tal que $a_{ij} = 1 - \delta_{ij}$ para $1 \leq i, j \leq d$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, isto é, dada uma sequência $\langle x_n \rangle$ em $X_d^{\mathbb{N}}$ então $\langle x_n \rangle \in O(X_d)$ se, e somente se, $a_{x_n x_{n+1}} = 1$ para todo $n \geq 1$. Denotaremos por Σ_{A_d} o subconjunto de todas as sequências $\langle s_n \rangle$ em Σ_d que satisfazem a condição $a_{s_n s_{n+1}} = 1$ para todo $n \geq 1$. Com a métrica relativa, Σ_{A_d} é um espaço métrico compacto.

Em [1], os autores provaram que a aplicação $\psi : \mathfrak{O}(X_d) \to \Sigma_{A_d}$ definida por $\psi([x_n]) = \langle s_n \rangle$ é um homemorfismo, quando $d \geq 3$.

Por abuso de linguagem, usaremos d_p para indicar a métrica relativa em Σ_{A_d}. Dessa forma, ψ induz naturalmente uma métrica em $\mathfrak{O}(X_d)$, a chamada métrica *pull-back* $\overline{d} := \psi^* d_p$, definida por

$$\overline{d}([x_n],[y_n]) = d_p(\psi(\langle x_n\rangle), \psi(\langle y_n\rangle)).$$

Como ψ é um homeomorfismo, $\overline{d}$ induz a topologia quociente em $\mathfrak{O}(X_d)$ e portanto, $\mathfrak{O}(X_d)$ e Σ_{A_d} são espaços métricos compactos isométricos.

Uma matriz quadrada qualquer $B = (b_{ij})$ é dita *primitiva* quando, para cada (i,j) existir $n := n(i,j) \geq 1$ inteiro tal que $b_{ij}^{(n)} > 0$. A notação $b_{ij}^{(n)}$ indica o elemento (i,j) da matriz B^n. Diz-se que B é *regular* se possuir alguma potência com todas as entradas positivas.

Portanto, a matriz de transição A_d é *primitiva* (para $d \geq 3$) e, consequentemente, sabe-se que existe uma única medida de Markov invariante pelo deslocamento $\sigma_d : \Sigma_d \to \Sigma_d$, definido por $\sigma_d(\langle s_n\rangle) = \langle s_{n+1}\rangle$, com suporte em Σ_{A_d}, cuja *entropia métrica* é maximal. Esta medida boreliana é chamada *medida de Parry*.

3 Matriz Estocástica

Sejam $\mathcal{Q}_d$ o interior do cubo d-dimensional unitário $[0,1]^d$ e $\mathcal{P}_d$ a coleção de todas as *matrizes estocásticas* compatíveis com a matriz de transição A_d. Então $P \in \mathcal{P}_3$ se, e somente se, existe $(a,b,c) \in \mathcal{Q}_3$ tal que

$$P = \begin{bmatrix} 0 & a & 1-a \\ b & 0 & 1-b \\ c & 1-c & 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

A aplicação $\mathcal{Q}_3 \ni v \mapsto P_v \in \mathcal{P}_3$ é bijetora e induz uma isometria entre os espaços $\mathcal{P}_3$ e $\mathcal{Q}_3$, com as correspondentes topologias relativas. Escrevendo $P = (p_{ij}) \in \mathcal{P}_3$, o elemento p_{ij} representa a probabilidade de $x_{n+1} \in D_j$ sabendo que $x_n \in D_i$, para qualquer órbita $\langle x_n\rangle$. Em razão desta interpretação, dizemos que P é uma matriz de *probabilidades de transição*.

Prova. *Se $P \in \mathcal{P}_3$ então P^2 é positiva.*

Demonstração. Dado $P \in \mathcal{P}_3$ da forma (2), obtemos diretamente

$$P^2 = \begin{bmatrix} ab-ac+c & -a+ac-c+1 & a-ab \\ -bc+c & ab-b+bc-c+1 & b-ab \\ b-bc & ac & -b-ac+bc+1 \end{bmatrix}.$$

Note que $p_{11}^{(2)} = ab+c(1-a)$, $p_{12}^{(2)} = (1-c)(1-a)$, $p_{13}^{(2)} = a(1-b)$, $p_{21}^{(2)} = c(1-b)$, $p_{22}^{(2)} = ab+(1-c)(1-b)$, $p_{23}^{(2)} = b(1-a)$, $p_{31}^{(2)} = b(1-c)$ e $p_{32}^{(2)} = ac$ são positivos, uma vez que $a, b, c \in (0, 1)$.

Para concluir a demonstração, resta verificar que $p_{33}^{(2)} = -b - ac + bc + 1$ também é positivo. E para tanto, é suficiente provar que o valor mínimo de $f(a, b, c) := -b - ac + bc + 1$, restrito ao cubo aberto $\mathcal{Q}_3$, é positivo. Como $\partial_a f(a, b, c) = -c$, $\partial_b f(a, b, c) = c - 1$ e $\partial_c f(a, b, c) = b - a$ segue-se que f não possui pontos críticos em $\mathcal{Q}_3$, e portanto, o mínimo absoluto é atingido na fronteira desse cubo. Dessa forma, devemos analisar o comportamento de f em cada uma das faces do cubo.

PARTE 1. Observe que $f(0, b, c) = bc+(1-b)$, $f(a, 0, c) = 1-ac$ e $f(a, b, 0) = 1-b$ são não-negativos para quaisquer $a, b, c \in [0, 1]$. Além disso, são pontos de mínimo $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ e $(a, 1, 0)$ para todo $a \in [0, 1]$.

PARTE 2. Da mesma forma, os números $f(1, b, c) = (1-b)(1-c)$, $f(a, 1, c) = (1-a)c$ e $f(a, b, 1) = 1-a$ também são não-negativos para quaisquer $a, b, c \in [0, 1]$. Assim, obtemos os seguintes pontos de mínimo: $(1, b, 1)$, $(1, 1, c)$, $(a, 1, 0)$ e $(1, b, 1)$ para quaisquer $a, b, c \in [0, 1]$.

Isto prova que o valor mínimo absoluto de f é igual 0 e esse valor é atingido apenas na fronteira do cubo. Logo, $f(a, b, c)$ é positivo para todo $(a, b, c) \in \mathcal{Q}_3$. $\square$

Em particular, temos o

Corolário 3.1. *Qualquer matriz estocástica $P \in \mathcal{P}_3$ é primitiva e regular.*

4 Vetor de Estado Estacionário

O *vetor de estado estacionário* de uma matriz estocástica $P \in \mathcal{P}_3$ é um vetor de probabilidades $q := (q_1, q_2, q_3)$ no conjunto de estados $\{1, 2, 3\}$ tal que

$$P^t \cdot q = q \quad \text{e} \quad q_1 + q_2 + q_3 = 1.$$

Considere a função diferenciável $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x, y, z) = y(1 - x - z) + xz + 2.$$

Note que $g(x, y, z)$ é positivo sempre que $(x, y, z) \in \mathcal{Q}_3$.

Proposição 4.1. *Se $P \in \mathcal{P}_3$ então as coordenadas do vetor de estado estacionário são*

$$q_1 = \frac{b - bc + c}{g(a, b, c)}, \quad q_2 = \frac{1 - c + ac}{g(a, b, c)} \quad \text{e} \quad q_3 = \frac{1 - ab}{g(a, b, c)}. \tag{3}$$

Em particular, o vetor de probabilidades é (estritamente) positivo.

Proposição 4.2. *Dada uma matriz P da forma (2), considere a equação $P^t \cdot q = q$ na variável $q := (q_1, q_2, q_3)$, tal equação pode ser reescrita na forma $(P^t - I) \cdot q = 0$, onde I é a matriz identidade da ordem de P, logo,*

$$\begin{bmatrix} -1 & b & c \\ a & -1 & 1-c \\ 1-a & 1-b & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por escalonamento, essa equação é equivalente ao sistema linear homogêneo

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -q_1 & + & bq_2 & + & cq_3 & = & 0 \\ & - & (1-ab)q_2 & + & (1+ac-c)q_3 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Como as coordenadas do vetor q satisfazem a relação adicional $q_1 + q_2 + q_3 = 1$, por ser um vetor de probabilidades, resolvemos este novo sistema linear homogêneo e obtemos as identidades em (3).

5 Medidas de Markov

Dado $v := (a, b, c) \in \mathcal{Q}_3$, sejam $P_v = (p_{ij}) \in \mathcal{P}_3$ a matriz estocástica associada, definida em (2), e $q_v = (q_1, q_2, q_3)$ o vetor de estado estacionário de P_v. Considere o espaço Σ_{A_3} correspondente. Então existe uma única medida de Markov μ_v de probabilidade na σ-álgebra de Borel em Σ_3 invariante pelo deslocamento σ tal que (veja [3, Teorema A.2.13])

$$\mu_v([m; a_m, \ldots, a_n]) = q_{a_m} p_{a_m, a_{m+1}} \cdots p_{a_{n-1}, a_n}.$$

Por definição, $[m; a_m, \ldots, a_n]$ é o cilindro $\{\langle s_j \rangle \in \Sigma_3; s_m = a_m, \ldots, s_n = a_n\}$.

Como P é uma matriz estocástica primitiva, pelo Corolário 3.1, segue-se que o sistema dinâmico (μ_v, σ) é ergódico ([3, Teorema 7.2.8]) e, além disso, a medida μ_v está suportada em Σ_{A_3} ([3, Lema 7.2.5]). Uma consequência importante da ergocidade é a seguinte relação:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} p_{ij}^{(n)} = q_j$$

para cada $i, j = 1, \ldots, p$. Como P é regular, sabe-se ainda que (μ_v, σ) é um sistema misturador ([3, Teorema 7.2.11]).

Para simplificar a notação, escreveremos $h_v(\sigma) := h_{\mu_v}(\sigma)$ para indicar a entropia métrica de σ em relação à medida μ_v. Neste caso, por [4, Theorem 4.27],

$$h_v(\sigma) = -\sum_{i,j=1}^{3} q_i p_{ij} \log(p_{ij}). \tag{4}$$

Com a convenção $0\log(0) = 0$, a função $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(t) = t\log(t)$ é contínua e real-analítica em $(0,1)$. Com essa notacão temos a seguinte

Prova. *Se* $v = (a,b,c) \in \mathcal{Q}_3$ *então*

$$\begin{aligned} -h_v(\sigma)g(a,b,c) &= (b - bc + c)[\varphi(a) + \varphi(1-a)] + \\ &+ (1 - c + ac)[\varphi(b) + \varphi(1-b)] + \\ &+ (1 - ab)[\varphi(c) + \varphi(1-c)]. \end{aligned} \tag{5}$$

Em particular, a função $\mathcal{Q}_3 \ni v \mapsto h_v(\sigma) \in \mathbb{R}$ *é infinitamente diferenciável.*

6 A Medida de Parry

Uma medida de probabilidade boreliana muito importante em Σ_d e com suporte em Σ_{A_d} é a chamada *medida de Parry*. Essa medida é construída da seguinte forma. Seja λ o maior autovalor da matriz A_d, dado pelo Teorema de Perron-Frobenius ([5, Theorem 0.16]). Como A_d é primitiva, λ é uma raiz simples do polinômio característico de A_d e existem dois autovetores unitários positivos $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_d)$ (à esquerda) e $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d)$ (à direita) associados à λ, isto é, $\mathbf{l} \cdot A_d = \lambda \mathbf{l}$ e $A_d \cdot \mathbf{r} = \lambda \mathbf{r}$, tais que $\sum_{j=1}^{d} l_j r_j = 1$.

A medida de Parry μ_d é definida para a escolha $q_j = l_j r_j$ e $p_{ij} = a_{ij} r_j / \lambda r_i$, com $A_d = (a_{ij})$ e $i,j = 1, \dots, d$. Em [1] foi demonstrado que $\lambda = d - 1$ e por verificação direta obtemos

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} = \frac{1}{\sqrt{d}}(1, 1, \dots, 1),$$

de onde-se conclui-se que $q_j = 1/d$, $p_{ii} = 0$ e $p_{ij} = \dfrac{1}{d-1}$ para $i \neq j$. Logo, por [4, Theorem 4.27],

$$h_{\mu_d}(\sigma) = \log(d-1) = h_{top}(\sigma).$$

Pelo Princípio Variacional [4, Theorem 8.6] o supremo das entropias métricas coincide com a entropia topológica do sistema. Com essa discussão, concluímos que a medida de Parry é uma medida que atinge o supremo e portanto, maximiza a função entropia em relação às medidas invariantes. Uma medida de probabilidade invariante com essa propriedade é chamada *medida maximal* ou *medida com entropia máxima*.

Teorema 6.1. *A medida de Parry é a única medida de Markov máxima em* Σ_3 *invariante por* σ *com suporte em* Σ_{A_3}.

Este resultado já é conhecido em condições mais gerais (veja [5, Corollary 20.1.5]), entretanto, apresentaremos uma prova completa e elementar usando Cálculo Diferencial.

Prova do Teorema 6.1. Pela Proposição 5, a função $\mathcal{Q} \ni v \mapsto h_v := h_v(\sigma)$ é infinitamente diferenciável. Logo, qualquer ponto de máximo relativo dessa função é uma raiz do gradiente ∇h_v.

A equação $\partial_a h_v = 0$ é equivalente à relação

$$(-2-c+bc)\ln(1-a)+(1+b+c-bc)\ln(1-b)+(-1-b+c+bc)\ln(1-c)=$$
$$(2+b-bc)\ln(a)+b(1+c)\ln(b)-c(1+b)\ln(c). \tag{6}$$

Já $\partial_b h_v = 0$ é equivalente à relação

$$(2-2a-2c+ac)\ln(1-a)+(a+c-ac-3)\ln(1-b)+(ac+c-a-1)\ln(1-c)=$$
$$a(2-c)\ln(a)+(2-ac)\ln(b)-c(a+1)\ln(c). \tag{7}$$

e $\partial_c h_v = 0$ equivale à relação

$$(2-2a-b+ab)\ln(1-a)+(a+2b-ab-2)\ln(1-b)+(ab-a-2)\ln(1-c)=$$
$$a(2-b)\ln(a)+b(a-2)\ln(b)+(b+2-ab)\ln(c). \tag{8}$$

Das equações (6), (7) e (8) concluímos que $\nabla h_v = 0$ se, e somente se, (a,b,c) é solução do sistema

$$\mathcal{S}:\begin{cases}\ln(1-a) &= \ln(a) &+ \ln(b) &- \ln(c)\\ \ln(1-b) &= \frac{1}{2}\ln(a) &+ \frac{3}{2}\ln(b) &- \ln(c)\\ \ln(1-c) &= \frac{1}{2}\ln(a) &- \frac{1}{2}\ln(b) &+ \ln(c)\end{cases}.$$

Como a função $x \mapsto \ln(x)$ é injetora, o sistema $\mathcal{S}$ é equivalente a

$$\begin{cases}1-a = ab/c\\ 1-b = b\sqrt{ab}/c\\ 1-c = c\sqrt{a/b}\end{cases}$$

cuja solução é $a=b=c=1/2$. Logo $v=(1/2,1/2,1/2)$ é o único ponto crítico de $h_v(\sigma)$ no cubo $\mathcal{Q}_3$. A natureza desse ponto crítico pode ser determinada analisando-se a matriz hessiana de h_v para $v=(1/2,1/2,1/2)$:

$$\text{Hess}(h_v) := \begin{bmatrix}\partial_{aa}h_v & \partial_{ab}h_v & \partial_{ac}h_v\\ \partial_{ba}h_v & \partial_{bb}h_v & \partial_{bc}h_v\\ \partial_{ca}h_v & \partial_{cb}h_v & \partial_{cc}h_v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{-4}{3\ln(10)} & 0 & 0\\ 0 & \frac{-4}{3\ln(10)} & 0\\ 0 & 0 & \frac{-4}{3\ln(10)}\end{bmatrix}.$$

Todos os autovalores de Hess(h_v) são negativos para $v = (1/2, 1/2, 1/2)$, e portanto, segue-se de [6, Theorem 9.6] que h_v tem um valor máximo local em v. Dessa forma, concluímos que este v é o único ponto de máximo global de h_v em $\mathcal{Q}_3$. Para este valor, μ_v é a medida de Parry em Σ_3 com suporte em Σ_{A_3}. $\square$

7 Prova do Teorema 1.1

Seja $\psi : \mathfrak{O}(X_3) \to \Sigma_{A_3}$ a aplicação definida por $\psi([x_n]) = \langle s_n \rangle$, onde $\langle s_n \rangle$ é o itinerário de qualquer órbita na mesma classe de $\langle x_n \rangle \in O(X_3)$. Em [1, Lema 6.3], os autores demonstraram que ψ é um *homeomorfismo* que conjuga a aplicação f, do Teorema 1.1, e o deslocamento de Bernoulli σ_3. Dessa forma, para demonstrar o Teorema 1.1, é suficiente provar o

Teorema 7.1. *A aplicação ψ é um isomorfismo métrico.*

De fato, é um resultado clássico que a entropia métrica é invariante por isomorfismo métrico. A conclusão segue, então, do Teorema 6.1.

Se μ é uma medida de probabilidade boreliana em $\mathfrak{O}(X_3)$ e invariante por f então existe um único $v \in \mathcal{Q}_3$ tal que $\mu = \psi^* \mu_v$, ou seja, μ é simplesmente a medida *pull-back* de alguma μ_v em relação à ψ. Portanto, dado um boreliano $B \subseteq \mathfrak{O}(X_3)$ tem-se $\mu(B) = \mu_v(\psi(B))$. Em particular, μ é ergódica e misturadora.

Demonstração do Teorema 7.1. Pela discussão acima, ψ é uma aplicação mensurável (por continuidade) bijetora e que preserva as medidas. Como μ_v é suportada em Σ_{A_3}, para todo $v \in \mathcal{Q}_3$, e é invariante por σ_3, segue-se que ψ é um isomorfismo métrico. $\square$

8 Considerações Finais

Neste artigo analisamos a matriz estocástica associada às inversões em círculos, além disso, mostramos não só que medidas invariantes induzem qualquer entropia métrica no intervalo $(0, \log(2)]$, no caso $d = 3$, como calculamos diretamente a entropia máxima. Demonstramos sua unicidade e verificamos que a medida de Parry maximiza a entropia da dinâmica induzida.

Futuramente, abordaremos aspectos como a geometria diferencial das superfícies de nível induzidas pela função entropia em relação aos parâmetros, bem como a medida de Lebesgue dessas superfícies e a dimensão de Hausdorff do atrator da dinâmica.

Referências

[1] VIEIRA, A.; MANDELA, L.; FERNANDES, P.; MOURA, V. Geometria Plana, Cadeia de Markov e Caos. In: SIMPÓSIO DE MATEMÁTICA E MATEMÁTICA INDUSTRIAL (SIMMI), 7., 2016, Catalão. **Anais...**. Catalão: IMTec/UFG/RC, 2016. p. 37-48.

[2] VIEIRA, A.; MANDELA, L.; FERNANDES, P.; MOURA, V. Geometria Plana, Cadeia de Markov e Caos, **CQD: Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 11, dez. 2017 (no prelo).

[3] VIANA, M.; OLIVEIRA, K. **Fundamentos de Teoria Ergódica**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[4] WALTERS, P. **An introduction to Ergodic Theory**. New York: Springer-Verlag, 2000.

[5] KATOK, A.; HASSELBLATT, B. **Introduction to the modern theory of dynamical systems**. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 54).

[6] APOSTOL, T. M. **Calculus**. v. 2. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1969.