

A epifania da Divina Proporção na determinação do centroide de figuras delimitadas por circunferências

The epiphany of Divine Proportion in determining the centroid of figures delimited by circumferences

Maurício Chiarello
Universidade de Franca (UNIFRAN), Departamento de Engenharia, Franca, SP, Brasil
mauricio.chiarello@gmail.com

Informações do Artigo



Histórico do Artigo

Submissão: 28 de agosto de 2017.
Aceite: 29 de setembro de 2017.

Palavras-chave

Figuras circulares
Centro geométrico
Proporção áurea
Equilíbrio

Keywords

Circular figures
Geometric center
Golden ratio
Balance

Resumo

Este trabalho empreende um estudo da posição do centro geométrico de figuras planas delimitadas por circunferências de raios distintos em um caso específico: aquele em que as circunferências são tangentes entre si por um ponto qualquer. Mostra-se que, quando a razão entre os raios das duas circunferências obedece à proporção áurea, o centro geométrico da figura põe-se exatamente sobre a circunferência interna, o que realça a sensação de equilíbrio relativo ao momento geométrico da figura. Neste sentido, o trabalho pode ser visto como uma contribuição na investigação da presença da proporção áurea em figuras delimitadas por circunferências. Assim, pode também ser visto como uma contribuição de análise matemática voltada para o *design* de figuras circulares, segundo as belas formas, aquelas cuja contemplação nos causa uma sensação de equilíbrio, perfeição e harmonia.

Abstract

This paper undertakes a study of the position of the geometric center of plane figures delimited by circumferences of distinct radius in a specific case: one in which the circumferences are tangent to each other by any point. It is shown that when the ratio between the radii of the two circumferences obeys the golden ratio, the geometric center of the figure is placed exactly on the inner circumference, which emphasizes the sensation of equilibrium relative to the geometrical moment of the figure. In this sense, the study can be seen as a contribution for the investigation of the presence of the golden ratio in figures delimited by circumferences. So, it can also be seen as a contribution of mathematical analysis to the design of circular figures according to the beautiful forms, those forms whose contemplation causes us a sense of balance, perfection and harmony.

*À la mémoire d'un temps où la beauté
de la forme était encore une vertu.*

1. À Guisa de Introdução

Por vezes, parte-se em busca de algo que não aparenta possuir um valor muito especial, ao menos a princípio e por si só; no entanto, em razão de sua busca, acaba-se encontrando, incidentalmente, em seu lugar, algo de imenso valor. Trata-se de um achado feito de modo inesperado e surpreendente, sem que se tivesse a intenção deliberada de realizá-lo. Para um acontecimento dessa natureza, a língua inglesa possui uma palavra específica, *serendipity*, aportuguesada como serendipidade, mas de uso pouco comum em nossa língua. O achado que será relatado a seguir, feito a partir da resolução de um problema relacionado à localização do

centro geométrico de figuras planas delimitadas por circunferências, possui justamente a natureza da serendipidade. O problema que levou a esse achado consiste na determinação do centroide de figuras planas compreendidas entre circunferências de raios distintos e tangentes entre si por um ponto qualquer. Quanto à descoberta propriamente dita, ela diz respeito à presença do número Φ , também conhecido como número da divina proporção¹, na relação entre os raios das circunferências para que o centroide da figura se ponha em um ponto preciso, como será explicado mais adiante. Não havendo notícia dessa descoberta na literatura sobre o tema, esta contribuição se afigura original.

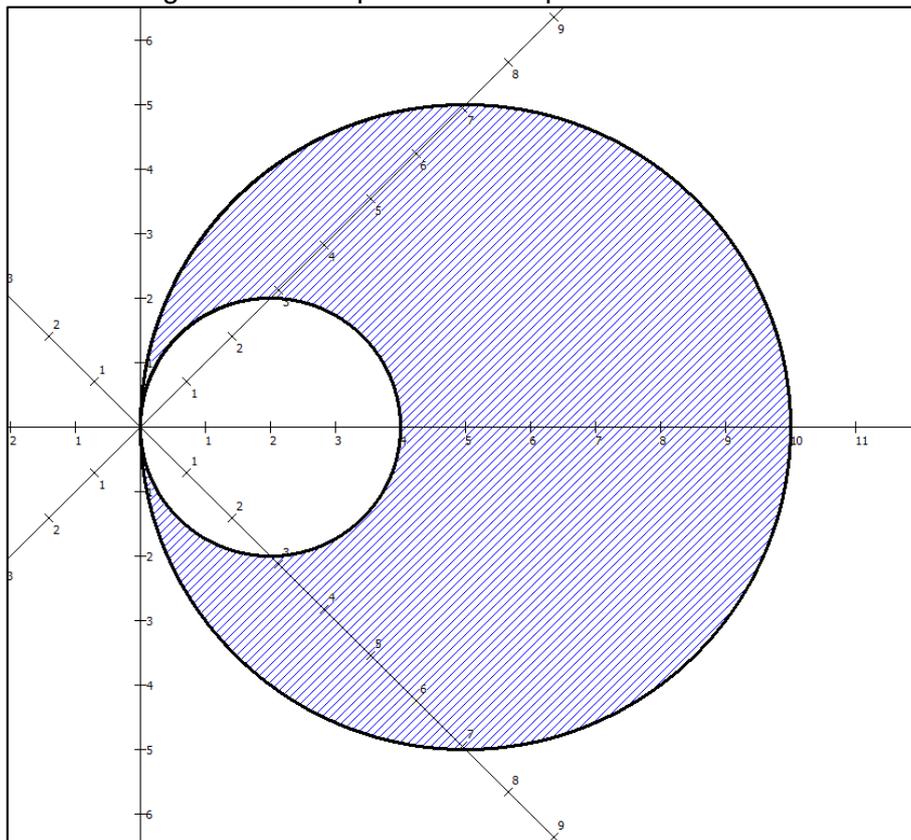
A exposição que será feita adiante poderia ser resumida do seguinte modo. Logo de início, o problema relativo à posição do centroide para a configuração proposta é formulado. Em seguida, sua solução é obtida de modo analítico, recorrendo ao cálculo da integral dupla apropriada. Uma vez encontrada a expressão para a localização do centroide, empreende-se uma análise de sua variação. Em uma segunda etapa, demonstra-se que a imposição de que o centroide venha a se colocar precisamente sobre a circunferência interna da figura exige que as circunferências guardem entre si a proporção áurea. Por fim, mostra-se que, para uma configuração análoga do problema no espaço tridimensional, isto é, no caso do sólido delimitado por duas esferas tangentes entre si em um ponto qualquer, a mesma imposição não leva à exigência de que os raios das esferas guardem a proporção áurea, como se dá no caso bidimensional.

2. Apresentação do Problema

Considere-se, inicialmente, uma circunferência de raio R cujo centro está sobre o eixo x em $x = R$, sendo, portanto, tangente ao eixo y na origem do plano cartesiano. A equação analítica dessa circunferência é: $(x - R)^2 + y^2 = R^2$. Considere-se agora uma outra circunferência de raio r menor que a anterior ($r < R$) cujo centro também se encontra sobre o eixo x , mas em $x = r$, sendo igualmente tangente ao eixo y na origem. Assim, sua equação analítica será: $(x - r)^2 + y^2 = r^2$. Seja, então, o seguinte problema: determinar o centro geométrico da figura plana compreendida entre essas duas circunferências. A Figura 1 ilustra a configuração proposta para o caso particular em $R = 5$ e $r = 2$; a região delimitada pelas circunferências aparece hachurada.

¹ Sobre esta constante fascinante, o número de ouro ou da divina proporção, e de seu importante papel na história da matemática, há uma vultosa bibliografia disponível. Em especial, poder-se-ia recomendar ao leitor os seguintes estudos: **Razão áurea: A história de Fi, um número surpreendente** (LIVIO, 2006); **A divina proporção** (HUNTLEY, 1985); **A mathematical history of the golden number** (Herz-Fischler, 1998); **The glorious golden ratio** (POSAMENTIER; LEHMANN, 2012).

Figura 1 – Caso particular em que $R = 5$ e $r = 2$.



Fonte: Elaboração do autor.

Pela simetria apresentada na Figura 1, é possível concluir que o centro geométrico procurado localiza-se necessariamente sobre o eixo x . Deste modo, o problema reduz-se a determinar a abscissa \bar{x} do centro geométrico. Como se sabe, esse cálculo pode ser realizado por meio da resolução da seguinte expressão envolvendo uma integral dupla

$$\bar{x} = \frac{1}{S} \iint_R x \, dx \, dy \tag{1}$$

onde a região de integração R é a figura delimitada pelas duas circunferências e $S = \pi(R^2 - r^2)$ é a área dessa figura².

O cálculo da integral dupla $I_2 = \iint_R x \, dx \, dy$ simplifica-se consideravelmente se promovemos uma mudança de variável para coordenadas polares. Para tanto, toma-se $x = \rho \cos \theta$,

² O cálculo analítico do centroide de figuras planas é uma das mais conhecidas aplicações das integrais duplas. A demonstração da fórmula aqui empregada, resultante do cálculo do momento geométrico total da figura a partir da integração dos infinitos momentos produzidos pelos elementos de área que compõem a figura, pode ser encontrada em praticamente todos os livros de Cálculo Diferencial e Integral. Ao leitor interessado, recomenda-se especialmente o capítulo 15 do segundo volume de Stewart (2009), notadamente a secção 15.5. Também o capítulo 12 do segundo volume de Thomas (2002) pode ser consultado com proveito. Nessas obras, o leitor também encontrará a explicação para a integração em coordenadas polares realizada a seguir.

com $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Notando que, para uma determinada inclinação angular θ , a distância radial ρ deve variar de $\rho_1 = 2r \cos \theta$ até $\rho_2 = 2R \cos \theta$, e lembrando que o jacobiano J da transformação para coordenadas polares é dado por $J = \rho$, deve-se escrever que:

$$I_2 = \iint_R x \, dx dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} (\rho \cos \theta)(\rho) \, d\rho d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \int_{2r \cos \theta}^{2R \cos \theta} (\rho^2 \cos \theta) \, d\rho d\theta$$

onde se preferiu, dada a simetria da figura, integrar apenas sobre a região compreendida no primeiro quadrante (fazendo $0 \leq \theta \leq \pi/2$) e depois duplicar o resultado. A resolução da última integral é apresentada, sucintamente, a seguir:

$$I_2 = \frac{2^4}{3} (R^3 - r^3) \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta \, d\theta = \frac{2^4}{3} (R^3 - r^3) \left(\frac{3\pi}{2^4} \right) \Rightarrow$$

$$I_2 = \pi(R^3 - r^3) \quad (2)$$

Na resolução acima, empregou-se, por brevidade, o resultado da seguinte integral definida:

$\int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta \, d\theta = \frac{3\pi}{2^4}$, cujo cálculo está disposto abaixo:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta \, d\theta &= \frac{1}{2^2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta)^2 \, d\theta \\ &= \frac{1}{2^2} \int_0^{\pi/2} (1 + 2 \cos 2\theta + \cos^2 2\theta) \, d\theta \\ &= \frac{1}{2^2} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{3}{2} + 2 \cos 2\theta + \frac{1}{2} \cos 4\theta \right) \, d\theta = \frac{1}{2^2} \int_0^{\pi/2} \frac{3}{2} \, d\theta = \frac{3\pi}{2^4} \end{aligned}$$

Nesse cálculo, admitiu-se saber serem nulas as seguintes integrais:

$$\int_0^{\pi/2} \cos 2\theta \, d\theta = 0 \text{ e } \int_0^{\pi/2} \cos 4\theta \, d\theta = 0.$$

Empregando agora em (1) o valor de I_2 , presente em (2), pode-se determinar a abscissa \bar{x} do centro geométrico, como segue:

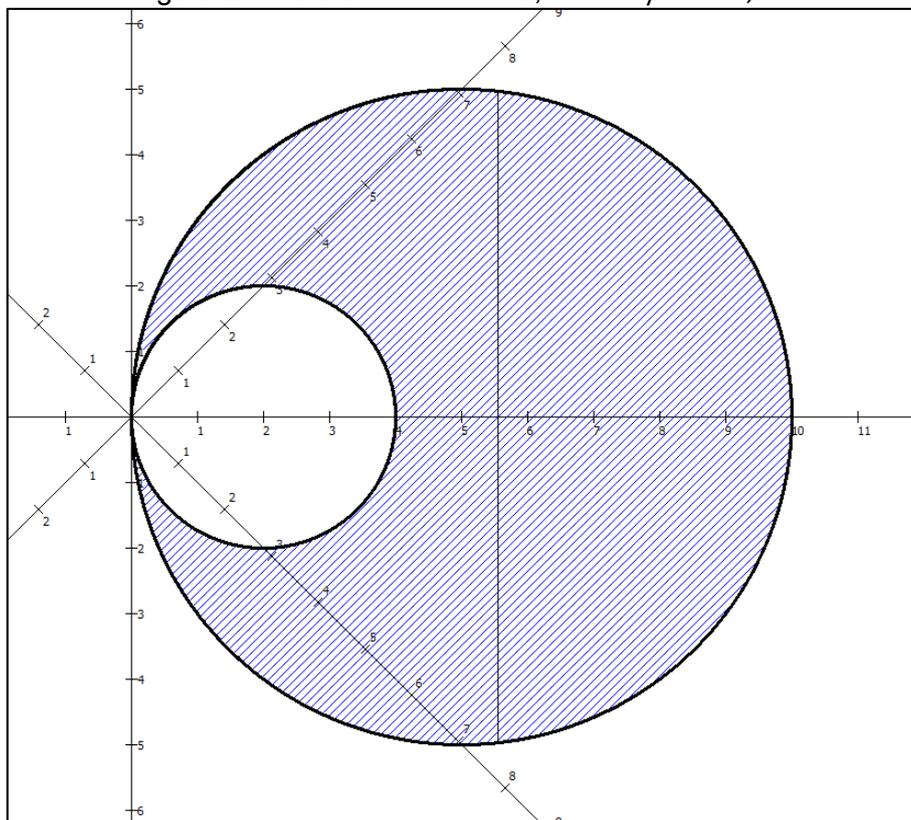
$$\bar{x} = \frac{1}{S} \iint_R x \, dx dy = \frac{1}{S} I_2 = \frac{1}{\pi(R^2 - r^2)} \pi(R^3 - r^3) = \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$$

Conclui-se, portanto, que a abscissa \bar{x} do centro geométrico é dada por:

$$\bar{x} = \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} = \frac{R^2 + Rr + r^2}{R + r} \quad (3)$$

Assim, por exemplo, para o caso particular da Figura 1 em que $R = 5$ e $r = 2$, representado anteriormente, é possível determinar, empregando a expressão (3), que a coordenada \bar{x} do centro geométrico é $\bar{x} = 39/7 \cong 5,57$. Na Figura 2 indica-se a posição do centroide calculado fazendo passar por ele uma linha vertical.

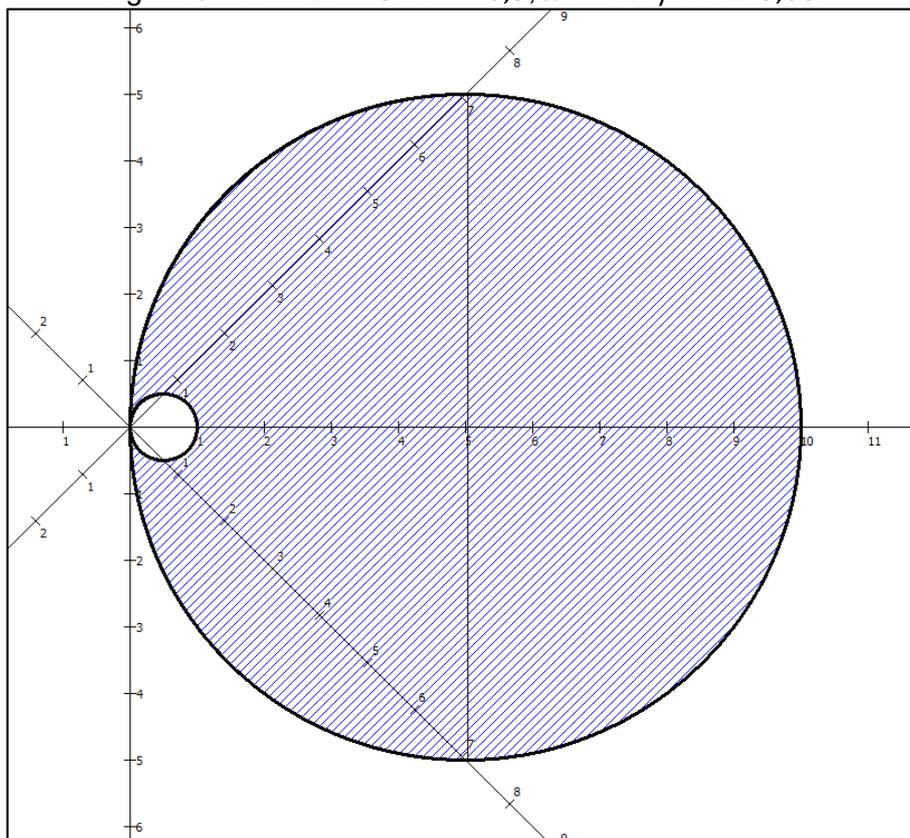
Figura 2 – Para $R = 5$ e $r = 2$, $\bar{x} = 39/7 \cong 5,57$.



Fonte: Elaboração do autor.

3. Sobre o Intervalo de Variação do Centroide

A análise do resultado (3) permite obter algumas conclusões interessantes sobre o comportamento do centro geométrico da figura delimitada pelas duas circunferências. Caso se imagine que o raio R da circunferência externa se mantenha fixo e que o raio r da circunferência interna possa variar no intervalo de zero a R , isto é, $0 < r < R$, não é difícil concluir que, conforme aumenta o valor de r , o centro geométrico \bar{x} da figura desloca-se concomitantemente para a direita. No caso inicial, em que r é quase nulo, a figura é praticamente um círculo de raio R , cujo centro geométrico coincide com seu centro ($\bar{x} = R$). Quando o valor de r cresce um pouco, mas ainda é pequeno relativamente a R , e o centro geométrico desloca-se ligeiramente à direita de $x = R$, conforme ilustrado na Figura 3.

Figura 3 – Para $R = 5$ e $r = 0,5$, $\bar{x} = 111/22 \cong 5,05$.

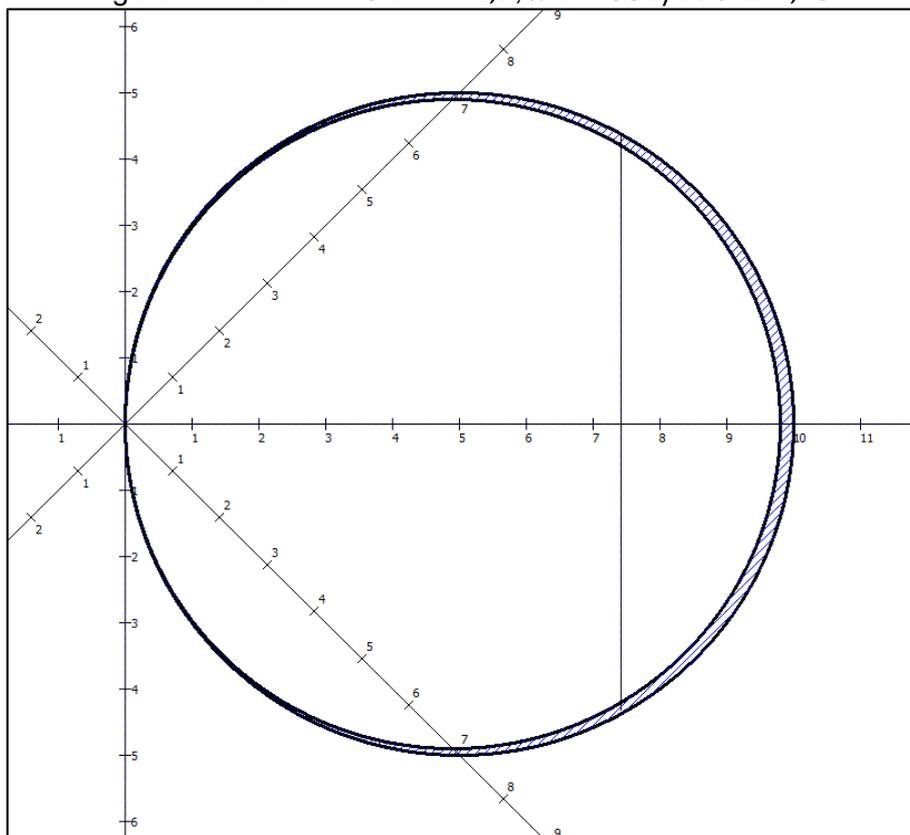
Fonte: Elaboração do autor.

No entanto, quanto mais aumenta o valor de r , mais para a direita se desloca o centro geométrico. Deste modo, a questão que ocorre naturalmente é: para que valor tende o centro geométrico da figura quando o raio r da circunferência interna aumenta consideravelmente, a ponto de ficar bastante próximo do valor de R ? A resposta a essa pergunta exige o cálculo de um limite, qual seja o $\lim_{r \rightarrow R} \bar{x}$, realizado a seguir:

$$\lim_{r \rightarrow R} \bar{x} = \lim_{r \rightarrow R} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} = \lim_{r \rightarrow R} \frac{R^2 + Rr + r^2}{R + r} = \frac{3}{2}R$$

O resultado acima, que não deixa de ser surpreendente, mostra que o limite extremo para o deslocamento do centro geométrico \bar{x} corresponde a $3/2$ de R (e não a $2R$, como se poderia supor). Conseqüentemente, quando o raio r da circunferência interna varia no intervalo $0 < r < R$, o centro geométrico da figura compreendida entre as circunferências excursiona no intervalo $R < \bar{x} < \frac{3}{2}R$. Na Figura 4, este resultado procura ser ilustrado por meio de uma figura cujo raio da circunferência interna ($r = 4,9$) é bastante próximo do raio da externa ($R = 5$). Nesse caso, o centro geométrico situa-se em $\bar{x} \cong 7,43$, um valor que se aproxima do valor limite, correspondente a $\frac{3}{2}R = \frac{15}{2} = 7,5$.

Figura 4 – Para $R = 5$ e $r = 4,9$, $\bar{x} = 7351/990 \cong 7,43$.



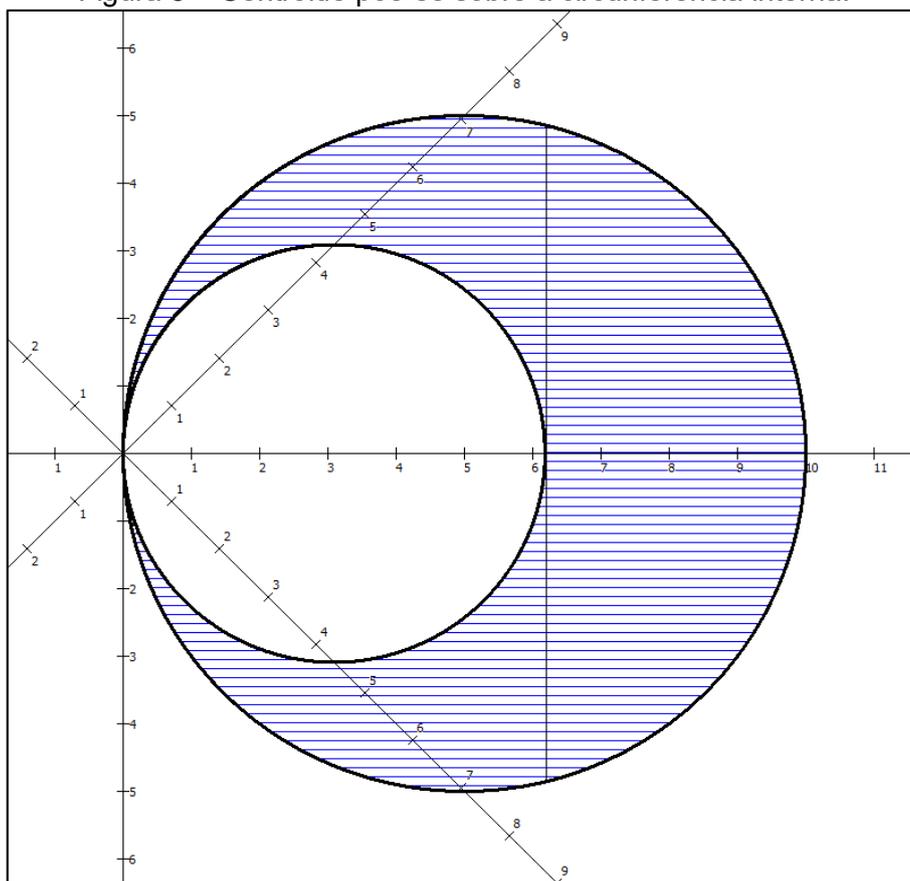
Fonte: Elaboração do autor.

4. A Epifania da Divina Proporção

Considere-se agora a mesma figura plana anterior, compreendida entre as duas circunferências tangentes ao eixo y na origem do plano cartesiano, cujo centro geométrico foi determinado há pouco. Considere-se ainda que o raio R da circunferência externa seja fixo e que o raio r da circunferência interna possa variar de zero a R , isto é, $0 < r < R$. Seja, então, o seguinte problema, proposto despretensiosamente e por mera curiosidade: qual seria o valor que r deve assumir para que o centro geométrico da figura se localize exatamente sobre circunferência interna, vale dizer, no ponto de intersecção da circunferência interna com o eixo x ?

A Figura 5 ilustra a situação desejada, em que a linha vertical, tangente à circunferência interna, designa a posição desejada do centro geométrico da figura, no ponto de intersecção da circunferência interna com o eixo x .

Figura 5 – Centroide põe-se sobre a circunferência interna.



Fonte: Elaboração do autor.

Para resolver o problema proposto, pode-se empregar a expressão do centro geométrico obtida na equação (3). Como se deseja que o centro geométrico da figura se ponha exatamente sobre a circunferência interna, como formulado no problema, deve-se impor que $\bar{x} = 2r$. Assim, obtém-se:

$$\frac{R^2 + Rr + r^2}{R + r} = 2r \Rightarrow R^2 + Rr + r^2 = 2(r^2 + Rr) \Rightarrow$$

$$R^2 + Rr + r^2 = 0 \quad (4)$$

Caso se divida agora a equação (4) por r^2 e se chame de $k = R/r$ a relação entre os raios das circunferências, obtém-se a equação:

$$k^2 - k - 1 = 0$$

Ora, essa é justamente a equação quadrática cuja solução positiva corresponde à proporção áurea! Isto é, a solução $k = \Phi$. Quanto à raiz negativa da equação, esta evidentemente não convém, pois as dimensões dos raios devem ser sempre positivas. Pode-se, portanto, extrair a seguinte conclusão: para que o centro geométrico da figura se localize exatamente sobre a circunferência interna, a relação entre os raios das circunferências deve obedecer à proporção

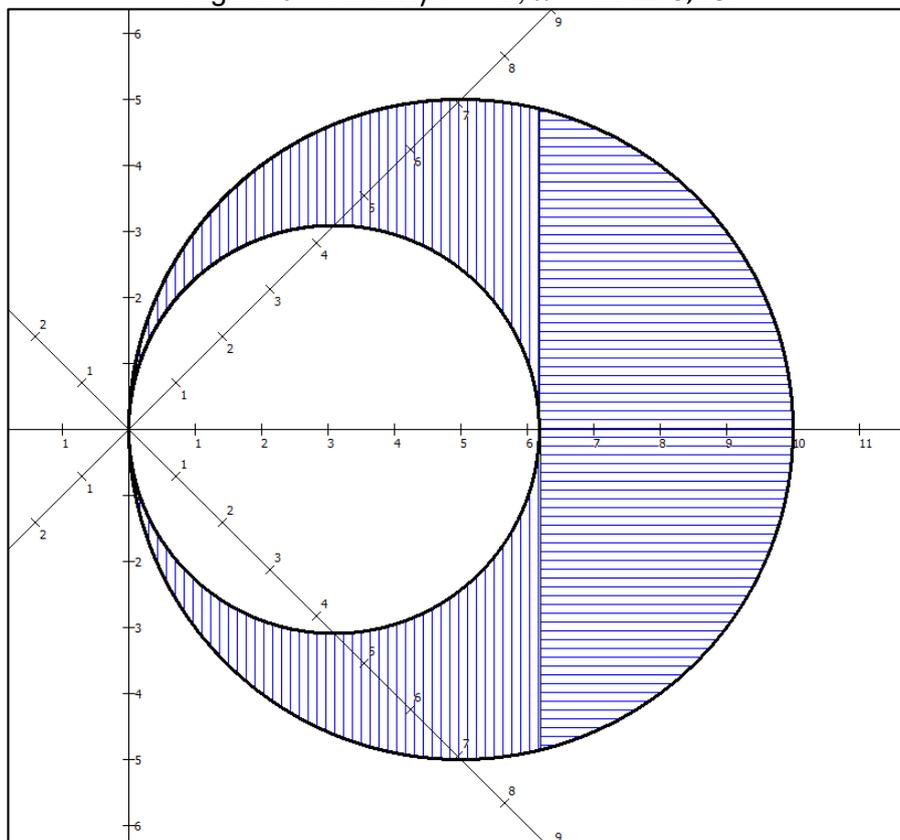
área, vale dizer $R/r = \Phi$. Por conseguinte, o raio r da circunferência interna deverá ser $r = R/\Phi = R(\Phi - 1)$.

Eis que, então, o número da divina proporção, o notável número Φ , deu o ar de sua graça, quando não se imaginava poder encontrá-lo – e nem sequer era procurado!

Na Figura 6, as dimensões dos raios das circunferências obedecem entre si à proporção áurea. Consequentemente, o centro geométrico da figura hachurada localiza-se precisamente no ponto de intersecção da circunferência interna com o eixo x . Note-se que, nesse caso, a linha imaginária vertical que passa pelo centro geométrico satisfaz duas condições simultaneamente: 1) é tangente à circunferência interna; 2) como passa pelo centro geométrico, divide a figura em duas figuras cujos momentos de massa se compensam. Deste modo, caso seja suspensa por um ponto qualquer desta linha vertical, a figura manter-se-á equilibrada na perfeita horizontal.

É certamente este fato que contribui para a sensação de equilíbrio e de harmonia que causa a contemplação da figura, comparativamente àquelas compostas por circunferências que não guardam entre si a proporção áurea³.

Figura 6 – Para $R/r = \Phi$, $\bar{x} = 2r \cong 6,18$.

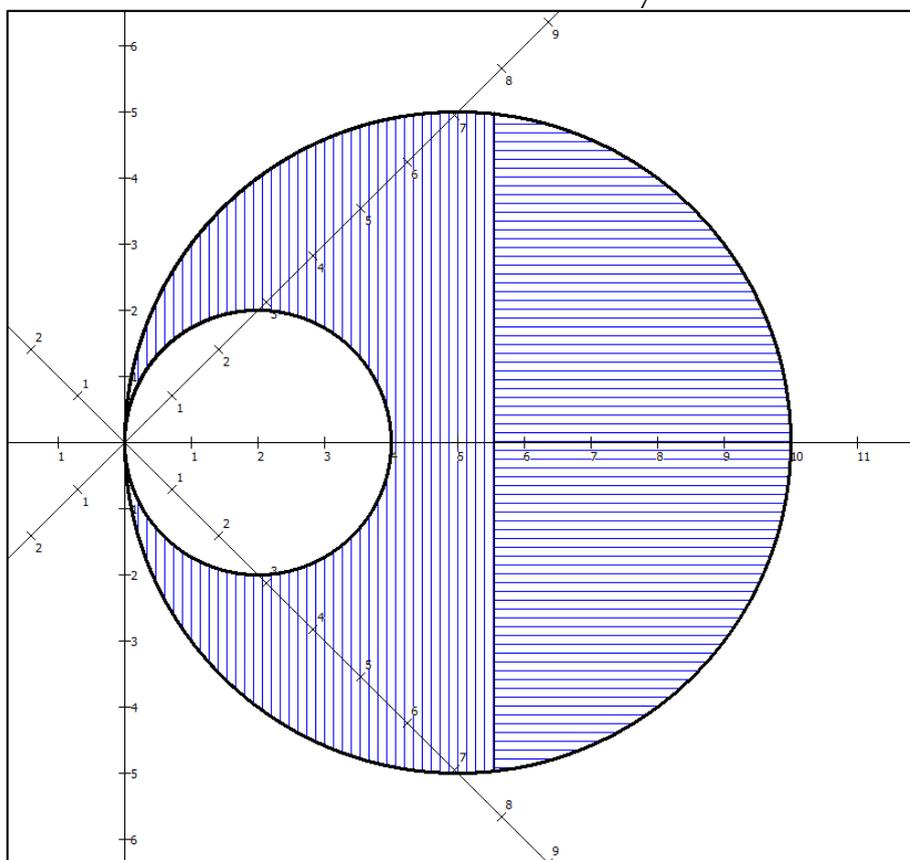


Fonte: Elaboração do autor.

³ A investigação relativa à presença do número Φ nas formas que se afiguram dotadas de beleza é tema de uma vasta bibliografia. Ao leitor interessado nessa temática, pode-se recomendar especialmente as seguintes obras: **L'esthétique des proportions dans la nature et dans les arts** (GHYKA, 1927); **The divine proportion: A study in mathematical beauty** (HUNTLEY, 1970); **The golden number and the scientific aesthetics of architecture** (BORISSAVLIEVITCH, 1958).

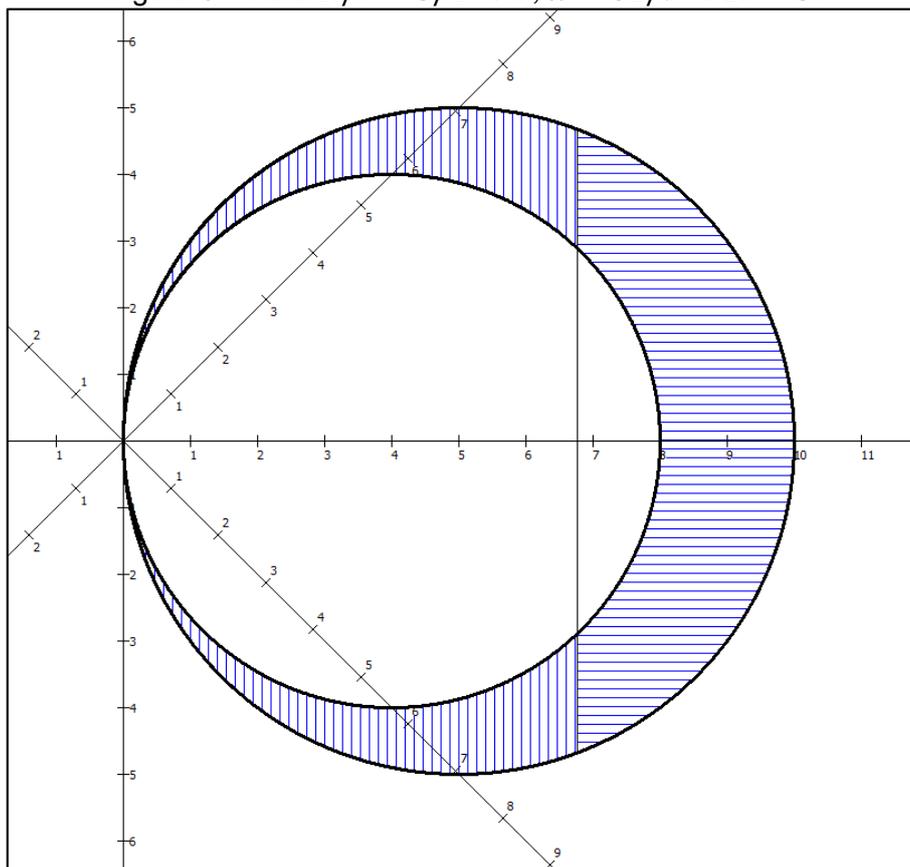
A conclusão obtida anteriormente poderia ser formulada de uma outra maneira. Considere o leitor que se queira traçar uma linha vertical pela figura compreendida entre as duas circunferências de modo a dividir essa figura em duas figuras cujos momentos de massa (relativamente à posição da linha) venham a se compensar. Para que essa linha seja tangente à circunferência interna, é necessário que a razão entre os raios das circunferências venha a obedecer à proporção áurea ($k = \Phi$). Quando a razão entre os raios das circunferências da figura for maior que a proporção áurea ($k > \Phi$), a linha vertical estará à direita da circunferência interna; quando, em contrapartida, for menor que a proporção áurea ($1 < k < \Phi$), a linha vertical será secante à circunferência interna. A Figura 7 e a Figura 8 ilustram as duas situações que ocorrem quando a relação entre os raios é diferente da proporção áurea. Na Figura 7, a relação entre os raios das circunferências é maior que a proporção áurea; na Figura 8, é menor.

Figura 7 – Para $R/r = 5/2 > \Phi$, $\bar{x} = \frac{39}{7} > 2r = 4$.



Fonte: Elaboração do autor.

Figura 8 – Para $R/r = 5/4 < \Phi$, $\bar{x} = 61/9 < 2r = 8$.



Fonte: Elaboração do autor.

5. Passagem para o Espaço Tridimensional

Seria interessante investigar se a solução para um problema análogo, no espaço tridimensional, também não acarretaria a epifania do número de ouro. Explicando melhor, caso a figura plana estudada anteriormente seja girada em torno do eixo x , um sólido de revolução é gerado, composto por duas esferas com centro sobre o eixo x e tangentes na origem. Será que, quando os raios dessas esferas guardarem entre si a proporção áurea, o centro geométrico do sólido compreendido entre elas localizar-se-á sobre a superfície da esfera interna, mais precisamente, na intersecção da esfera interna com o eixo x ?

A resposta a esta pergunta exige que se calcule, primeiramente, as coordenadas do centro geométrico do sólido correspondente a uma configuração análoga do problema no espaço tridimensional.

Considere-se, então, uma esfera de raio R cujo centro está sobre o eixo x em $x = R$, sendo, portanto, tangente ao plano zy na origem do espaço cartesiano. A equação analítica dessa esfera é: $(x - R)^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Considere-se agora uma segunda esfera de raio r menor que a anterior ($r < R$) cujo centro também se encontra sobre o eixo x , mas em $x = r$, sendo igualmente tangente ao plano zy na origem. Deste modo, sua equação analítica será: $(x - r)^2 + y^2 + z^2 =$

r^2 . Determinar o centro geométrico do sólido compreendido entre estas duas esferas é o que se almeja.

Pela simetria apresentada pela figura, pode-se concluir que o centro geométrico procurado deve localizar-se sobre a abscissa. Assim sendo, o problema reduz-se a determinar a coordenada \bar{x} do centro geométrico, cujo cálculo pode ser realizado por meio da seguinte expressão envolvendo uma integral tripla:

$$\bar{x} = \frac{1}{V} \iiint_R x \, dx \, dy \, dz \quad (5)$$

onde R é a região compreendida entre as esferas e $V = \frac{4\pi}{3}(R^3 - r^3)$ o volume dessa região⁴.

O cálculo da integral tripla $I_3 = \iiint_R x \, dx \, dy \, dz$ simplifica-se consideravelmente caso se promova uma mudança de variável para coordenadas esféricas. Neste caso, $x = \rho \sin \phi \cos \theta$, com $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ e $0 \leq \phi \leq \pi$. Observando que, para um determinado par de valores angulares (θ, ϕ) , a distância radial ρ deve variar de $\rho_1 = 2r \sin \phi \cos \theta$ até $\rho_2 = 2R \sin \phi \cos \theta$, de modo que toda a região R entre as esferas seja varrida⁵, e lembrando que o jacobiano J dessa transformação é dado por $J = \rho^2 \sin \phi$, deve-se escrever que:

$$\begin{aligned} I_3 &= \iiint_R x \, dx \, dy \, dz = \int_0^\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} (\rho \sin \phi \cos \theta) (\rho^2 \sin \phi) \, d\rho \, d\theta \, d\phi \Rightarrow \\ I_3 &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_{2r \sin \phi \cos \theta}^{2R \sin \phi \cos \theta} (\rho^3 \cos \theta \sin^2 \phi) \, d\rho \, d\theta \, d\phi \end{aligned}$$

onde se preferiu, em razão da simetria que possui o problema, integrar apenas sobre a região compreendida no primeiro octante (fazendo $0 \leq \theta \leq \pi/2$ e $0 \leq \phi \leq \pi/2$) e depois quadruplicar o resultado. A resolução da última integral é apresentada a seguir:

$$I_3 = 2^4(R^4 - r^4) \int_0^{\pi/2} \cos^5 \theta \, d\theta \int_0^{\pi/2} \sin^6 \phi \, d\phi = 2^4(R^4 - r^4) \left(\frac{2^3}{15}\right) \left(\frac{5\pi}{2^5}\right) \Rightarrow$$

⁴ A respeito do emprego das integrais triplas para o cálculo analítico do centro geométrico de sólidos, recomenda-se ao leitor as obras, já mencionadas anteriormente, Stewart (2009) e Thomas (2002). Nessa última, a matéria encontra-se no capítulo 12 (secção 12.5) do segundo volume; naquela, na secção 15.6 do segundo volume. Também a mudança de variável para coordenadas esféricas, realizada a seguir, encontra-se explicada nestas obras.

⁵ Isso porque, em coordenadas esféricas, a equação de uma esfera de raio R centrada no ponto $(x, y, z) \equiv (R, 0, 0)$ é dada por $\rho(\theta, \phi) = 2R \sin \phi \cos \theta$. A demonstração pode ser realizada substituindo-se $x = \rho \sin \phi \cos \theta$, $y = \rho \sin \phi \sin \theta$ e $z = \rho \cos \phi$ na equação analítica da esfera: $(x - R)^2 + y^2 + z^2 = R^2 \Rightarrow x^2 - 2Rx + y^2 + z^2 = 0$. O que fornece: $\rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta - 2R\rho \sin \phi \cos \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \phi = 0 \Rightarrow \rho^2 \sin^2 \phi + \rho^2 \cos^2 \phi = 2R\rho \sin \phi \cos \theta \Rightarrow \rho^2 = 2R\rho \sin \phi \cos \theta \Rightarrow \rho = 2R \sin \phi \cos \theta$.

$$I_3 = \frac{4\pi}{3}(R^4 - r^4) \quad (6)$$

Na resolução acima, empregou-se por brevidade os resultados obtidos para as seguintes integrais definidas: $\int_0^{\pi/2} \cos^5 \theta d\theta = \frac{2^3}{15}$ e $\int_0^{\pi/2} \sin^6 \phi d\phi = \frac{5\pi}{2^5}$, cujos cálculos são apresentados separadamente abaixo:

$$\begin{aligned} i) \quad \int_0^{\pi/2} \cos^5 \theta d\theta &= \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta \cos \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \theta)^2 \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^1 (1 - u^2)^2 du = \frac{2^3}{15} \end{aligned}$$

onde foi efetuada a mudança de variável $u = \sin \theta$.

$$\begin{aligned} ii) \quad \int_0^{\pi/2} \sin^6 \phi d\phi &= \frac{1}{2^3} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2\phi)^3 d\phi \\ &= \frac{1}{2^3} \int_0^{\pi/2} (1 - 3 \cos 2\phi + 3 \cos^2 2\phi - \cos^3 2\phi) d\phi \\ &= \frac{1}{2^3} \int_0^{\pi/2} (1 + 3 \cos^2 2\phi) d\phi = \frac{1}{2^3} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{3}{2}(1 + \cos 4\phi) \right) d\phi \\ &= \frac{1}{2^3} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{5}{2} + \cos 4\phi \right) d\phi = \frac{5\pi}{2^5} \end{aligned}$$

em que se assumiu saber serem nulas as seguintes integrais:

$$\int_0^{\pi/2} \cos 2\phi d\phi = 0; \int_0^{\pi/2} \cos^3 2\phi d\phi = 0; \text{ e } \int_0^{\pi/2} \cos 4\phi d\phi = 0.$$

Empregando-se agora na equação (5) o resultado obtido para a integral tripla I_3 , presente em (6), pode-se determinar a coordenada \bar{x} do centro geométrico como segue:

$$\bar{x} = \frac{1}{V} \iiint_R x dx dy dz = \frac{1}{V} I_3 = \frac{3}{4\pi(R^3 - r^3)} \frac{4\pi(R^4 - r^4)}{3} = \frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}$$

Deste modo, a coordenada \bar{x} do centro geométrico do sólido compreendido entre as duas esferas será dada por:

$$\bar{x} = \frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3} = \frac{(R + r)(R^2 + r^2)}{R^2 + Rr + r^2} \quad (7)$$

Nesse ponto, pode-se formular a mesma pergunta feita para a configuração plana do problema relativamente ao limite extremo do deslocamento do centro geométrico, qual seja: caso o valor do raio r da esfera interna tenda para o valor do raio R da esfera externa, mantido fixo, para que valor tenderia \bar{x} ? A fim de responder a essa questão, seria preciso calcular o valor do $\lim_{r \rightarrow R} \bar{x}$, tal como efetuado abaixo:

$$\lim_{r \rightarrow R} \bar{x} = \lim_{r \rightarrow R} \frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3} = \lim_{r \rightarrow R} \frac{(R + r)(R^2 + r^2)}{R^2 + Rr + r^2} = \frac{4}{3}R$$

Portanto, para o intervalo de variação do raio r da esfera interna $0 < r < R$ corresponde o seguinte intervalo de variação do centro geométrico do sólido compreendido entre as duas esferas:

$$R < \bar{x} < \frac{4}{3}R$$

Caso se pretenda agora determinar o valor que o raio r da esfera interna deve assumir para que o centro geométrico do sólido se localize exatamente no ponto de intersecção do eixo x com a superfície dessa esfera, como formulado no problema, é preciso impor que $\bar{x} = 2r$, o que resulta na equação:

$$\frac{(R + r)(R^2 + r^2)}{R^2 + Rr + r^2} = 2r \Rightarrow R^3 + R^2r + Rr^2 + r^3 = 2R^2r + 2Rr^2 + 2r^3 \Rightarrow$$

$$R^3 - R^2r - Rr^2 - r^3 = 0$$

Dividindo a equação anterior por r^3 e chamando de $k = R/r$ a relação entre os raios das esferas, obtém-se a seguinte equação:

$$k^3 - k^2 - k - 1 = 0$$

Empregando o método de Cardano-Tartaglia, é possível mostrar que a única raiz real dessa equação cúbica é dada por⁶:

$$k = \frac{R}{r} = 3 \left(\sqrt[3]{3\sqrt{33} + 17} - \sqrt[3]{3\sqrt{33} - 17} - 1 \right)^{-1} \cong 1,8393$$

O resultado acima atesta que, no caso tridimensional da configuração do problema, não se verifica a tão aguardada epifania da divina proporção. São os caprichos reservados pela sorte quando se trata do especioso número de Fídias: nas ocasiões em que se parte deliberadamente à sua procura, é quase certo não conseguir encontrá-lo; no entanto, quando não é procurado e sequer se imagina poder encontrá-lo, eis que, inesperadamente, ele se apresenta, como aconteceu no problema envolvendo o centroide de figuras planas exposto anteriormente.

⁶ Por brevidade, a resolução desta equação de terceiro grau não foi exposta aqui. De todo modo, sua resolução não apresenta dificuldade, consistindo em mera aplicação das fórmulas conhecidas. No trabalho de Elon Lages Lima, "**A equação de terceiro grau**", o leitor encontra um arrazoado sobre os métodos que se aplicam à solução dessas equações. Ver Lima (1987).

Referências

BORISSAVLIEVITCH, M. **The golden number and the scientific aesthetics of architecture**. Londres: Alec Tiranti, 1958.

GHYKA, M. **L'esthétique des proportions dans la nature et dans les arts**. Paris: Gallimard, 1927.

HERZ-FISCHLER, R. **A mathematical history of the golden number**. Nova York: Dover Books, 1998.

HUNTLEY, H. E. **A divina proporção**. Trad. ASCÊNIO, L. C. N. Brasília: Editora da Universidade de Brasília, 1985.

HUNTLEY, H. E. **The divine proportion: A study in mathematical beauty**. Nova York: Dover Books, 1970.

LIMA, E. L. A equação de terceiro grau. **Revista Matemática Universitária**, n. 5, p. 9-23, jun. 1987.

LIVIO, M. **Razão áurea: A história de Fi, um número surpreendente**. Rio de Janeiro: Record, 2006.

POSAMENTIER, A. S.; LEHMANN, I. **The glorious golden ratio**. Nova York: Prometheus Book, 2012.

STEWART, J. **Cálculo**. v. 2. Trad. CASTRO, H. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

THOMAS, G. B. **Cálculo**. v. 2. Trad. BOSCHCOV, P. São Paulo: Pearson Education, 2002.