A aprendizagem de Análise Combinatória no Ensino Médio: uma proposta didática por meio da Resolução de Problemas

The Learning of Combinatory Analysis in High School: A didactic proposal through Problem Solving

Diogo Pinheiro da Silva
Universidade Federal de Alagoas (UFAL)
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Maceió, AL, Brasil
diogopinheiromat@hotmail.com

Ediel Azevêdo Guerra
Universidade Federal de Alagoas (UFAL), Centro de Ciências Exatas e Naturais, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Maceió, AL
edielguerra@hotmail.com

Informações do Artigo

Histórico do Artigo
Submissão: 24 de maio de 2017.
Aceite: 28 de setembro de 2017.

Palavras-chave
Análise Combinatória
Sequência Didática
Resolução de Problemas

Resumo

Este trabalho consiste na apresentação dos resultados de uma pesquisa de mestrado sobre o processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória em uma turma do segundo ano do Ensino Médio de uma escola da rede pública estadual de Alagoas. Para tornar esse estudo possível, foi desenvolvida, aplicada e validada uma sequência didática tendo como base o Princípio Fundamental da Contagem para introduzir os conceitos básicos de Análise Combinatória e, como metodologia, o ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas. Os resultados mostraram que a sequência didática contribuiu para a internalização dos conceitos básicos do objeto matemático em destaque e, além disso, possibilitou identificar dificuldades surgidas durante sua execução.

Keywords
Combinatorial Analysis
Didactic Sequence
Problem Solving

Abstract

This work consists in the presentation of the results of an investigation about the teaching and learning process of Combinatorial Analysis in a second year high school class of a school in the state public network of Alagoas. In order to make this study possible, a didactic sequence was developed, applied and validated based on the Fundamental Principle of Counting to introduce the basic concepts of Combinatorial Analysis and, as a methodology, teaching-learning-mathematics assessment through Problem Solving. The results showed that the didactic sequence contributed to the internalization of the basic concepts of the mathematical object in focus and to the reflection about the difficulties or peculiarities that arose during its execution.

1. Introdução

No mundo de inúmeras transformações sociais e econômicas, o estudante precisa adquirir competências cada vez mais abrangentes e efetivas. Neste sentido, desenvolver habilidades de resolver problemas é, sem dúvida, um requisito relevante para a aquisição dessas competências. No atual modo de organização social, as escolas são, inegavelmente, as instituições que melhor podem contribuir para que os membros da sociedade atinjam essa finalidade.

Julianelli *et al.* (2009), discutindo sobre o objeto matemático Análise Combinatória, afirmam que o modelo de ensino deste tema tem seguido enfoques didáticos voltados integralmente ou quase integralmente para os aspectos estritamente matemáticos, desvinculados de suas conexões com a realidade natural ou social. Conforme os autores, é comum encontrar professores na educação básica que limitam suas aulas à utilização de fórmulas apenas para estabelecer a diferença entre os agrupamentos Arranjos Simples e Combinação Simples, a título de comparação.

O estudo de tópicos relacionados à Contagem é relevante para a Estatística e Probabilidade, por exemplo. Essas últimas são instrumentos de base para o aprimoramento de diversas áreas. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais,

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicada as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatístico e probabilístico são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas (BRASIL, 1999, p. 257).

As pesquisas examinadas no levantamento bibliográfico desse trabalho têm recomendado estratégias de ensino da Análise Combinatória que enfatizem o Princípio Fundamental da Contagem e que propiciem a participação ativa do aluno no processo de aprendizagem (SOUZA, 2010; FERRAZ, 2002; PINHEIRO *et al*., 2007; LIMA; ROCHA, 2016; dentre outros).

Acerca das tendências metodológicas no campo da Educação Matemática, Silveira e Miola (2008) apresentam seis correntes importantes, a saber: resolução de problemas, modelagem matemática, etnomatemática, história da matemática, tecnologias da informação e comunicação e jogos na Educação Matemática. Onuchic *et al.* (2014) defendem o uso da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da Resolução de Problemas como principal técnica de ensino.

Diante disso, escolheu-se realizar uma pesquisa em relação ao seguinte problema: **Quais dificuldades podem emergir no processo de ensino e aprendizagem de conceitos básicos de análise combinatória por meio de aplicação de uma sequência didática concebida a partir do Princípio Fundamental da Contagem, tendo como metodologia o ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas?**

Para alcançar as respostas, sentimo-nos motivados a construir uma Sequência Didática para introduzir os conceitos básicos de Análise Combinatória com foco no Princípio Multiplicativo e norteada pela metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da resolução de problemas, estabelecendo os seguintes objetivos: (1) identificar as possíveis reações comportamentais e atitudinais dos estudantes, acostumados ao modo de ensino expositivo, à mudança de contrato didático; (2) observar como os estudantes interagem nas resoluções dos problemas; (3) examinar as dificuldades dos estudantes na compreensão dos enunciados dos problemas; (4) analisar a preferência dos estudantes no tocante à resolução dos problemas pela utilização do Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.) ou das fórmulas específicas de cada um dos seguintes agrupamentos: Arranjo Simples, Combinação Simples e Permutação Simples.

2. Referencial Teórico

2.1. Conceitos Básicos de Análise Combinatória para o Ensino Médio

Conforme Iezzi *et al.* (2016, p. 228), o **Princípio Fundamental da Contagem** (P.F.C.) ou **Princípio Multiplicativo** pode ser expresso da seguinte forma:

Suponha que uma sequência seja formada por k elementos $(a_1, a_2, a_3,..., a_k)$, em que:

- a_1 pode ser escolhido de n_1 maneiras distintas;
- a_2 pode ser escolhido de n_2 formas diferentes, a partir de cada uma das escolhas anteriores;
- a_3 pode ser escolhido de n_3 modos diferentes, a partir de cada uma das escolhas anteriores;

.
.
.

- a_k pode ser escolhido de n_k maneiras distintas, a partir das escolhas anteriores.

Então, o número de possibilidades para construir a sequência $(a_1, a_2, a_3,..., a_k)$ é:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

Fatorial de um Número Natural: Conforme Iezzi *et al*. (2016), dado um número natural $n \geq 2$, chama-se fatorial de n, ao número indicado por $n!$ tal que

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Arranjo Simples: Dado um conjunto com n elementos, e sendo p um número inteiro e positivo, tal que $p \leq n$, chama-se Arranjo Simples dos n elementos dados, agrupados p a p, qualquer sequência de p elementos distintos formada com os elementos do conjunto.

Nota: a ordem dos elementos gera novas possibilidades.

Fórmula: $A_{n;\,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$

Combinação Simples: Dado um conjunto qualquer de n elementos e sendo p um número inteiro e positivo tal que $p \leq n$, chama-se combinação simples dos n elementos dados, agrupados p a p, qualquer subconjunto de p elementos distintos, formados com elementos do conjunto.

Nota: a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

Fórmula: $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Permutação Simples: Quando um agrupamento é composto por m elementos dispostos em m posições, dizemos que há uma permutação de n elementos.

Nota: Podemos considerar a Permutação Simples como um caso particular de Arranjo Simples. Para determinar o número de Permutações Simples, usa-se a expressão $P = m!$

2.2. Resolução de Problemas

Conforme Onuchic *et al.* (2014), a Resolução de Problemas ganhou espaço nos currículos a partir da publicação do documento "Uma Agenda para Ação-Recomendações para a Matemática Escolar para a década de 1980". O documento indicava que a Resolução de Problemas deveria ser uma estratégia principal nos currículos escolares. Ainda de acordo com os autores, esse espaço foi conquistado pela RP (Resolução de Problemas) diante do insucesso de outras metodologias de ensino que se baseavam na formalidade e no rigor.

Para tornar prática a aplicabilidade da Metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação em Matemática através da Resolução de Problemas, Onuchic *et al.* (2014), após uma série de experimentos e atualizações, criaram um roteiro contendo uma sequência de atividades:

> 1. **Proposição do problema** – Seleciona ou elabora um problema e denomina-se de problema gerador.
>
> 2. **Leitura individual** – Distribuir uma cópia impressa do problema para cada aluno e solicitar a leitura do mesmo.
>
> 3. **Leitura em conjunto** – Distribuir a turma em pequenos grupos e, solicitar uma nova leitura do problema.
>
> 4. **Resolução do problema** – A partir do momento em que o aluno entendeu o problema tenta a resolver, em grupo, permitindo assim a construção do conhecimento sobre o conteúdo que o professor planejou para aquela aula.
>
> 5. **Observar e incentivar** – Nesse momento, o professor muda de comunicador do conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador, incentivador da aprendizagem.
>
> 6. **Registro das resoluções na lousa** – Anotar os resultados obtidos pelos grupos quer sejam certo ou errado e aqueles feitos por diferentes caminhos.
>
> 7. **Plenária** – Assembleia com todos os alunos. Como todos trabalham sobre o problema dado, estão ansiosos quanto a seus resultados, dessa forma, participam.
>
> 8. **Busca do consenso** – Após as discussões, e sanadas as dúvidas, o professor juntamente com os alunos tentam chegar a um consenso.
>
> 9. **Formalização do conteúdo** – Faz-se uma síntese daquilo que se objetivava "aprender" a partir do problema gerador. São colocadas as devidas definições, identificando propriedades, fazendo demonstrações, etc.
>
> 10. **Proposição e resolução de novos problemas** – Nesta etapa, após a formalização do conteúdo, propõem-se novos problemas para a fixação de aprendizagem. (Onuchic *et al.*, 2014, p.44-46).

3. Metodologia

A pesquisa foi desenvolvida no segundo semestre de 2016, em uma turma do segundo ano do Ensino Médio de uma escola pública, localizada na parte alta da cidade de Maceió (AL). O seu funcionamento está subordinado à 13ª Coordenadoria Regional de Ensino da Secretaria Estadual de Educação de Alagoas – SEDUC. A turma investigada apresentava um total de 50 alunos matriculados. Porém, segundo as informações dos professores, apenas 20 alunos frequentam as aulas.

Com o propósito de identificar os saberes ou as informações prévias que os alunos possuíam acerca do tema, uma lista simples de exercícios foi proposta. Os resultados desse teste diagnóstico mostraram que os discentes deixaram quase todas as questões em branco e aqueles que responderam, ainda assim não acertaram.

Tendo levantado esses dados, optou-se por construir uma sequência didática com base na Resolução de Problemas em duas etapas. Na primeira, os alunos tiveram contato inicial com o primeiro Problema Gerador, onde a finalidade foi o despertar para a ideia de padrão e, dessa forma, chegar ao conhecimento do Princípio Fundamental da Contagem. Na segunda fase, tendo posse da ideia do P.F.C., o segundo Problema Gerador teve como destaque a necessidade de observar a origem dos agrupamentos. O objetivo foi discutir a importância da ordem dos elementos e, assim, introduzir os conceitos de Arranjo Simples, Combinação Simples e Permutação Simples, relacionando-os com o Princípio Multiplicativo. No final de cada etapa, foram propostos exercícios complementares.

Para a execução desta sequência, foi solicitada a constituição de grupos entre os presentes. Por conta do quantitativo de 20 pessoas, ficou pertinente a formação de cinco (5) grupos com quatro (4) participantes cada um. Foi atribuído um encontro para cada etapa da sequência. Na sequência, seguem os passos seguidos e executados em cada momento.

Etapa 1 (primeiro encontro): Apropriação do conceito do P.F.C.

- Problema gerador (Quadro 1);

Quadro 1 – Primeiro problema gerador.

Joana é uma garota de 18 anos. No início do ano de 2016, ela foi aprovada em uma importante universidade de sua cidade através do ENEM. Nesse mesmo período, Joana acabou sendo convocada para um emprego que havia feito uma entrevista recentemente. Joana decidiu aceitar o emprego e fazer seu curso superior ao mesmo tempo. Para isso, foi necessário abrir 1 conta corrente em um banco público para poder receber seu salário. A estudante visitou o banco “Juros Baixos” e foi conversar com o gerente. Para abrir uma conta neste banco, o gerente afirmou que Joana teria que montar uma senha com 4 dígitos sem nenhum número se repetir tendo como base os seguintes números: 1,2, 3 e 4. Joana deveria ter apenas uma senha, mas sabia que poderia escolher entre várias determinadas pelo gerente. Sabendo disso, qual a quantidade total de senhas possíveis?

Fonte: Sequência didática elaborada pelos autores, 2016.

- Leitura e resolução do Problema Gerador pelos grupos;
- Apresentação dos registros de cada grupo no quadro;
- Discussão acerca das respostas de cada grupo;
- Compreensão de uma resposta definitiva para o Problema Gerador;
- Apresentação formal do conceito do P.F.C.;
- Apresentação formal do conceito de Fatorial;
- Proposta e resolução de novos problemas (Quadro 2).

Quadro 2 – Primeira lista de exercícios.

1. Thiago possui 3 blusas diferentes e 2 calças diferentes. De quantas maneiras ele poderá escolher uma blusa e uma calça para se vestir?
2. Um estudante possui um livro de Matemática, um de Biologia, um de Física, um de Química, um de história e um de Geografia. Desejando organizá-los lado a lado em uma estante, de quantos modos poderá fazê-lo?
   a. O primeiro livro deverá ser de Matemática.
   b. O primeiro livro deverá ser de Matemática e o segundo de Física.
   c. Os dois primeiros livros deverão ser os de Matemática e Física.
   d. Os livros de Matemática e Física devem ficar juntos.
3. No Brasil, os carros são emplacados assim que saem da loja. O modelo brasileiro compreende 3 letras seguidas de 4 números, conforme o exemplo abaixo:

Fonte: https://www.clickpb.com.br/politica/carro-que-levou-ricardo-para-festa-de-estelizabel-segundo-detran-tem-placa-fria-143603.html.

Com base nessas informações, resolva:
   a. Quantas placas podem ser formadas neste modelo?
   b. Quantas placas podem ser formadas neste modelo, desde que não tenha repetição de números e letras?
   c. Mantendo as letras NQC, determine a quantidade de placas formadas.
   d. Mantendo os números 0876, determine a quantidade de placas formadas com letras distintas.
4. Calcule:
   a. 5!
   b. 6! + 4!

Fonte: Sequência didática elaborada pelos autores, 2016.

Etapa 2 (segundo encontro): Apropriação dos Conceitos de Arranjo Simples, Combinação Simples e Permutação Simples.

- Problema Gerador (Quadro 3);

Quadro 3 – Segundo problema gerador.

- André, Bruna, Carla e Danilo são amigos de infância. Eles se encontram todos os meses para colocar o assunto em dia e conversar sobre projetos profissionais. Bruna, com uma visão empreendedora, lançou a proposta dos amigos abrirem uma empresa e virarem sócios. Todos os amigos concordaram com a ideia e começaram a pensar no tipo de negócio que daria mais lucro. Os amigos precisariam criar um nome para a empresa e buscar recursos para isso.
- Danilo sugeriu que seria interessante que o nome da empresa tivesse as iniciais de 3 (três) dos quatro amigos sem repetição, por exemplo: ABC, ACB, ACD, ADC. Segundo Danilo, esse modelo ficaria mais fácil para os clientes assimilarem.
- Por outro lado, Carla afirmou que seria necessário uma comissão com 3 pessoas para ir ao contador conversar sobre as finanças da empresa. Essas comissões também seriam com as iniciais dos nomes dos amigos.

Sabendo disso, determine:

5. Quantos nomes diferentes esses amigos poderiam criar para seu novo negócio?
6. Quantas comissões poderiam ser montadas para tratar dos assuntos financeiros?

Fonte: Sequência didática elaborada pelos autores, 2016.

- Leitura e resolução do problema gerador pelos grupos;
- Apresentação dos registros de cada grupo no quadro;
- Discussão acerca das respostas de cada grupo;
- Compreensão de uma resposta definitiva para o segundo Problema Gerador;
- Apresentação formal do conceito de Arranjo Simples, associando-o ao conceito de P.F.C.;
- Apresentação formal do conceito de Combinação Simples, associando-o ao conceito de P.F.C.;
- Apresentação formal do conceito de Permutação Simples, associando-o ao conceito de P.F.C.;
- Proposta e resolução de novos problemas (Quadro 4).

Quadro 4 – Segunda lista de exercícios.

7. De quantas maneiras 5 pessoas podem sentar-se num banco que tem apenas 3 lugares?
8. Um grupo é formado por 8 alunos. Considerando esses alunos, quantas duplas distintas podem ser formadas?

9. Em uma competição de atletismo, 8 velocistas disputam a prova final dos 100m rasos, na qual os 4 primeiros colocados irão ao pódio. De quantas maneiras distintas o pódio poderá ser composto?
10. Dispondo-se de abacaxi, acerola, goiaba, laranja, maçã, mamão e melão, calcule de quantos sabores diferentes pode-se preparar um suco usando-se três frutas distintas.
11. Na palavra norte, quantos anagramas podem ser formados?

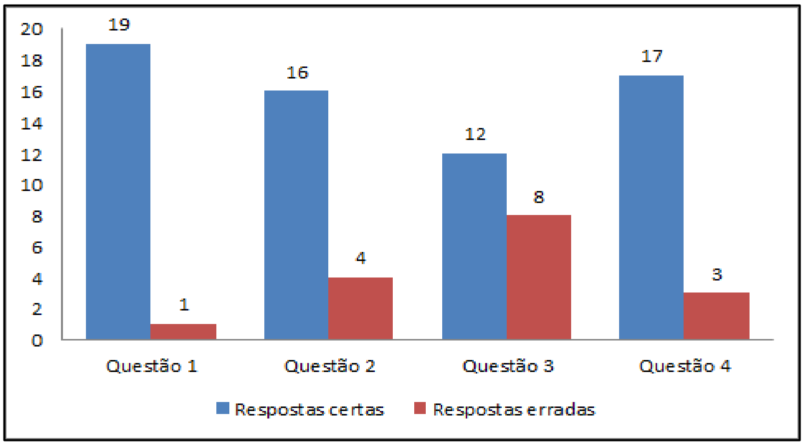
Fonte: Sequência didática elaborada pelos autores, 2016.

4. Resultados e Discussões

Neste item, buscou-se investigar as listas de exercícios propostas no final de cada fase da Sequência Didática. Além disso, também foram levados em consideração todos os passos descritos durante sua execução. Essas informações passam do processo inicial (leitura do Problema Gerador), até a formalização do conteúdo e proposição de novos exercícios.

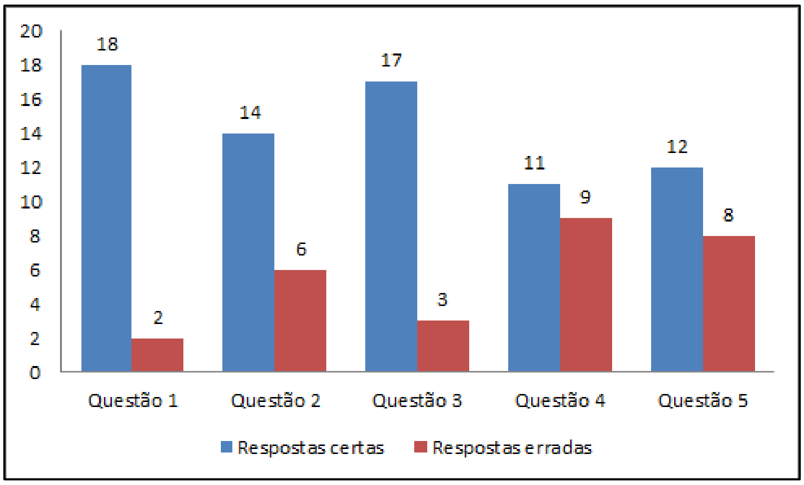
Nos Gráficos 1 e 2, tem-se os primeiros resultados dessa experimentação.

Gráfico 1 – Quantitativo entre respostas (certas e erradas) por cada questão na primeira lista de exercícios.



Fonte: Dados da pesquisa.

Gráfico 2 – Quantitativo entre respostas (certas e erradas) por cada questão na segunda lista de exercícios.



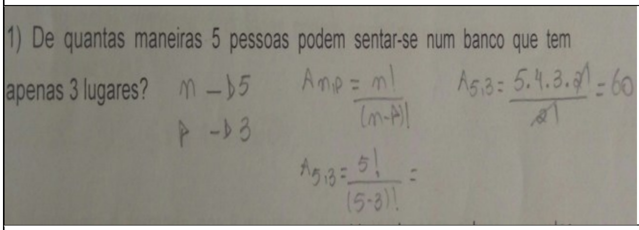
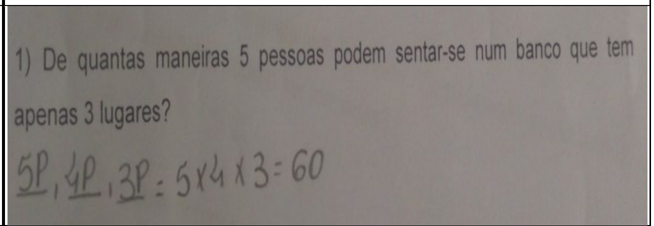
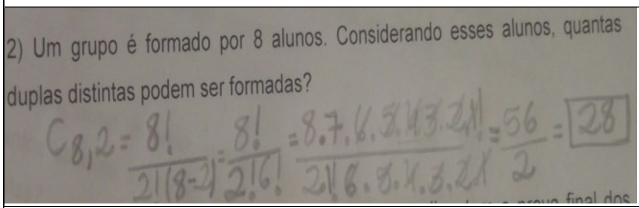
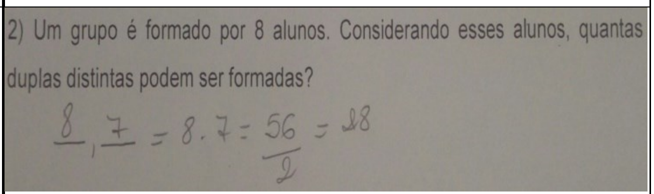
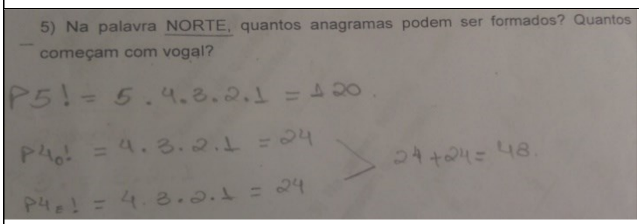
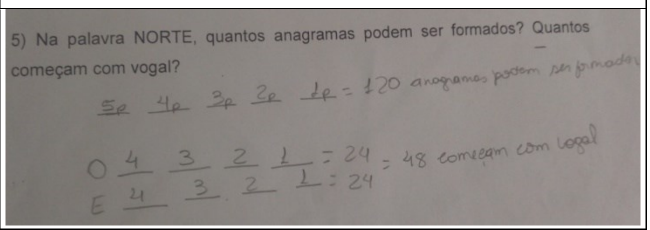
Fonte: Dados da pesquisa.

É possível identificar que os dados gráficos expostos acima demonstram informações relevantes em relação ao saldo positivo no número de questões que apresentaram soluções corretas.

Isso mostra, pelo menos inicialmente, uma apropriação maior por parte dos estudantes na manipulação de estratégias presentes em problemas envolvendo o pensamento combinatório. Em alguns casos mais específicos, como na questão 1 do exercício 1 (Gráfico 1) e na questão 1 do exercício 2 (Gráfico 2), o índice de acerto foi superior a 90%.

No que se refere ao uso de fórmulas, alguns alunos, de mesma equipe ou não, usaram apenas o P.F.C. como instrumento de resolução. Outros optaram por usar as fórmulas específicas a cada tipo de agrupamento, conforme se verifica no Quadro 5.

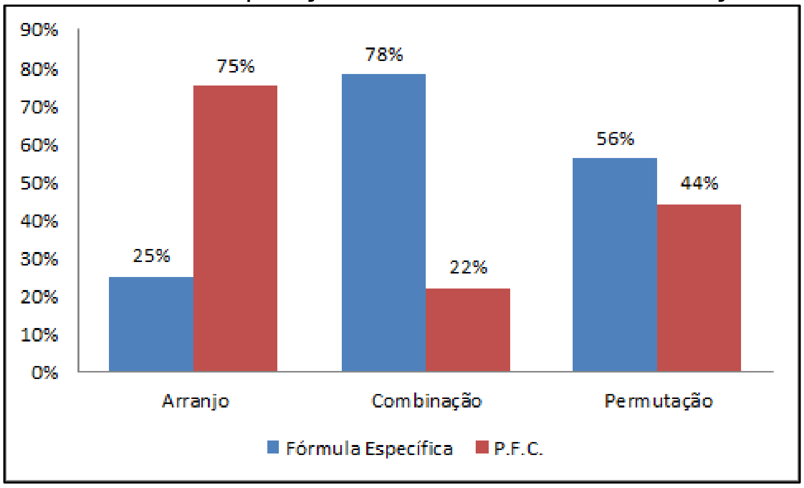
Quadro 5 – Respostas dos alunos usando a fórmula específica ou o P.F.C.

Arranjo Simples - Fórmula	Arranjo Simples - P.F.C.
 1) De quantas maneiras 5 pessoas podem sentar-se num banco que tem apenas 3 lugares? $n \to 5$ $p \to 3$ $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$ $A_{5,3} = \frac{5.4.3.2!}{2!} = 60$ $A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} =$	 1) De quantas maneiras 5 pessoas podem sentar-se num banco que tem apenas 3 lugares? $\underline{5P}, \underline{4P}, \underline{3P} : 5 \times 4 \times 3 = 60$
Combinação Simples - Fórmula	**Combinação Simples - P.F.C.**
 2) Um grupo é formado por 8 alunos. Considerando esses alunos, quantas duplas distintas podem ser formadas? $C_{8,2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{2!6.5.4.3.2.1} = \frac{56}{2} = \boxed{28}$	 2) Um grupo é formado por 8 alunos. Considerando esses alunos, quantas duplas distintas podem ser formadas? $\underline{8}, \underline{7} = 8.7 = \frac{56}{2} = 28$
Permutação Simples - Fórmula	**Permutação Simples - P.F.C.**
 5) Na palavra NORTE, quantos anagramas podem ser formados? Quantos começam com vogal? $P5! = 5.4.3.2.1 = 120$ $P4_o! = 4.3.2.1 = 24$ $P4_e! = 4.3.2.1 = 24$ $24 + 24 = 48$	 5) Na palavra NORTE, quantos anagramas podem ser formados? Quantos começam com vogal? $\underline{5p}\ \underline{4p}\ \underline{3p}\ \underline{2p}\ \underline{1p} = 120$ anagramas podem ser formados O $\underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1} = 24$ = 48 começam com vogal E $\underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1} = 24$

Fonte: Dados da pesquisa.

Pode-se observar, no Quadro 5, que os grupos apresentaram modos diferentes na resolução de problemas, onde a ordem dos elementos gera novas possibilidades ou não. Esses modos foram diagnosticados em relação ao uso formal das fórmulas ou aplicação direta do Princípio Multiplicativo. É importante destacar que essa característica foi observada em praticamente todos os grupos participantes da pesquisa. No Gráfico 3, apresenta-se um balanço geral sobre o método optado pelos discentes na execução dos exercícios. Para levantar esses dados, investigou-se as alternativas respondidas corretamente.

Gráfico 3 – Comparação entre os métodos de resolução.



Fonte: Dados da pesquisa.

Compreende-se que, nesta pesquisa, a fórmula específica de cada agrupamento ainda é um mecanismo bastante presente. Das três variáveis investigadas (Arranjo, Combinação e Permutação), o uso da fórmula foi superior em duas delas. No primeiro caso, o uso do P.F.C. foi mais presente nos protocolos encontrados nos exercícios referentes ao conceito de Arranjo Simples. No segundo e no terceiro casos, essa incidência foi menor, porém não menos importante. Compreende-se que a forma como a sequência didática foi executada, em que não se fixava um modelo único de solução, pode ter contribuído positivamente para essa diversidade.

5. Considerações Finais

Conforme Ortenzi (2006), o modelo tecnicista de ensino trata os conceitos matemáticos como roteiros semelhantes e bem definidos e, para o autor, o professor, centro do processo, inicia sua aula expondo fórmulas e aplicações em exercícios. Os alunos, geralmente, sujeitos passivos, precisam repetir exaustivamente os procedimentos apresentados pelo professor na resolução de problemas-modelo. No final, considera-se que o estudante aprendeu quando ele é capaz de repetir os tipos de procedimentos a ele apresentados pelo professor em questões análogas às apresentadas em sala de aula.

É possível identificar livros didáticos que ainda abordam o objeto matemático Análise Combinatória como blocos isolados e com pouca relação entre os termos apresentados.

Como exemplo, destaca-se Paiva (2014) que, trazendo a ideia de Arranjo Simples, não faz relação alguma com o Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.). Esta pesquisa teve por necessidade principal o interesse dos autores em aplicar a metodologia de Resolução de Problemas com o intuito de auxiliar o ensino de Análise Combinatória em uma turma do segundo ano do Ensino Médio da rede pública do estado de Alagoas.

Desse modo, uma sequência didática foi construída, aplicada e validada. A validação da sequência foi possibilitada pela análise das respostas dos exercícios aplicados no final de cada etapa em comparação com os conhecimentos prévios e pelas observações feitas durante sua execução.

Diante disso, foi possível reunir argumentos para tentar solucionar o problema de pesquisa proposto. Dentre eles, destacam-se as seguintes reflexões:

1. Foi possível perceber que todos os grupos participantes apresentaram evolução acerca dos conhecimentos básicos de Análise Combinatória, ainda que de forma heterogênea.
2. Inicialmente, houve certa rejeição dos alunos em relação à nova abordagem metodológica. Essa percepção fica evidente na dificuldade de socialização principalmente do primeiro Problema Gerador. Para muitos, a tentativa de resolução de um problema só seria possível após a exposição formal do conteúdo e, além disso, houve receio em participar das discussões por medo de erros e por possíveis punições em decorrência disso. Essas características ainda evidenciam uma forte ligação com o modelo tradicional de ensino percebido nesta turma. Para tentar superá-lo, foram realizadas diversas intervenções, onde se verificou uma importante redução nesta barreira, mas não sua eliminação por completo.
3. As interações mais significativas entre os sujeitos da pesquisa foram mais aparentes na segunda etapa da sequência. As trocas de informações entre os integrantes de um mesmo grupo e entre os integrantes de grupos diferentes possibilitaram a superação de dificuldades ou a uma percepção melhor no tocante à comparação entre as respostas, principalmente nos momentos da resolução do problema em grupo e da plenária.
4. Os Problemas Geradores desempenharam função relevante no processo. Foi possível identificar que alguns grupos evoluíram do processo de obtenção das respostas usando a Contagem Direta (caso a caso) para a tentativa de descobrir um padrão e, assim, abrir caminhos para a compreensão do P.F.C. e dos diferentes tipos de agrupamentos posteriores. Sendo assim, entende-se que o professor que deseja seguir esta metodologia de ensino precisa ser criterioso na construção do Problema Gerador. As competências essenciais para a apropriação do objeto matemático devem estar presentes nessa reflexão inicial.
5. No tocante ao uso de fórmulas específicas nos exercícios dos diferentes tipos de agrupamentos trabalhados (Arranjo Simples, Combinação Simples e Permutação Simples), um quantitativo significativo de alunos utilizou apenas o P.F.C. como instrumento para resolução destas questões. Entende-se que essa situação representou uma redução no uso excessivo de fórmulas, possibilitando uma liberdade maior acerca das escolhas de estratégias para a resolução dos problemas.

Com base nas informações exploradas nos parágrafos anteriores, podemos afirmar que a hipótese apresentada no início dessa pesquisa não pode ser refutada mediante os resultados obtidos e os desempenhos observados, ou seja, **a sequência didática aplicada neste trabalho, elaborada a partir do Princípio Fundamental da Contagem e usando como metodologia o**

ensino-aprendizagem-avaliação da Matemática através da resolução de problemas, foi capaz de proporcionar aos alunos a apropriação dos conceitos básicos de Análise Combinatória e possibilitou a identificação de possíveis adversidades surgidas durante sua execução.

Sendo assim, esperamos que essa pesquisa venha a contribuir com as futuras investigações no que se refere ao ensino e aprendizagem de Análise Combinatória e que a sequência didática aqui proposta sirva de inspiração para os professores de Matemática do Ensino Médio ao apresentarem esse conteúdo em sala de aula.

Referências

BRASIL, Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (Matemática).** Brasília: MEC, 1999.

FERRAZ, Martha Cornélio **O Tratamento da Análise Combinatória no Ensino Fundamental e seus Obstáculos Didáticos**. 2002. Monografia (Especialização em Ensino-Aprendizagem de Matemática). – Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, 2002.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática**: Ciência e Aplicações. 9. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2016.

JULIANELLI, José Roberto; DASSIE, Bruno Alves; LIMA, Mário Luiz Alves de; SÁ, Ilydio Pereira de. **Curso de Análise Combinatória e Probabilidade**. 1. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

LIMA, Ana Paula Barbosa; ROCHA, Cristiane de Arimatéa. O que diz o currículo prescrito para combinatória no Brasil? Reflexões sobre o desenvolvimento do conhecimento do horizonte e conhecimento curricular de professores. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais**… São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes; NOGUTI, Fabiane Cristina Hopner; JUSTULIN, Andresa Maria (Orgs.). **Resolução de Problemas**: Teoria e Prática. 1. ed. Jundiaí, SP: Paco Editorial, 2014.

ORTENZI, Alexandre. **A Relação Professor-Aluno**: Contribuições para o Ensino da Matemática. 2006. 103f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de Campinas, Campinas, 2006.

PAIVA, Manoel. **Matemática**. v. 2. São Paulo: Moderna, 2014.

PINHEIRO, Carlos; ABAR, Celina; SÁ, Pedro. Aprendizagem de análise combinatória por meio da resolução de problemas como ponto de partida. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2012, Fortaleza, CE. **Anais...** Universidade Federal do Ceará ,2012. p. 1-14.

SILVEIRA, Everaldo; MIOLA, Rudinei José. **Professor-Pesquisador em Educação Matemática**. Curitiba: Ibpex, 2008.

SOUZA, Analucia Castro Pimenta de. **Análise Combinatória no Ensino Médio apoiada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas**. 2010. 267f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.