

# Solução de um Circuito Resistor-Indutor usando Transformada de Fourier e a Integração Complexa

## Solution of a Resistor-Inductor Circuit Using Fourier Transform and Complex Integration

Jorge Corrêa de Araújo  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Departamento de Matemática da Faculdade de  
Formação de Professores (FFP), São Gonçalo, RJ, Brasil  
[icaraujo@iprj.uerj.br](mailto:icaraujo@iprj.uerj.br)

Rosa María García Márquez  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Departamento de Matemática da Faculdade de  
Formação de Professores (FFP), São Gonçalo, RJ, Brasil  
[rosagmarquez@yahoo.com.br](mailto:rosagmarquez@yahoo.com.br)

### Informações do Artigo



#### Histórico do Artigo

Submissão: 28 de abril de 2017.  
Aceite: 18 de agosto de 2017.

#### Palavras-chave

Transformada de Fourier  
Teorema dos Resíduos de Cauchy  
Método de Série de Taylor  
Solução Explícita

#### Keywords

Fourier Transform  
Cauchy Waste Theorem  
Taylor Series Method  
Explicit Solution

### Resumo

Nesse trabalho, a equação diferencial linear que representa a corrente elétrica em um circuito simples do tipo resistor-indutor (RL) com uma tensão elétrica  $E(t) = E_0 e^{-at^2}$  é resolvida detalhadamente usando a transformada de Fourier e a integração complexa. Devido à natureza exponencial da força de tensão elétrica, não foi possível obter a solução analítica por meio de funções elementares, mas tal dificuldade pode ser contornada por meio da análise complexa. Uma solução numérica com o método de série de Taylor mostrou boa concordância com a solução explícita obtida.

### Abstract

In this work, the linear differential equation that models the electric current in a simple resistor-inductor (RL) circuit with the voltage  $E(t) = E_0 e^{-at^2}$  is solved in detail using the Fourier transform and the complex integration. Because of exponential nature of the voltage force, it was not possible to obtain the analytical solution by means of elementary functions, but such difficulty can be bypassed with the complex analysis. The numerical solution obtained by Taylor series was in good agreement with the obtained explicit solution.

## 1. Introdução

A transformada de Fourier tem sido utilizada na matemática aplicada, na modelagem de problemas físicos, na estatística, e na engenharia para resolver problemas de valor inicial (PVI), e também problemas de valores de contorno, bem como equações integrais (DEBNATH; BHATTA, 2015; CHURCHILL, 1963; DAVIS, 1989; IÓRIO, 1991). Esta transformada converte equações diferenciais lineares em equações algébricas, enquanto as transformadas de Fourier em seno e cosseno reduzem certas equações diferenciais parciais, geralmente de difícil tratamento matemático, em equações diferenciais ordinárias.

A ideia central do uso da transformada de Fourier é obter a solução de uma dada equação aplicando a transformada e resolver a nova equação para depois, mediante a transformação inversa, obter a solução da equação dada em termos das variáveis originais.

Nesse trabalho, será examinada a equação diferencial linear que representa um circuito elétrico simples do tipo resistor (R), indutor (L) no qual uma função de tensão elétrica teórica,

$E(t) = E_0 e^{-at^2}$  é aplicada para fornecer energia elétrica no circuito (GARCIA, 2013), tornando o problema impossível de ser resolvido do ponto de vista analítico pelos métodos clássicos, como por exemplo, o método do fator integrante (BOYCE; DIPRIMA, 1999), mas que à luz da Teoria de Fourier e do cálculo de integrais complexas pode ser resolvido com detalhes. Para validar a qualidade da solução explícita obtida, o problema foi também analisado numericamente usando o método de Euler (RUGGIERO; LOPES, 1996) com dois diferentes conjuntos de parâmetros. Outra abordagem possível para o tratamento desse problema é utilizar a transformada de Laplace

(DEBNATH; BHATTA, 2015). Integrais impróprias, como por exemplo a integral  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt$ ,  $a > 0$ , é calculada nesse artigo, de modo conciso sem o uso de mudança de variáveis (IÓRIO, 1991, p. 190) ou utilizando o teorema do confronto como em Guidorizzi (2015, p. 88-90), ou ainda como o adotado por Debnath e Bhatta (2015, p. 639).

## 2. Materiais e Métodos

Segundo as Leis de Kirchhoff (BOYCE; DIPRIMA, 1999), em um circuito elétrico fechado a tensão aplicada  $E(t)$  (volts) é igual à soma das quedas de tensão no restante do circuito. As leis elementares da eletricidade afirmam que: (a) A queda de tensão no resistor  $R$  (ohms) é  $RI$ , onde  $I$  (ampère) é a intensidade da corrente elétrica no circuito e (b) A queda de tensão no indutor  $L$  (henries) é  $L \frac{dI}{dt}$ .

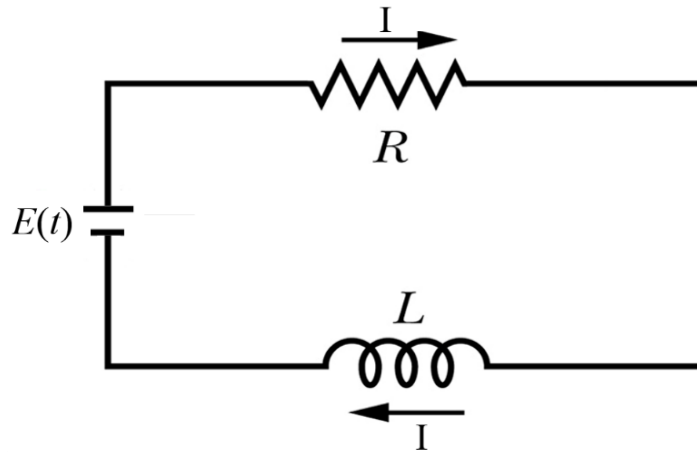
Dessa forma, fica estabelecida a equação diferencial linear de primeira ordem que descreve a corrente elétrica no sistema, dada por

$$L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = E(t) \quad (1)$$

A Figura 1 – Circuito elétrico simples do tipo RL. Figura 1 mostra o circuito analisado com a tensão dada por

$$E(t) = E_0 e^{-at^2}, \text{ com } E_0, a > 0. \quad (2)$$

Figura 1 – Circuito elétrico simples do tipo RL.



Fonte: Elaboração dos autores.

### 2.1. Método da Transformada de Fourier

A transformada de Fourier de uma função  $f(x)$ , denotada por  $F\{f(x)\} = F(\xi)$ , ou por  $F\{f(x)\} = \hat{f}(\xi)$  para  $x, \xi \in \mathbb{R}$ , é definida segundo Debnath e Bhatta (2015) pela integral

$$F\{f(x)\} = \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx \quad (3)$$

e a sua transformada inversa,  $F^{-1}\{\hat{f}(\xi)\} = f(x)$ , é dada por

$$F^{-1}\{\hat{f}(\xi)\} = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \hat{f}(\xi) d\xi \quad (4)$$

onde  $i = \sqrt{-1}$  é a unidade imaginária complexa. Pelas equações (3) e (4) fica claro que  $F$  e  $F^{-1}$  são operadores integrais.

A seguir são apresentadas duas propriedades que serão utilizadas no decorrer desse artigo.

#### 2.1.1. Propriedades

- 1)  $F\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha F\{f(x)\} + \beta F\{g(x)\}$  (Linearidade)
- 2)  $F\{f^{(n)}(x)\} = (i\xi)^n F\{f(x)\}$  (Transformada da Derivada)

A propriedade (2), embora aparentemente de cunho teórico, quando combinada com a propriedade (1), permite a redução de equações diferenciais lineares de ordem  $n$  a equações algébricas, como veremos a seguir na aplicação proposta nesse trabalho. Para lidar com as integrais complexas que aparecerão mais adiante, será usado o Teorema dos Resíduos de Cauchy (BROWN; CHURCHILL, 2015).

### 2.1.2. Teorema dos Resíduos de Cauchy

Seja  $f$  uma função analítica no conjunto aberto  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , exceto nos pontos  $z = z_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) e  $C$  um caminho fechado que envolve os pontos  $z_k$ , então

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z), z_k) \quad (5)$$

Caso o caminho  $C$  seja formado por uma semicircunferência de raio  $r$  na sua metade superior (ou inferior) mais o segmento de reta cuja representação paramétrica é  $z = \xi$  ( $-\infty \leq \xi \leq \infty$ ) do segmento do eixo real de  $z = -r$  até  $z = r$ , resulta da equação (5) que

$$\int_{-r}^r f(\xi) d\xi + \int_{C_r} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z), z_k) \quad (6)$$

onde  $C_r$  indica parte do caminho  $C$  descrito pela semicircunferência de raio  $r$ . Se o  $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r} f(z) dz = 0$ , segue da equação (6) que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(\xi) d\xi = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z), z_k) \quad (7)$$

Para o cálculo dos resíduos em polos (singularidades isoladas) será utilizado o teorema a seguir (BROWN; CHURCHILL, 2015).

### 2.1.3. Teorema

Seja  $z_0$  uma singularidade isolada de uma função  $f$ . As duas afirmações a seguir são equivalentes:

- (a)  $z_0$  é um polo de ordem  $m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) de  $f$ ;
- (b)  $f(z)$  pode ser escrita na forma

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m} \quad (8)$$

em que  $\phi(z)$  é analítica e não nula nesse polo. Além disso, caso (a) ou (b) sejam verdadeiras, então o resíduo de  $f(z)$  nesse polo é dado por

$$\text{Res}(f(z), z_0) = \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} \quad (9)$$

## 2.2. Método da Série de Taylor

Os métodos que usam o desenvolvimento em série de Taylor de uma função  $y(x)$  constituem uma classe do chamado método de passo-simples, os quais teoricamente fornecem a solução para qualquer equação diferencial, desde que a função incógnita seja continuamente diferenciável de ordem infinita em uma vizinhança de um ponto determinado  $x_n$  (RUGGIERO; LOPES, 1996).

Seja  $y_n^{(j)}$  a aproximação para a  $j$ -ésima derivada da função  $y = y(x)$  no ponto  $x_n$ , a qual é denotada por  $y_n^{(j)} \cong \frac{d^j y(x_n)}{dx^j}$ . O espaçamento da malha unidimensional é constante e é indicado por  $h$ , sendo  $h = x_{n+1} - x_n$ . Segundo Ruggiero e Lopes (1996), tem-se

$$y_{n+1}(x) \cong y_n + y_n' h + y_n'' \frac{h^2}{2!} + \dots + y_n^{(k)} \frac{h^k}{k!}. \quad (10)$$

A equação (10) representa o método da série de Taylor de ordem  $k$ . Para a primeira ordem, a equação (10) reescreve-se como

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \quad (11)$$

onde  $y_n' = f(x_n, y_n)$ .

A equação (11) sugere um método para resolver o problema de valor inicial (12), sendo conhecido como o método de Euler ou de Taylor de primeira ordem (RUGGIERO; LOPES, 1996).

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \quad (12)$$

em que  $y_0 = y(x_0)$  é um ponto de passagem conhecido da solução da equação diferencial.

## 3. Resultados e Discussões

Aplicando a transformada de Fourier,  $F\{f(t)\} = F(\xi)$  na equação (1):

$L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = E_0 e^{-at}$ , e usando as propriedades 1 e 2 da seção 2.1.1, tem-se a sequência de igualdades

$$F\left\{L \frac{dI}{dt} + RI\right\} = F\{E\} \quad (13)$$

$$LF\left\{L \frac{dI}{dt}\right\} + RF\{f\} = F\{E\} \quad (14)$$

$$i\xi L \hat{I} + R \hat{I} = \hat{E} \quad (15)$$

ou, em termos algébricos,

$$\hat{I} = \frac{\hat{E}}{i\xi L + R} \tag{16}$$

Desse modo, obtendo  $\hat{I}$  na equação (16), a intensidade da corrente elétrica do circuito,  $I$ , pode ser também obtida por meio da transformada inversa dada pela equação (4). Para isso, é preciso calcular a transformada de Fourier da função de tensão dada pela equação (2). Logo, tem-se

$$\hat{E}(\xi) = \frac{E_o}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-it\xi} dt \tag{17}$$

Fatorando o expoente do integrando, tem-se

$$\hat{E}(\xi) = \frac{E_o}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-a\left(t+\frac{i\xi}{2a}\right)^2 - \frac{\xi^2}{4a}\right)} dt \tag{18}$$

Fazendo  $z = t + \frac{i\xi}{2a}$ , a equação (18) reescreve-se na forma

$$\hat{E}(\xi) = \frac{E_o}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-az^2} dz \tag{19}$$

A integral do lado direito da equação (19) é dada segundo Debnath e Bhatta (2015) por

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-az^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{20}$$

Das equações (19) e (20) tem-se que

$$\hat{E}(\xi) = \frac{E_o}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \tag{21}$$

Da equação (16), aplicando a transformada inversa de Fourier e usando o resultado obtido na equação (21), tem-se a intensidade da corrente elétrica  $I(t)$  do circuito dada por

$$I(t) = \frac{E_o}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2a}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4a}} e^{-it\xi}}{i\xi L + R} d\xi \tag{22}$$

Para calcular a integral na equação (22) recorreremos ao teorema dos resíduos de Cauchy 2.1.2 e ao teorema 2.1.3.

Denotemos o integrando da equação (22) por  $f(z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{4a}} e^{-itz}}{iLz + R}$ . Então, esta função complexa

pode ser escrita como

$$f(z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{4a}} e^{-itz}}{iL(z - \frac{iR}{L})}$$

onde podemos observar que  $f(z)$  tem um único polo em  $z_0 = \frac{iR}{L}$ . Desse modo, aplicando o teorema de Cauchy para os resíduos (BROWN; CHURCHILL, 2015), tem-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_0)$$

Das equações (8) e (9) escreve-se  $f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)}$ , onde  $\phi(z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{4a}} e^{-itz}}{iL}$ .

Sabendo que  $\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \phi(z_0)$ , segue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4a}} e^{-it\xi}}{i\xi L + R} d\xi = 2\pi i \left( \frac{e^{-\frac{z_0^2}{4a}} e^{-itz_0}}{iL} \right) = \frac{2\pi}{L} e^{\frac{R^2 - 4atLR}{4aL^2}} \quad (23)$$

Das equações (22) e (23) obtemos a expressão para a intensidade  $I(t)$  do circuito elétrico dada por

$$I(t) = \left( \frac{E_o}{2\sqrt{\pi}\sqrt{a}} \right) 2\pi i \phi(z_0) \quad (24)$$

Assim,

$$I(t) = \frac{E_o \sqrt{\pi}}{\sqrt{a} L} e^{\frac{R^2 - 4atLR}{4aL^2}}, \quad t > 0 \quad (25)$$

Note que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} I(t) = \frac{E_o \sqrt{\pi}}{\sqrt{a} L} e^{\frac{R^2}{4aL^2}} \quad (26)$$

e que a intensidade da corrente tende a zero quando  $t \rightarrow \infty$ , o que era de se esperar.

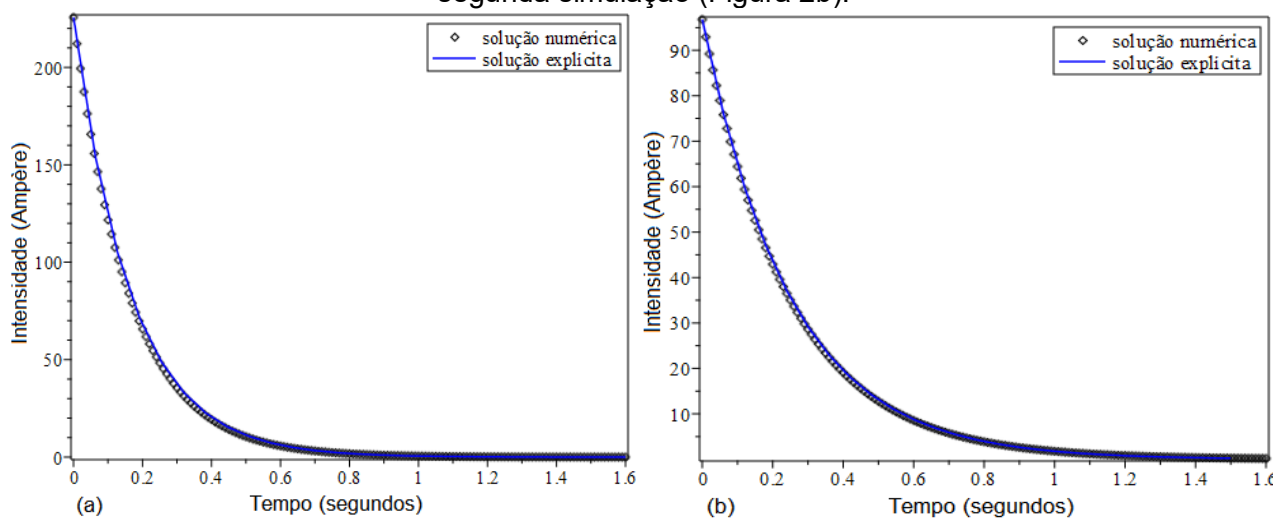
De modo a validar a solução explícita obtida para a intensidade do circuito elétrico analisado nesse estudo, duas simulações numéricas utilizando o método de Euler (RUGGIERO; LOPES, 1996) foram realizadas com dois diferentes conjuntos de parâmetros, tendo como ponto conhecido

o valor inicial  $I(0) = \frac{E_o \sqrt{\pi}}{\sqrt{a} L} e^{\frac{R^2}{4aL^2}}$  dado pela equação (26).

Dois simulações foram realizadas utilizando a equação (1). Na primeira, foram considerados os seguintes parâmetros:  $a = 2, R = 3, L = 0,5$  e  $E_o = 1$ , e na segunda,  $a = 1, R = 8, L = 2$  e

$E_o = 2$ . Na Figura 2 podem ser vistos os gráficos da intensidade do circuito elétrico obtido com o uso da equação (25) e por meio da solução numérica com o método da série de Taylor de ordem um (Equação (11)), com espaçamento  $h = 0,01$  na malha temporal em ambas as simulações com boa concordância entre os dados calculados pela solução explícita e a resolução numérica adotada.

Figura 2 – Gráficos das intensidades de corrente elétrica. Solução via Transformada de Fourier e Solução numérica via o Método de Taylor de 1ª ordem da primeira simulação (Figura 2a) e da segunda simulação (Figura 2b).



Fonte: Dados da pesquisa.

Para o tempo  $t \geq 0$ , nota-se igualmente uma boa concordância da solução numérica com a solução explícita obtida usando a transformada de Fourier e a integração complexa em ambas as simulações, conforme pode ser observado no Quadro 1, considerando oito pontos representativos da malha temporal.

Quadro 1 – Comparação dos resultados, explícito  $I_{1,2}(t)$  e numérico  $I_{1,2}^N(t[k])$ , das simulações realizadas.

| Tempo(s)<br>$t[k]$ | Intensidade<br>$I_1(t)$ | Intensidade<br>$I_1^N(t[k])$ | Erro Absoluto<br>$ I_1(t) - I_1^N(t[k]) $ | Intensidade<br>$I_2(t)$ | Intensidade<br>$I_2^N(t[k])$ | Erro Absoluto<br>$ I_2(t) - I_2^N(t[k]) $ |
|--------------------|-------------------------|------------------------------|---|-------------------------|------------------------------|---|
| 0                  | 225,63949               | 225,63949                    | 0   | 96,77270                | 96,77270                     | 0   |
| 0,2                | 67,96131                | 65,68852                     | 2,27279                                   | 43,48278                | 42,91121                     | 0,57157                                   |
| 0,4                | 19,24992                | 20,46955                     | 1,21963                                   | 19,53807                | 19,09336                     | 0,44471                                   |
| 0,6                | 6,16531                 | 5,72374                      | 0,4415663                                 | 8,77902                 | 8,54686                      | 0,23216                                   |
| 0,8                | 1,85696                 | 1,74613                      | 0,1108269                                 | 3,94467                 | 3,86218                      | 0,082484                                  |
| 1,0                | 0,55930                 | 0,55154                      | 0,0077629                                 | 1,77245                 | 1,76834                      | 0,004115                                  |
| 1,2                | 0,16846                 | 0,18018                      | 0,0117197                                 | 0,79641                 | 0,82263                      | 0,02622                                   |
| 1,4                | 0,05074                 | 0,05999                      | 0,0092585                                 | 0,35785                 | 0,38898                      | 0,03113                                   |
| 1,6                | 0,01993                 | 0,01528                      | 0,0046504                                 | 0,16079                 | 0,18643                      | 0,02564                                   |

Fonte: Dados da pesquisa.



Observa-se que na maioria dos problemas em engenharia, as soluções numéricas são as mais empregadas, tendo em vista a impossibilidade de soluções analíticas ou explícitas serem obtidas, ou mesmo, a dificuldade em obtê-las por meio do formalismo matemático exigido. Porém, deve ser em princípio, a solução exata preferível, em oposição a soluções numéricas, como por exemplo, quando a solução do problema exigir uma acuidade, que pelo procedimento numérico exigiria um método robusto com elevado esforço computacional, ou quando a solução numérica apresentar problemas com a convergência.

A metodologia apresentada nesse texto pode ser ampliada para equações de ordem mais elevada, como por exemplo, em problemas mais gerais de circuitos elétricos, tal como a equação diferencial que rege a carga elétrica de um circuito do tipo resistor, capacitor, indutor e com a presença de uma força eletromotriz.

#### 4. Conclusões

Na aplicação apresentada nesse estudo, embora a solução analítica do problema não tenha sido expressa como uma combinação de funções elementares devido à natureza da função definidora da força eletromotriz empregada, foi possível, usando a transformada de Fourier e a integração complexa, obter uma expressão explícita envolvendo os parâmetros do modelo usado, para representar a intensidade da corrente elétrica do circuito examinado em função do tempo. O método numérico, da série de Taylor de ordem um, que foi aplicado à equação diferencial do problema proposto, mostra boa concordância com os resultados obtidos com a expressão explícita.

#### Referências

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

BROWN, J. W.; CHURCHILL, R. V. **Variáveis complexas e aplicações**. 9. ed. Porto Alegre: Bookman, 2015.

CHURCHILL R. V. **Fourier Series and Boundary Value Problems**. 2. ed. McGraw-Hill Kogakusha, 1963.

DAVIS, H .F. **A Fourier Series and Orthogonal Functions**. New York: Dover Publications, 1989.

DEBNATH, L.; BHATTA, D. **Integral Transforms and their applications**. 3. ed. Boca Raton, Florida: CRC Press, 2015.

GARCIA, C. **Modelagem e Simulação de Processos Industriais e de Sistemas Eletromecânicos**. 2. ed. São Paulo: Edusp, 2013.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo**. v. 3. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

IÓRIO, V. **EDP: Um Curso de Graduação**. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 1991.

RUGGIERO M. A. G.; LOPES V. L. R. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1996.

### Apêndice A

Mostraremos como a equação (15) pode ser calculada, em oposição à resolução concisa da integral dada pelas equações (16) e (17), conforme desenvolvido nesse trabalho. O objetivo é obter

$$\hat{E}(\xi) = \frac{E_o}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-it\xi} dt \quad \text{(equação (15)) usando a sugestão proposta por Debnath e Bhatta (2015)}$$

que consiste na derivação do operador integral  $\hat{E}(\xi)$  para obter

$$\frac{d\hat{E}(\xi)}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{E_o}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-it\xi} dt \right] \quad \text{(a.1)}$$

ou,

$$\frac{d\hat{E}(\xi)}{d\xi} = \frac{E_o i}{2a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-2a\xi) e^{-at^2} e^{-it\xi} dt \quad \text{(a.2)}$$

Fazendo  $u = e^{-at^2}$ ,  $v = e^{-it\xi}$  e resolvendo a integral do lado direito da equação (a.2) por partes, obtemos

$$\frac{d\hat{E}(\xi)}{d\xi} = -\frac{E_o \xi}{2a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-it\xi} dt \quad \text{(a.3)}$$

Das equações (15) e (a.3) resulta a equação diferencial autônoma dada por

$$\frac{d\hat{E}(\xi)}{d\xi} = -\frac{E_o \xi}{2a} \hat{E}(\xi) \quad \text{(a.4)}$$

que pode ser resolvida por separação de variáveis

$$\frac{d\hat{E}(\xi)}{\hat{E}(\xi)} = -\frac{E_o \xi}{2a} d\xi \quad \text{(a.5)}$$

A solução bem conhecida dessa equação diferencial é obtida por meio de

$$\hat{E}(\xi) = A(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \quad \text{(a.6)}$$

onde  $A(\xi)$  é constante. Fazendo  $\xi = 0$  na equação (a.6) e usando a equação (15) resulta

$$\hat{E}(0) = A(0) = \frac{E_o}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt \quad \text{(a.7)}$$

Das equações (a.6) e (a.7) e da equação (18) segue que

$$\hat{E}(\xi) = \frac{E_o}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \quad \text{(a.8)}$$

em concordância com a equação (19).

## Apêndice B

Cálculo da integral  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt$ .

Essa integral é dada por meio de uma tabela de transformadas de Fourier por Debnath e Bhatta (2015), ou com o uso de mudança de variáveis feito por Lório (1991), ou ainda usando o teorema do confronto como fez Guidorizzi (2015). A nossa solução é proposta da seguinte forma: a função erro,  $erf(x)$  é definida (BOYCE; DIPRIMA, 1999) por

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\alpha^2} d\alpha \quad (b.9)$$

Fazendo  $u = \alpha\sqrt{a}$ , resulta da equação (42) que a integral do segundo lado da equação pode ser escrita como

$$\int_0^x e^{-a\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{\sqrt{ax}} e^{-u^2} du \quad (b.10)$$

ou, ainda

$$\int_0^x e^{-a\alpha^2} d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{4a}} erf(\sqrt{ax}) \quad (b.11)$$

Como  $erf(\infty) = 1$  (DEBNATH; BHATTA, 2015), tem-se da equação (b.11) quando  $x \rightarrow \infty$  que

$$\int_0^{\infty} e^{-a\alpha^2} d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{4a}} \quad (b.12)$$

ou, usando a paridade do integrando da equação (b.12)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\alpha^2} d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (b.13)$$

Confirmando, desse modo, o resultado obtido na equação (18).

## Apêndice C

Para gerar os gráficos (Figura 2) e os dados do Quadro 1, foi utilizado o *software* Maple, por meio dos seguintes comandos:

```
[> restart; with(DEtools); with(linalg); with(plots);
[> eq := L*(diff(i(t), t))+R*i(t) = E(t); dsolve({eq, i(0) = Eo}, i(t));
[> h := 1/100.; t[0] := 0.; i[0] := Eo*sqrt(Pi)*exp(R^2/(4*a*L^2))/(L*sqrt(a)); E := t -> Eo*exp(-a*t^2)
[> L := 2.; a := 1.; R := 8.; Eo := 2.; # dados da 2ª simulação
[> sol := Eo*sqrt(Pi)*exp((-4*L*R*a*t+R^2)/(4*a*L^2))/(L*sqrt(a)); I0 := evalf(subs(t = 0., sol));
```

---

```
[> for k to 160 do t[k] := h*k+t[0]; i[k] := h*(E(t[k-1])-R*i[k-1])/L+i[k-1] end do;
[> c1 := pointplot({seq([t[k], i[k]], k = 0 .. 160)});
[> c2 := implicitplot(i = Eo*sqrt(Pi)*exp((-4*L*R*a*t+R^2)/(4*a*L^2))/(L*sqrt(a)), t = 0 .. 1.5, i
= 0 .. 97, color = blue);
[> display(c1, c2)
```