A matemática escolar a partir da perspectiva wittgensteiniana: entre normatividade e empirismo

School mathematics from the Wittgensteinian perspective: between normativity and empiricism

Marcelo Antunes
Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências: Química da Vida e Saúde, Porto Alegre, RS, Brasil
marcelo.antunes@ufrgs.br

Samuel Edmundo Lopez Bello
Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Programa de Pós-Graduação em Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências: Química da Vida e Saúde Porto Alegre, RS, Brasil
samuel.bello@ufrgs.br

Suelen Assunção Santos
Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências: Química da Vida e Saúde, Porto Alegre, RS, Brasil
suelenass@icloud.com

Informações do Artigo

Histórico do Artigo
Submissão: 30 de março de 2017.
Aceite: 09 de maio de 2017.

Palavras-chave
Wittgenstein
Normatividade
Regras

Resumo

Nosso propósito, neste texto, é promover uma discussão sobre a matemática escolar através de alguns conceitos da filosofia do Wittgenstein das Investigações Filosóficas. Regulamos nossas lentes para a escrita matemática, em específico, para as questões relacionadas às proposições normativas e empíricas e a questão de seguir regras, na concepção wittgensteiniana. Como pano de fundo a estas investigações, erguem-se desconfianças à necessidade de utilização de relações externas à matemática. Amparados na filosofia da linguagem de Wittgenstein, traçamos as linhas do que chamamos de busca dos significados dos objetos matemáticos, olhando em direção ao normativo, em detrimento do descritivo. Intencionamos mostrar que os significados matemáticos não se encontram no campo do empírico, mas teriam eles a função de servir de padrão de correção, por ocasião da comparação com a experiência. Com o intuito de realizar uma conexão entre a filosofia teórica apresentada e alguns conceitos matemáticos, sugerimos alguns exemplos que são apresentados ao longo do texto.

Keywords
Wittgenstein
Normativity
Rules

Abstract

Our purpose in this text is to promote a discussion of school mathematics through some concepts of Wittgenstein's philosophy of Philosophical Investigations. We regulate our lenses for mathematical writing, in particular, to the normative issues and empirical propositions and the matter of following rules, in Wittgenstein's conception. As a backdrop to these investigations, rise up suspicions regarding the need to use external relationships to mathematics. Supported by the philosophy of Wittgenstein's language, we draw the lines of what we call search of the meaning of mathematical objects, looking toward the normative, rather than descriptive. We intend to show that the mathematical meanings are not in the empirical field, but they would have the function of serving as correction default, when compared with the experience. In order to make a connection between the theoretical philosophy presented and some mathematical concepts, we suggest some examples that are presented throughout the text.

1. Introdução

O tema de pesquisa definido para este artigo tem por objetivo sugerir uma reflexão sobre o tratamento que é dado às proposições matemáticas, investigando se o sentido atribuído a estas é de natureza normativa ou empírica.

Nosso problema de pesquisa situa-se especificamente na análise do sentido que se confere às proposições matemáticas dentro da sala de aula, tendo como objetivo geral uma discussão sobre as diversas possibilidades de atribuição de sentidos aos conceitos matemáticos. Para isso, faremos uso de balizas teóricas filiadas à filosofia do Wittgenstein das Investigações Filosóficas, com o intuito de ratificar algumas caraterísticas da Matemática em sua forma de escrita, fazendo uma investigação entre as proposições ditas empíricas ou normativas, e sugerindo, através de um olhar wittgensteiniano, a que lugar se referem tais proposições. Estamos inclinados, da mesma forma, a promover uma discussão sobre a importância de seguir regras dentro da Matemática, contribuindo, desta forma, para uma melhor compreensão dos sentidos que podem ser atribuídos aos conceitos matemáticos estudados em sala de aula.

O texto está estruturado de forma a apresentar exemplos de situações ocorridas em sala de aula, advindos da docência dos autores e do compartilhamento de experiências e relatos de muitos colegas professores de Matemática. A pesquisa possui natureza teórica, fundamentando-se na análise de artigos, teses e livros principalmente, na área da filosofia da Matemática.

2. Linguagem Wittgensteiniana: Usos Normativos e Descritivos

A *Virada Linguística*[1] , movimento que tirou da linguagem a função apenas representativa e sugeriu-lhe um papel constituidor da realidade, teve em Wittgenstein, um de seus principais expoentes. O movimento carrega um olhar atencioso sobre a constituição dos significados. Para Bello (2010, p. 550), o significado dos objetos (sejam estes materiais ou sociais) não estaria neles (nos objetos) em si, mas na construção linguística que os define. Os sentidos que atribuímos às nossas formulações linguísticas não advêm de uma realidade fora da linguagem, alicerçada em exemplos e situações de cunho empírico. Os objetos matemáticos não seriam passíveis de serem “descobertos” (pelo aluno), ao menos não no mesmo sentido daquele dado pelas chamadas Ciências da Natureza. Para Wittgenstein, a linguagem não assumiria um papel referencial, estabelecendo relações diretas entre o objeto e seu significado, em uma espécie de mimetismo. O filósofo acredita que o significado se dá através do uso que se faz com as palavras e promove o questionamento acerca da natureza das proposições matemáticas, que seriam diferentes das proposições da linguagem ordinária. Afirmações corriqueiras como “meu irmão comprou um terreno de ‘12’ por ‘18’” podem ser facilmente verificadas por seu caráter empírico, enquanto frases como

[1] Movimento filosófico que atribui à linguagem o papel de predominância na construção da realidade.

"a área de um retângulo de lados a e b é dada pelo produto $a \times b$" não. Esta última possui, diríamos, uma natureza normativa, pois ela não descreve, testa ou verifica.

De acordo com Gottschalk (2007), essa distinção – em que as proposições seriam de dois tipos: normativas ou descritivas – também não seria rígida, podendo assumir uma forma ou outra, dependendo do contexto da enunciação. O que é importante ressaltar, continua a autora, é que a função de uma proposição é determinada pelo uso que ela assume em determinado contexto, adotando uma roupagem pragmática.

Na filosofia de Wittgenstein, as proposições gramaticais são adequadas e suficientes para conceber os conceitos matemáticos, e seria um equívoco trazer da realidade externa para a Matemática as justificativas para seus procedimentos, bem como seus sentidos, pois todas as proposições da Matemática possuiriam caráter normativo. Apenas ao serem aplicadas ao empírico é que poderiam adquirir outra função, de natureza descritiva.

Uma proposição matemática não estaria sujeita a ser testada, dada sua natureza normativa. Sua função é a de pavimentar um caminho a ser seguido. Ela serve de parâmetro a determinações empíricas (externas) – e não o contrário. São os experimentos das ciências que devem se pautar na normatividade das proposições matemáticas. No entanto, estas, apesar de seguirem regras e de não serem empíricas, podem ser *utilizadas* de modo empírico. Para Gottshalk (2008, p. 81),

> A atividade matemática se distingue dos procedimentos empíricos. Mas isto não significa que as proposições matemáticas não tenham nenhuma relação com a experiência; ao contrário, as proposições da matemática organizam nossa experiência empírica, isto é, têm uma função normativa.

Sugerimos um exemplo para ilustrar o pensamento da autora, no qual consideramos a seguinte situação: *Um caminhão carrega 36 toneladas de soja em uma rodovia, entre duas cidades. Quantas toneladas de soja carregarão 5 caminhões?* Ora, a regra matemática dirá que devemos fazer 5 x 36 = 180, no entanto, possivelmente não chegarão todos os grãos ao seu destino (em consequência das dificuldades de vedação e da retirada dos grãos, por exemplo). Haverá, aqui, uma discordância entre o campo empírico e o normativo, porém essa verificação empírica não invalida o processo normativo. Ou, do mesmo modo, conforme Wittgenstein (2003, p. 264): "Dois homens que vivem em paz entre si e três homens que vivem em paz entre si não fazem cinco homens que vivem em paz entre si. Mas isso não significa que 2 + 3 não seja mais 5; é apenas que a adição não pode ser aplicada dessa maneira".

Disso, fica confortável inferir que, acerca das proposições empíricas, objeto e experimento são independentes, enquanto as proposições normativas, prova e significado não são independentes. Se falamos de um resultado como expressão de uma prova, então ele já existe, já se sabe que podemos procurá-lo, diferente de um experimento. Wittgenstein (2003, p. 288) afirma que

> [...] se poderia dizer nestes termos; quando eu procuro alguma coisa, digamos, o Pólo Norte, ou uma casa em Londres, posso fazer uma descrição completa disso que procuro, antes de tê-lo encontrado (ou ter descoberto que essa coisa não existe), e, neste caso, esta descrição será logicamente aceitável.

Os enunciados normativos parecem ser mais simples, pois eles dizem o que fazer. São deterministas. Para Carmo (2012, p. 384), “enunciados não-normativos, pelo contrário, não dizem o que fazer, nem quais atitudes tomar, mas, antes são enunciados que devem dizer como as coisas estão”. Considere as seguintes sentenças:

a) O quadrado de um número par é sempre par;
b) $4 + 1 = 5$;
c) Existem quadrados que possuem área maior do que retângulos;
d) Um compasso consegue escrever um círculo com raio superior a um metro.

As sentenças (a) e (b) possuem conteúdo normativo, ao passo que as sentenças (c) e (d) possuem conteúdo descritivo. Em (a) e (b) estamos diante de uma regra, uma ordem, um procedimento que nos diz o que fazer, o que esperar, como proceder. Em (c) e (d) há indicativo daquilo que pode ocorrer; a descrição de um comportamento.

3. A Matemática e o Seguir Regras

Dessa maneira, notamos a necessidade de um sistema que possa organizar nossas experiências e práticas; alguma coisa que possa estabelecer uma ordem e que aponte uma direção a ser seguida. Falamos de regras, de instruções. De comandos a serem seguidos, por exemplo, em um procedimento matemático como a multiplicação de matrizes.

As regras têm um papel importante na concepção da linguagem no Wittgenstein das Investigações Filosóficas, uma vez que, segundo Glock (1998, p. 312), elas “são padrões de correção; não descrevem, por exemplo, como as pessoas falam mas definem o que é falar com sentido ou corretamente”. Desde cedo estamos familiarizados com as regras em diversos espaços e situações. Elas estão imersas em todas as nossas práticas sociais. As regras ficam evidentes quando, por exemplo, estamos em uma solenidade fúnebre – espera-se um comportamento comedido –, acompanhamos uma sessão no cinema – em que o silêncio é valorizado –, respeitamos as leis de trânsito. Nestes casos, é esperado um determinado comportamento dos agentes, pois as regras possuem a função de orientar nossas ações.

No entanto, é primordial lembrar que, sobretudo, tratamos de possibilidades, pois em todos esses casos citados é nossa escolha seguir essas regras ou outras. Certamente, paga-se um preço por isto. Consoante a Moreno (1993, p. 115), “não estamos analisando experiências possíveis, mas sim formas possíveis de expressões linguísticas, isto é, usos possíveis das palavras”.

Na Matemática, porém, as regras possuem caráter absolutamente normativo. Elas precisam ser seguidas. Quando observamos um enunciado, como por exemplo: $\{(\exists\ \mathbf{x} \in \mathbb{N})/(\mathbf{4} < \mathbf{x} < \mathbf{6}\ \}$,, não podemos estabelecer um outro critério de escolha para possíveis valores de $\mathbf{x}$, pois este, já está determinado pela sentença (regra) matemática.

Para Gottschalk (2007, p. 465),

> Ao aplicarmos uma palavra [uma proposição matemática], estamos seguindo regras tácitas na linguagem, do mesmo modo que ao movermos uma peça qualquer do jogo de xadrez estamos agindo de acordo com as regras do xadrez. Não podemos mover a torre do mesmo modo que movemos o cavalo ou um peão. As regras que seguimos para mover a torre são diferentes das que seguimos ao mover o cavalo ou um peão. São essas regras que orientam o movimento dessas peças, ou melhor, ao jogarmos xadrez, movimentamos as peças guiados por suas regras. São elas que dão sentido aos movimentos que fazemos com as peças do jogo.

Os conhecidos axiomas de Peano[2] fundamentam bem as leis gerais da aritmética, sem necessidade de mediatizar suas proposições com relações externas a ela. Ora, 2 + 2 = 4, por uma questão normativa, jamais por uma questão experimental. Este não é um fato que se possa “descobrir” através de relações empíricas, mas uma necessidade que se estabeleceu por ordem dos usuários da aritmética, de forma consensual. Wittgenstein (2003, p. 262) propõe que,

> Se você quer saber o que $2 + 2 = 4$ significa, tem de perguntar como o resolvemos. Isso significa que consideramos o processo de cálculo como a coisa essencial, e é assim que encaramos a questão na vida comum, pelo menos no que diz respeito aos números que temos que calcular. Não devemos ter vergonha de considerar os números e somas da mesma maneira que a aritmética cotidiana de todo comerciante. Na vida cotidiana, não resolvemos 2 + 2 = 4 nem qualquer das regras da tabela de multiplicação: nós os temos como certos como axiomas e os usamos para calcular”.

Com relação, em específico, à aritmética, vemos que nos traços de sobrevivência da história humana, em algum momento, emergiu a necessidade de contar elementos, sejam eles pedras, frutos ou ovelhas. Mais tarde, a aritmética foi formalizada e se desenvolveu independente de formas exteriores a ela. Na acepção de Silveira *et al.* (2015, p. 4),

> O campo próprio da matemática se desenvolveu por necessidades lógicas. Necessidades que surgem no interior da linguagem matemática, para que esta continue coerente com o próprio sistema de regras e convenções que gerou. Por isso, o movimento desse campo é autônomo, autorregulado e dessa forma se torna independente.

Não só a aritmética é autônoma, mas outras formas de se calcular podem ser independentes, como, por exemplo, os cálculos efetuados em outros campos da vida que não necessitam da escrita. Entendemos que o processo de se realizar um cálculo, como o troco, dito “de cabeça”, é de natureza distinta ao do cálculo realizado na escola, simplesmente porque responde a outra finalidade e está envolto a uma produção diferente à da escrita escolar. Isso pode trazer um pouco de confusão quando pensamos que a solução para o problema da escrita matemática seja, como sugerem muitos, o de contextualizar. Silveira e Da Silva (2016, p. 471) entendem que

[2] De acordo com Lima (2009, p. 1), podemos escrever os axiomas de Peano da seguinte forma:
Axioma 1: “Todo número natural tem um sucessor, que ainda é um número natural, números diferentes têm sucessores diferentes”.
Axioma 2: “Existe um único número natural 1 que não é sucessor de nenhum outro”.
Axioma 3: “Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e contém também o sucessor de cada um dos seus elementos, então esse conjunto contém todos os números naturais”.

> Cálculo de cabeça não configura um processo mental interno, mas uma habilidade de cálculo que pode ser desenvolvida, que se apoia em regras e procedimentos matemáticos públicos e que, portanto, não basta contextualizar a matemática e valorizar os conhecimentos do aluno, uma vez que para diferentes tipos de cálculo são necessárias diferentes técnicas.

Essas reflexões nos autorizam a repensar os domínios da aritmética – o mesmo exercício pode ser feito com relação a outros campos da matemática – sem a necessidade de atrelar seus fundamentos a experiências externas. Vejamos, por exemplo, o caso da raiz quadrada. Podemos afirmar que a raiz quadrada do número 9 existe, independentemente da existência de um quadrado de lado 3. Nas palavras de Wittgenstein (2003, p. 242), "posso fazer uma faca sem me preocupar com os tipos de material que cortarei com ela: isto será evidente em breve".

A questão de aprender a seguir regras, para o autor, é central, principalmente no que tange a sua constituição e seus padrões de correção. Trazemos um exemplo dado por ele, quando investiga a possibilidade de ensinar a série "+1", ou seja, "...0, 1, 2, 3, 4, ...":

> Deixemos agora o aluno continuar uma série (digamos "+2") para além de 1000 – e ele escreve 1000, 1004, 1008, 1012. Nós lhe dizemos: "Olhe o que faz!" – Não nos compreende. Dizemos: "Você devia adicionar *dois*; olhe como você começou a série!". – Ele responde: "Sim; não está correto? Pensei que era assim que *deveria* fazê-lo". – Ou suponha que ele diga, apontando para a série: "Mas eu continuei do mesmo modo!". – Não nos ajudaria em nada dizer: "Mas você não vê que...?" e repetir os velhos exemplos e as velhas elucidações. – Em tal caso, diríamos, talvez: esta pessoa, por sua própria natureza, compreende aquela ordem, segundo nossa elucidação, do mesmo modo como nós a compreenderíamos: "Adicione 2 até 1000, 4 até 2000, 6 até 3000 e assim por diante" (WITTGENSTEIN, 1999, p. 185).

Essas questões nos levam a pensar o que seria seguir de maneira correta a regra "+2"? Para Child (2013), Wittgenstein enxerga a atividade de seguir uma regra como uma "prática", um uso ou costume que está instituído. Completa o filósofo, "Eu simplesmente faço o que vejo naturalmente, dado o meu treinamento: 'Obedeço a regra cegamente'" (WITTGENSTEIN, 1999, p. 219).

4. Articulações entre a Prática Matemática e a Normatividade

Anteriormente, foi comentado que no entendimento de Wittgenstein (1999), a prova e o significado seriam dependentes e associados, como parte de um processo único. Nesse sentido, a obtenção do resultado de uma prova estaria condicionada a seu desenvolvimento. Isso fica evidente no seguinte exemplo: "Calculando-se 1/4 de 40 chegamos ao resultado 10". Essa é uma afirmação eminentemente normativa. Não há como escapar do resultado, o qual encontra-se amarrado ao cálculo. De outra forma, na afirmação "Alguém multiplicou 1/4 por 40 e obteve 10", não há ligação do processo de cálculo à resposta, as regras não são tão evidentes, constituindo-se o processo de maneira independente do resultado. O resultado obtido poderia ter sido outro – caso houvesse algum erro, pois o procedimento está em estreita dependência às condições empíricas do agente que executa o cálculo. Trata-se de como alguém fez ou obteve algo; é uma descrição. Glock (1998, p. 297) afirma que "a proposição '2 + 2 = 4' estipula o que pode ser considerado como uma descrição inteligível da realidade, e funciona como uma regra de inferência empírica, por exemplo: ‘Fiz duas tortas e depois mais duas; logo, fiz um total de quatro tortas’”.

Uma questão que nos parece pertinente é a discussão quanto à natureza de alguns erros cometidos pelos estudantes em sala de aula. Alguns desses erros podem causar confusão quanto ao seu diagnóstico. Imaginemos o singelo caso de, em um exercício rotineiro, um aluno ser solicitado a realizar a fatoração do número 150 e apresente a seguinte solução:

$$\begin{array}{r|l} 150 & 10 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

O que pode-se dizer desse aluno? Observa-se, primeiramente, o que diz o teorema fundamental da Aritmética para números naturais: “Todo número natural não-nulo e diferente de 1 possui uma fatoração em fatores primos. Além disso, tal fatoração é única se exigirmos que ela seja escrita com os primos listado em ordem não-decrescente.” (RIPPOL *et al.*, 2006, p. 44).

Responder se esse aluno sabe fatorar, neste caso, dependeria daquilo que entendemos por *compreender*. Em termos wittgensteinianos, explica Gottschalk (2008), compreender não é um processo mental, mas possuir a capacidade de dominar uma técnica, de seguir uma regra. É na observância do “manuseio das ferramentas”, no entendimento daquilo que faz sentido e na obediência às regras, que poderemos nos apoiar para responder a esta pergunta. Para Wittgenstein (1999, p. 150), “A gramática da palavra ‘saber’ goza de estreito parentesco com a gramática das palavras ‘poder’, ‘ser capaz’. Mas também com a gramática da palavra ‘compreender’ (‘Dominar’ uma técnica)”.

Nesses termos, ao analisar o que foi realizado pelo aluno, percebemos que a regra não foi completamente *apreendida* por ele, pois não foram seguidas as determinações de se realizar o processo da fatoração em uma ordem não-decrescente (o que não estava sendo pedido no enunciado) e a de utilizar apenas números primos. Isto posto, parece-nos que estamos autorizados, sob esta perspectiva, a afirmar que o conceito de fatoração não foi compreendido pelo aluno.

No entanto, alguém poderia ser levado a pensar que o aluno domina o conceito, pois promove (não da maneira como a gramática solicita) a realização da fatoração. Ora, a decomposição ocorreu de forma correta. O número, alguém poderia dizer, pode ser expresso por um produto de fatores.

Arriscamos dizer, neste caso, que há um entendimento adequado da maneira como se realiza a fatoração, pois o processo de decompor um número foi apreendido. O *erro* cometido não foi conceitual, mas sim de natureza normativa, foi procedimental.

Este parece ser o mesmo caso da resolução da operação de adição, como mostramos a seguir:

$$\begin{array}{r} 36 \\ +\ 15 \\ \hline 411 \end{array}$$

Neste exemplo, um aluno é solicitado a realizar a operação de adição entre dois números naturais. Ao ser questionado sobre esse procedimento, ele responde prontamente: “6 mais 5 é 11, e 3 mais 1 é 4!”. Sua certeza sobre estes resultados o encorajam a acreditar que ele obteve êxito no exercício. De forma muito semelhante, alguns alunos têm apresentado a resolução de multiplicações da seguinte maneira:

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times\ 15 \\ \hline 330 \end{array}$$

Do mesmo modo, percebemos que há um entendimento adequado da operação de multiplicação. O que se mostra problemático e provoca o erro é a não apreensão das regras, a desobediência – ou ignorância – dos procedimentos que permitem operar os algoritmos e chegar ao resultado esperado. Não houve equívoco em relação às práticas de adicionar e multiplicar, mas sim um erro gramatical.

Pensemos, agora, nas aulas de sequências. Um professor que deseja apresentar as progressões geométricas começa mostrando a sequência 2, 4, ... a seus alunos. Se o professor não estabelecer qual é a regra a ser seguida, nada poderá ser dito. Alguém que arrisque “é 6, 8, 10” poderia estar pensando em uma progressão aritmética. Talvez, um palpite razoável seja “8, 16, 32”, para aqueles que pensaram em uma progressão geométrica. Ainda, poderiam aparecer (e por que não?) os números 8, -2, -28, -76, tratando-se da sequência $x_n = 8 - 12n + 7n^2 - n^3\ ;\ n \in N^*$.

Trata-se de enunciar o tipo de regra que deve ser seguida, pois, mesmo que os elementos da sequência 2, 4, ... sejam empiricamente representados, a possibilidade de enunciação da formação escapa ao que materialmente está sendo apresentado – é de outra natureza. Daí a importância de se construírem sequências de números, nesse caso, orientadas por uma proposição normativa. Child (2013, p. 146) propõe:

> Quando estou seguindo uma regra, de que modo eu sei o que tenho de fazer em cada estágio, no intuito de seguir aquela regra? Como, por exemplo, eu sei que a regra “+2” exige que eu ponha depois de 1000? Obviamente, não é o bastante saber somente que os passos iniciais da série são “2, 4, 6, 8...”. Nem é o bastante saber todos os passos na série até 1000. Afinal, como vimos, existem indefinidamente muitos modos diferentes possíveis de continuar a série, que concordam com todos os passos até 1000, mas divergem além daquele ponto.

E o conjunto dos números naturais (1, 2, 3, 4, 5, 6, ...)? Como podemos ter certeza de qual será o próximo termo dessa sequência? Pela observação de um padrão? Ora, se o fato empírico de realizarmos esta observação nos trouxesse alguma garantia de que, dessa maneira, poderíamos estabelecer uma regra de funcionamento, então, poderíamos inferir, de modo análogo, que a dízima 1499/4500 = 0,3331... poderia ser confundida com 1/3 = 0,3333..., caso não tivéssemos paciência de calcular após a terceira casa decimal! No caso de sequências infinitas, uma abordagem construtivista possivelmente provocaria algum desconforto, já que o exercício do experimento ficaria comprometido.

Nossa motivação para o próximo assunto é de que o tema, apesar de sua simplicidade, aparece constantemente em toda vida escolar, no que diz respeito a matemática, qual seja: as questões relativas aos sinais e suas implicações. Existe uma confusão bastante frequente quanto à chamada "regra de sinais", por parte dos nossos alunos. Em geral, temos percebido que as frases "menos com menos dá mais" e "menos com mais dá menos" são usadas de modo inapropriado, estendendo-se para além das operações de multiplicação e divisão de números inteiros. Em sentenças como " - 5 - 2 " ou " - 5 + 7 ", percebemos que muitos alunos escrevem " - 5 – 2 = + 7 " ou " - 5 + 7 = - 2". O aluno, provavelmente não percebe que esta é uma regra válida para multiplicação e divisão de números inteiros e que não pode ser aplicada em outro contexto, como a adição e subtração. Talvez fosse necessário insistir no fato de que as regras devem ser seguidas, mas apenas dentro de seus domínios, dentro de um contexto específico, e não se aplicam indistintamente a qualquer situação. Essa é a base do conceito denominado por Wittgenstein, de jogos de linguagem[3].

As regras que sustentam as operações aritméticas são gramaticais. Não foram trazidas de observações empíricas para dentro da matemática. Se, de alguma forma, estas proposições normativas são usadas de forma empírica, como em "2 balas mais 3 balas são 5 balas", em outras oportunidades é muito difícil fazê-lo. Como justificar empiricamente o fato da proposição de que "$(-1) \times (-1) = 1$"? A justificativa matemática está na lei distributiva da multiplicação em relação à adição[4], mas, claro, não estamos sugerindo que esta prova deva ser trabalhada com os alunos em níveis tão fundamentais. Queremos apenas lembrar que estas regras são convenções dentro da matemática, e procurar uma justificativa fora dela pode se tornar um exercício de imaginação tortuoso.

Um outro caso onde observamos que os processos de prescrição das normas matemáticas não são bem observados refere-se à propriedade "$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$", a qual é válida apenas para números naturais. Alguém que não observe este fato, pode concluir, por exemplo, que "$\sqrt{6} = \sqrt{(-2) \cdot (-3)}$". De fato, se escrevêssemos $\sqrt{6} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{3}$, acabaríamos inferindo que $\sqrt{6} = i\sqrt{2} \cdot i\sqrt{3}$, ou seja: $\sqrt{6} = -\sqrt{6}$!

Façamos também uma reflexão acerca do conjunto dos números racionais. Podemos percebê-lo como o conjunto das quantidades numéricas que as frações ordinárias representam.

[3] "O termo 'jogo de linguagem' surge quando, a partir de 1932, Wittgenstein passa a estender a analogia do jogo à linguagem como um todo" (GLOCK, 1998, p. 225).
[4] Esta prova é mostrada pelo professor Elon Lima (1982), na Revista do Professor de Matemática (RPM 01), sob o título de "Por que $(-1) \times (-1) = 1$".

Desta forma, 1/2, por exemplo, representa a mesma quantidade numérica que 2/4. Estas quantidades podem ser expressas em forma decimal – nestes casos, finita.

Por outro lado, quando uma fração não pode ser representada por uma decimal finita, ela recebe o nome de dízima periódica. Os números 1/3 = 0,333... e 1/45 = 0,022... são chamados de dízimas periódicas simples e compostas, respectivamente. Assunto recorrente no ensino fundamental, as dízimas merecem atenção especial por parte dos professores. Propomos uma pequena investigação acerca da divisão 1/3, formada por um período composto somente de algarismos “3”, repetidamente, ao infinito. Aqui, Porto (2003) levanta a questão de como sabemos que chegamos ao fim no processo de cálculo; ou então, como podemos ter certeza de que nenhum outro algarismo diferente de 3 poderia compor o período? Prossegue Porto (2003), examinando a divisão 1499/4500 = 0,333111..., a qual poderia provocar o questionamento de que (e por que não?) a divisão 1/3 resultaria em um número com um período estratosfericamente grande de algarismos “3” e que, após, poderia surgir outro algarismo em seu período, como no caso de 1499/4500.

Estamos tentando promover a discussão entre um processo normatizado de seguir regras *versus* um processo empírico. Mas, nesse caso, estamos fazendo referência a uma regra que nos convence de que nunca aparecerão outros números, além do 3, no período de divisão 1/3 ou do resultado que alguém obtém realizando o cálculo? No embate entre a gramática e o empírico, Wittgenstein adota a postura de considerar mais razoável que, por exemplo, a lista de números que compõe o período da divisão 1/3 (obtida por uma regra de recursão) serve de parâmetro de correção para as tentativas de divisão, por exemplo, executadas por um aluno. Jamais o contrário; como enfatizamos antes, os processos de natureza experimental não pautam as proposições normativas.

Um processo regrado tem a função de orientar o que deve ser realizado, mesmo antes do resultado ser atingido. Seriam, na concepção wittgensteiniana, processos dependentes, como um cálculo e sua prova. Na observação deste caso, podemos sublinhar o papel desta regra recursiva, que mostra a necessidade de concebermos os processos regrados como de caráter regulatório, informando o que devemos fazer, mas não necessariamente cumprindo tudo que é estabelecido. Aqui, como em outros casos na matemática, é imprescindível que estejamos atentos, pois a aplicação da regra nem sempre pode ser realizada em todos os casos.

5. Considerações Finais

O texto analítico que apresentamos buscou promover uma discussão sobre a matemática escolar através de alguns conceitos da filosofia de Wittgenstein das Investigações Filosóficas. Regulamos nossas lentes para considerar a matemática como uma linguagem que, como tal, possui sua própria gramática imbuída de regras específicas. As regras matemáticas possuem sentido no interior da própria linguagem e, portanto, não demandam da empiria para legitimar suas proposições. Problematizamos as questões relacionadas às proposições normativas e empíricas e a questão de seguir regras no interior dessas práticas. Como pano de fundo a essas investigações, ergueram-se desconfianças com relação à necessidade de utilização de relações externas (extralinguísticas) à Matemática. Amparados na perspectiva apresentada, traçamos as linhas do que chamamos de busca dos significados dos objetos matemáticos, olhando em direção ao seu caráter normativo, em detrimento do descritivo. Intencionamos mostrar que os significados matemáticos não se encontram no campo do empírico, mas teriam eles a função de servir de padrão de correção e interdição, por ocasião de comparação com a experiência. Em meio ao texto, sugerimos alguns exemplos, com os quais pudemos realizar uma conexão entre a filosofia teórica apresentada e alguns conceitos matemáticos.

Ao pensarmos no papel desempenhado pelas regras, temos a impressão de que os sistemas que se estabelecem dentro da Matemática se constituem com o intuito de segui-las. No entanto, nossas reflexões ao longo do texto caminham no sentido de que são aqueles que fazem as regras que determinam como elas devem ser seguidas, e o papel de um sistema regrado/normatizado poderia ser o de orientar aquilo que é possível fazer, de acordo com o contexto e a prática que, de antemão, foi estabelecida.

Dessa forma, justificamos nossa preocupação com a escrita matemática e com seus fundamentos, informando que, sob a perspectiva na qual estivemos apoiados, nosso tema de pesquisa não surgiu de descobertas, mas de resultados de produções humanas; das mais simples às mais complexas invenções.

Os contextos socioculturais são arenas produtoras de saberes nas quais a constituição da linguagem matemática se estabelece por necessidades, usos e emergências. Há sempre motivações, objetivos e interesses diferentes quando as linguagens são estabelecidas. Assim, estamos dispostos a reconsiderar o que seriam descobertas (nos moldes das ciências naturais) e passamos a pensar em termos de invenções.

Referências

BELLO, Samuel Edmundo Lopez. Jogos de linguagem, práticas discursivas e produção de verdade: contribuições para a educação (matemática) contemporânea. **Zetetiké**, Campinas, v. 18, número temático, p. 545-588, 2010.

CARMO, J. S. Sobre a normatividade do significado. **Kínesis**, v. 4, n. 7, p. 376-391, jul. 2012.

CHILD, William. **Wittgenstein**. Porto Alegre: Penso, 2013.

GLOCK, H. J. **Dicionário de Wittgenstein**. Rio de Janeiro: Zahar, 1998.

GOTTSCHALK, C. M. C. Três Concepções de Significado na Matemática: Bloor, Granger e Wittgenstein. **Coleção CLE**. v. 49, p. 95-123, 2007.

GOTTSCHALK, C. M. C. A construção e transmissão do conhecimento matemático sob uma perspectiva wittgensteiniana. **Cad. Cedes**, Campinas, v. 28, n. 74, p. 75-96, jan./abr. 2008.

LIMA, E. L. **Análise real**. v. 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

LIMA, Elon L. Por que $(-1) \times (-1) = 1$. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, v. 1, n. 1, 1982.

MORENO, Arley R. **Wittgenstein através das imagens**. Campinas: UNICAMP, 1993.

PORTO, André. As dízimas periódicas na filosofia da matemática de Wittgenstein. **Philósophos**, Goiânia, v. 8, n. 2, p. 127-157, jul./dez. 2003.

RIPOLL, J. B.; RIPOLL C. C.; DA SILVEIRA, J. F. P. **Números Racionais, Reais e Complexos.** Porto Alegre: UFRGS, 2006.

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da; SILVA, Paulo Vilhena da. O cálculo e a escrita matemática na perspectiva da filosofia da linguagem: domínio de técnicas**. Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 18, n. 1, p. 469-483, 2016.

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da; TEIXEIRA JÚNIOR, Valdomiro Pinheiro; SILVA, Paulo Vilhena da. A matemática e suas aplicações na perspectiva de Wittgenstein. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (CIAEM), 15., Chiapas, México, 2015. **Proceedings...** Disponível em: <http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/662/78>. Acesso em: 19 jul. 2017.

WITTGENSTEIN, L. **Gramática Filosófica**. São Paulo: Loyola, 2003.

WITTGENSTEIN, L. **Investigações Filosóficas**. Trad. BRUNI, José Carlos. São Paulo: Nova Cultura, 1999.