

Estimação de parâmetros de sinais modelados por somas de exponenciais complexas

Estimation of signal parameters modeled by sums of complex exponentials

Agnaldo da Conceição Esquincalha
Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Faculdade de Formação de Professores
Departamento de Matemática, São Gonçalo, RJ, Brasil
aesquincalha@gmail.com

Kellen Lessa Moraes
Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Faculdade de Formação de Professores
Departamento de Matemática, São Gonçalo, RJ, Brasil
kellen-lessa@hotmail.com

Informações do Artigo



Histórico do Artigo

Submissão: 29 de março de 2017.
Aceite: 24 de abril de 2017.

Palavras-chave

Reconstrução de Sinais
Somas de exponenciais complexas
Método de Prony
Método de Kung
Método dos Mínimos Quadrados

Resumo

A recuperação de parâmetros de sinais modelados por somas de exponenciais complexas é o tema deste artigo. Neste artigo, os sinais são gerados por sistemas lineares invariantes no tempo, que podem ser modelados por equações diferenciais, se os sinais forem analógicos, e por equações de diferenças, se os sinais forem digitais. A teoria de sinais e sistemas tem aplicações nas mais diversas áreas de conhecimento, caracterizando-se como um importante campo de atuação da Matemática Aplicada e da Computação Científica. Para estimar os parâmetros dos sinais citados, far-se-á o uso de duas combinações de métodos de Álgebra Linear Computacional: Prony e Mínimos Quadrados, e Kung e Mínimos Quadrados, em que os métodos de Prony e Kung recuperam os expoentes das exponenciais e o método dos mínimos quadrados recupera os coeficientes lineares do modelo estudado. Além da apresentação e validação dos métodos combinados por meio da recuperação dos parâmetros de um sinal sintético, é realizada a recuperação dos parâmetros de um sinal real, utilizando o *software* MATLAB.

Keywords

Recovery of signals
Sum of complex exponentials
Prony's method
Kung's method
Least squares method

Abstract

The retrieval of signal parameters modeled by sums of complex exponentials is the subject of this paper. Here signals are generated by time invariant linear systems, which can be modeled by differential equations, if the signals are analog, and by equations of differences, if the signals are digital. Theory of signals and systems has applications in the most diverse areas of knowledge, characterizing itself as an important field of action of Applied Mathematics and Scientific Computation. In order to estimate the parameters of the mentioned signals, two combinations of Computational Linear Algebra methods are used: Prony and Least Squares, and Kung and Least Squares, wherein the Prony and Kung methods retrieve exponents of exponentials and least squares method retrieves the linear coefficients of the studied model. Besides presentation and validation of the combined methods by recovering the parameters of a synthetic signal, the parameters of a real signal are retrieved using MATLAB software.

1. Introdução

O problema da recuperação de exponenciais de sinais é bastante antigo, já tendo sido tratado por diversos pesquisadores, como Prony (1795), Kung (1978), Kumaresan e Tufts (1982),

Kumaresan *et al.* (1984), Bazán e Cardoso (2000). Este problema envolve matrizes de posto incompleto e técnicas de Álgebra Linear Computacional e de Teoria de Sinais. Em particular, sistemas lineares invariantes no tempo são utilizados para dar um tratamento adequado aos dados observados experimentalmente, ou gerados sinteticamente, para que se possam recuperar os parâmetros do sinal de entrada com base nos dados de saída do sistema, caracterizando um problema inverso.

O problema da recuperação de exponenciais de um sinal é comum a diversas áreas, tais como comunicações, localização de objetos por radar, processamento sísmico de sinais, identificação paramétrica de sistemas dinâmicos, análise modal de estruturas mecânicas, ressonância magnética nuclear, diagnósticos médicos etc.

Neste artigo, receberão especial atenção os sistemas lineares invariantes no tempo (SLIT), que podem ser representados matematicamente por equações de diferenças, no caso de sinais digitais, e por equações diferenciais, no caso de sinais analógicos. Equações deste tipo apresentam como solução somas ponderadas de exponenciais complexas, e assim fica estabelecida a relação entre os sistemas de tipo SLIT e o problema a ser explorado, que consiste em recuperar os parâmetros dos sinais modelados por

$$h_k = \sum_{j=1}^d r_j z_j^k = \sum_{j=1}^d r_j e^{(\alpha_j + i\omega_j)k\Delta t} \quad (1.1)$$

em que os coeficientes $r_j \in \mathbb{C}$, $i^2 = -1$, $\alpha_j \leq 0$, $\omega_j \in \mathbb{R}$, e Δt é a taxa de amostragem.

Sinais deste tipo geralmente são associados à resposta impulsiva de sistemas lineares invariantes no tempo, e o significado dos parâmetros envolvidos depende do sistema em estudo ou da origem do sinal. Outra forma de entender o problema é: dada uma sequência finita de amostras

$$\tilde{h}_k = h_k + \varepsilon_k \quad (1.2)$$

com $k = 1, \dots, L$, em que ε_k representa os ruídos, ou incertezas do sinal, o problema consiste em calcular o número d de componentes do sinal, e estimar os coeficientes r_j e as exponenciais z_j . Assumindo o número de componentes do sinal como conhecido, tem-se a redução do problema a estimar as exponenciais e os coeficientes da Eq. (1.1).

Este texto reflete os resultados das pesquisas realizadas, ao longo de um ano, em um projeto de Iniciação Científica desenvolvido pela segunda autora, sob orientação do primeiro, e financiada pela Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ).

Nas próximas seções, são apresentados elementos da Teoria de Sinais e Sistemas, seguidos de métodos de Álgebra Linear Computacional utilizados para a estimação de parâmetros de sinais modelados por somas de exponenciais complexas, em particular, duas combinações: Prony e Mínimos Quadrados, Kung e Mínimos Quadrados. Os métodos de Prony e Kung para

recuperar os expoentes das exponenciais, e o método de Mínimos Quadrados para recuperar os coeficientes lineares do modelo a ser estudado. Por fim, é realizada a recuperação de parâmetros de um sinal gerado sinteticamente, seguida da recuperação de parâmetros de um sinal real, obtido experimentalmente a partir de um problema da área de modelos de qualidade de água.

2. Elementos de Teoria de Sinais e Sistemas

Pode-se definir um sinal como uma função de uma ou mais variáveis independentes, que carrega consigo várias informações. Por isso, é muito importante o processamento de sinais, que consiste basicamente na representação matemática do sinal, seguida da aplicação de algoritmos para a extração da informação nele contida. Por exemplo, pode-se desejar desenvolver uma técnica que separe dois sinais combinados previamente, pode-se desejar dar ênfase a um parâmetro específico do sinal, ou ainda, estimar um ou mais de seus parâmetros.

A Teoria de Sinais é usada nas mais diversas áreas do conhecimento, alguns sinais comuns e aplicações são, por exemplo, o eletrocardiograma, sinais de voz e musicais, processamento de imagens, filtros e equalizadores, sistemas de redução de ruído, efeitos sonoros especiais, geração de sinais de rádio, etc.

Um sistema é um modelo matemático que relaciona o sinal de entrada com o sinal de saída. Se x e y forem os sinais de entrada e saída, respectivamente, então o sistema é visto como uma transformação de x em y . Essa transformação pode ser representada por:

$$y = T\{x\} \quad (2.1)$$

em que T é o operador que define a regra em que x é transformado em y .

Se o operador T da Eq. (2.1) satisfizer o princípio da superposição, ou seja,

$$T\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\} = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \quad (2.2)$$

no qual α_1 e α_2 são escalares quaisquer, então T é um operador linear e o sistema por ele representado também é um sistema linear.

Um sistema é chamado de invariante no tempo se um deslocamento (atraso ou avanço) no tempo do sinal de entrada provoca o mesmo deslocamento no sinal de saída. Então, define-se que o sistema é invariante no tempo quando,

$$T\{x(t - t_0)\} = y(t - t_0), \forall t_0 \in \mathbb{Z} \quad (2.3)$$

Um Sistema Linear Invariante no Tempo é um sistema que satisfaz ambas as propriedades, a da linearidade e a da invariância no tempo. “A análise matemática de SLITs é relativamente fácil e, por isso sistemas deste tipo têm sido amplamente desenvolvidos e utilizados nos últimos 30 anos”

(MITRA, 1998, p. 74). Matricialmente, a invariância no tempo é caracterizada por matrizes dos tipos Hankel e Toeplitz.

Uma vez estabelecidos os conceitos e propriedades que cercam o problema em questão, cabe estudar as técnicas para processamento de sinais que possibilitam estimar os parâmetros dos sinais modelados pela Eq. (1.1).

3. Métodos

Como destacado anteriormente, o problema em tela consiste em estimar os coeficientes, r_j , e as exponenciais, z_j , de sinais modelados pela Eq. (1.1), reproduzida a seguir. Para isso, far-se-á uso de três métodos de Álgebra Linear Computacional.

$$h_k = \sum_{j=1}^d r_j z_j^k = \sum_{j=1}^d r_j e^{(\alpha_j + i\omega_j)k\Delta t} \quad (3.1)$$

É importante notar que os coeficientes r_j entram linearmente no modelo, enquanto os parâmetros embutidos nas exponenciais z_j , entram não linearmente. Para estimar “a parte não linear” do modelo (as exponenciais z_j), neste artigo são utilizados os métodos de Prony e Kung. Uma vez conhecidas as exponenciais z_j , os coeficientes r_j podem ser determinados resolvendo-se um problema com a utilização do método de mínimos quadrados lineares.

3.1. Método de Prony

O método de Prony foi desenvolvido originalmente em 1795, por Gaspard Riche, Barão de Prony, que acreditava que as leis que governam a expansão de gases poderiam ser modeladas por meio de uma soma de exponenciais amortecidas (MARPLE, 1987). Apesar de ser um dos primeiros métodos paramétricos de análise espectral, o problema da recuperação de exponenciais de um sinal ainda é muito utilizado em diversas áreas.

A contribuição efetiva de Prony foi perceber que a Eq. (3.1) é solução de um sistema de equações de diferenças homogêneas com coeficientes constantes, uma vez que se trata de uma combinação linear de exponenciais, descobrindo assim um método eficiente para a determinação das exponenciais z_j .

Para encontrar a forma desta equação de diferenças, primeiramente é definido o polinômio $P(z)$, com grau d , no qual d representa o número de componentes do sinal, supostamente conhecido, cujas raízes são os parâmetros z_l , $l = 1, \dots, d$,

$$P(z) = \prod_{l=1}^d (z - z_l) \quad (3.2)$$

O polinômio definido na Eq. (3.2), na sua forma expandida, é reescrito como:

$$P(z) = \prod_{l=1}^d (z - z_l) = \sum_{i=0}^d \gamma_i z^i \quad (3.3)$$

Observe que $\gamma_d = 1$. Fazendo uso das equações (3.1) e (3.3), juntamente com as propriedades de somatório, tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^d \gamma_j h_{j+i} &= \sum_{j=0}^d \gamma_j \sum_{l=1}^d r_l z_l^{j+i} = \sum_{j=0}^d \gamma_j \sum_{l=1}^d r_l z_l^j z_l^i = \\ &= \sum_{l=1}^d r_l z_l^i \sum_{j=0}^d \gamma_j z_l^j = \sum_{l=1}^d r_l z_l^i P(z_l) = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Note que $P(z)$ é o polinômio definido na Eq. (3.3), avaliado para cada uma de suas raízes z_l , o que leva o somatório a ter zero como resultado.

Deste modo, é possível estimar os parâmetros do modelo, uma vez que o sinal é solução do seguinte sistema de equações de diferenças,

$$\sum_{j=0}^d \gamma_j h_{j+i} = 0, \text{ com } 1 \leq i \leq L - d \quad (3.5)$$

Em que L é igual ao número de amostras de um mesmo sinal.

Para exemplificar o sistema de equações de diferenças representado pela Eq. (3.5), considere $d = 4$ e $L = 8$. Desenvolvendo o somatório e escrevendo explicitamente o sistema resultante, obtém-se,

$$\begin{cases} \gamma_0 h_1 + \gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_3 + \gamma_3 h_4 + \gamma_4 h_5 = 0 \\ \gamma_0 h_2 + \gamma_1 h_3 + \gamma_2 h_4 + \gamma_3 h_5 + \gamma_4 h_6 = 0 \\ \gamma_0 h_3 + \gamma_1 h_4 + \gamma_2 h_5 + \gamma_3 h_6 + \gamma_4 h_7 = 0 \\ \gamma_0 h_4 + \gamma_1 h_5 + \gamma_2 h_6 + \gamma_3 h_7 + \gamma_4 h_8 = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Como $\gamma_4 = 1$, tem-se:

$$\begin{cases} \gamma_0 h_1 + \gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_3 + \gamma_3 h_4 = -h_5 \\ \gamma_0 h_2 + \gamma_1 h_3 + \gamma_2 h_4 + \gamma_3 h_5 = -h_6 \\ \gamma_0 h_3 + \gamma_1 h_4 + \gamma_2 h_5 + \gamma_3 h_6 = -h_7 \\ \gamma_0 h_4 + \gamma_1 h_5 + \gamma_2 h_6 + \gamma_3 h_7 = -h_8 \end{cases} \quad (3.7)$$

As equações do sistema (3.7) podem ser escritas na forma matricial

$$\begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \\ h_2 & h_3 & h_4 & h_5 \\ h_3 & h_4 & h_5 & h_6 \\ h_4 & h_5 & h_6 & h_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} h_5 \\ h_6 \\ h_7 \\ h_8 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

A invariância do comportamento do sistema a deslocamentos no tempo pode ser visualizada por meio das diagonais da matriz de coeficientes do sistema acima, chamada matriz de observação. Generalizando, chega-se à equação matricial a seguir,

$$\begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_d \\ h_2 & h_3 & \dots & h_{d+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{L-d} & h_{L-d+1} & \dots & h_{L-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{d-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} h_{d+1} \\ h_{d+2} \\ \vdots \\ h_L \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Note que conhecido o sinal h_1, h_2, \dots, h_L , o objetivo é determinar $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{d-1}$. Fazendo, em (3.9), $L = 2d$, obtém-se uma matriz quadrada que, se invertível, permite determinar $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{d-1}$. A solução deste sistema (3.9) permite que se construa o polinômio descrito em (3.3).

Assim, o método de Prony sintetiza-se na resolução do sistema (3.9) e, em seguida, determinam-se as soluções de $P(z) = \sum_{i=0}^d \gamma_i z^i = 0$, que são os parâmetros z_j da Eq. (3.1).

3.2. Relação entre o Posto da Matriz Observação e o Número de Componentes do Sinal

Existe uma relação importante entre o número de componentes do sinal e a matriz de observação que é construída com os dados observados ou gerados sinteticamente. A matriz frequentemente utilizada para representar a invariância do comportamento do sistema a deslocamentos no tempo é conhecida como matriz do tipo Hankel, e é definida como:

$$H = (h_{ij})_{m \times n}, \text{ onde } h_{ij} = h_{i-1, j+1} \quad (3.10)$$

Considere a matriz com estrutura Hankel de ordem $M \times N$ a seguir,

$$H(l) = \begin{bmatrix} h_l & h_{l+1} & \dots & h_{l+N-1} \\ h_{l+1} & h_{l+2} & \dots & h_{l+N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{l+M-1} & h_{l+M} & \dots & h_{l+M+N-2} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Fazendo uso da Eq. (3.1), pode-se decompor (3.11) da seguinte forma,

$$H(l) = V_M Z^l R V_N^T \quad (3.12)$$

em que V_M é a matriz de Vandermonde,

$$V_M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_d \\ z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_d^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{M-1} & z_2^{M-1} & \dots & z_d^{M-1} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

e Z e R são matrizes diagonais,

$$Z = \text{diag}(z_1, \dots, z_d) \text{ e } R = \text{diag}(r_1, \dots, r_d) \quad (3.14)$$

Da decomposição (3.12) tem-se que o subespaço coluna da matriz $H(l)$ é gerado pelas colunas de V_M e o subespaço linha de $H(l)$ é gerado pelos conjugados das colunas V_N . Ambos os subespaços são usualmente chamados de subespaço sinal, e se $\min\{M, N\} > d$, então o posto de $H(l)$ é d . Em outras palavras, se a matriz observação tiver posto incompleto, o número de componentes do sinal é o posto. No entanto, este resultado vale apenas se o sinal for livre de ruídos (BAZÁN; CARDOSO, 2000).

3.3. O Método de Kung

O método de Kung, criado em 1978, é bastante utilizado em estudos da área de Ressonância Magnética Nuclear, nos quais é mais conhecido como *Hankel Singular Value Decomposition*¹ (HSVD). Nas próximas linhas, encontram-se os fundamentos matemáticos e a descrição deste método.

Sejam V_M a matriz de Vandermonde definida em (3.13), cujas colunas geram o espaço coluna de $H(l)$, Z a matriz diagonal definida em (3.14), \mathcal{A} , uma matriz formada por todas as linhas da matriz V_M , exceto da última, e \mathcal{B} , uma matriz formada por todas as linhas da matriz V_M , exceto a primeira, então $\mathcal{A}Z = \mathcal{B}$.

Dizer que $H(l)$ é invariante ao deslocamento significa dizer que o espaço coluna de $H(l+1)$ está contido no espaço coluna de $H(l)$. Deste modo, assegura-se que se \mathcal{V} é outra matriz cujas colunas geram o subespaço coluna de $H(l)$, e se A e B são obtidas a partir de \mathcal{V} , analogamente, como \mathcal{A} e \mathcal{B} foram obtidas a partir de V_M , então existe uma matriz $T_{d \times d}$, chamada de matriz transição, tal que

$$AT = B \quad (3.15)$$

Como as colunas de V_M e as colunas de \mathcal{V} geram o espaço coluna de $H(l)$, então existe uma matriz $F \in \mathbb{C}^{d \times d}$, não singular, tal que

¹ Decomposição em Valores Singulares de matriz Hankel, em livre tradução.

$$\mathcal{V} = V_M F \quad (3.16)$$

Decompõe-se \mathcal{V} e V_M como

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} A \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ B \end{bmatrix} e \quad V_M = \begin{bmatrix} V_{M-1} \\ eZ^{M-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ V_{M-1}Z \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

em que x é a última linha de \mathcal{V} , y é a primeira linha de \mathcal{V} , e é um vetor linha, com d colunas, em que o elemento de todas as colunas é o número 1.

Fazendo uso das decomposições (3.16) e (3.17), pode-se reescrever A e B como,

$$A = V_{M-1}F \text{ e } B = V_{M-1}ZF \quad (3.18)$$

Substituindo A e B em (3.15), tem-se

$$(V_{M-1}F)T = V_{M-1}ZF \quad (3.19)$$

ou ainda,

$$T = F^{-1}V_{M-1}^\dagger V_{M-1}ZF = F^{-1}ZF \quad (3.20)$$

em que V_{M-1}^\dagger é a matriz pseudoinversa² de V_{M-1} . Ou seja, a matriz T da relação expressa na Eq. (3.15) é dada por $T = F^{-1}ZF$.

De (3.20) nota-se que T é diagonalizável, sendo Z sua diagonalização e, com isso, os autovalores de T são os mesmos que da matriz Z , z_l , com $l = 1, \dots, d$.

O método de Kung baseia-se na decomposição em valores singulares, SVD, da matriz observação $H(l)$. A matriz \mathcal{V} é a matriz dos vetores singulares à esquerda, associados aos valores singulares não nulos. Deste modo, a solução da Eq. (3.20) é calculada via pseudoinversão,

$$T_K = A^\dagger B \quad (3.21)$$

Como foi apresentado, os autovalores de T_K são os parâmetros embutidos nas exponenciais z_j da Eq. (3.1).

3.4. O Método dos Mínimos Quadrados

No modelo descrito pela Eq. (3.1), o método dos mínimos quadrados é utilizado para a estimação dos coeficientes lineares r_j . No método dos mínimos quadrados, procuram-se polinômios

² Se A é uma matriz com colunas linearmente independentes, sua pseudoinversa é denotada por A^\dagger , e definida por $A^\dagger = (A^T A)^{-1} A^T$. (POOLE, 2004, p. 535). É claro, então, que $A^\dagger A = I$, ou seja, A^\dagger é uma inversa pela esquerda da matriz A .

que ajustem uma curva a um conjunto de dados atendendo a algum critério estabelecido *a priori*, sem exigir que a curva passe sobre algum dos pontos dados (CUNHA, 2000).

O problema dos mínimos quadrados consiste em, dado um vetor $b \in \mathbb{C}$ e uma matriz $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $m > n$, encontrar um vetor $x \in \mathbb{C}^n$, tal que Ax é a “melhor aproximação” para b , isto é, resolver:

$$\min = \|Ax - b\|_2 \quad (3.22)$$

O vetor x é conhecido como a solução do problema de mínimos quadrados.

Seja $S = \{x \in \mathbb{C}^n / \|Ax - b\|_2 = \min\}$ o conjunto de todas as soluções da Eq. (3.22). Então $x \in S$, se e somente se, ocorre a seguinte condição de ortogonalidade:

$$A^C(b - Ax) = 0 \quad (3.23)$$

na qual A^C é a matriz transposta conjugada de A .

Da Eq. (3.23) segue que a solução dos mínimos quadrados satisfaz a equação normal a seguir:

$$A^C Ax = A^C b \quad (3.24)$$

Neste caso, a matriz A , do tipo Vandermonde, corresponde à matriz cujos elementos das linhas são os z_j^k , $k = 1, \dots, L$, já estimados por meio do método de Prony ou do método de Kung. O vetor coluna b é preenchido com as avaliações do sinal no intervalo dado, h_k , e x é o vetor que contém os coeficientes r_j , da Eq. (3.1), que é estimado resolvendo-se a equação normal (3.24).

4. Estimação de Parâmetros

Utilizando-se os métodos apresentados, foram realizadas diversas simulações computacionais para a reconstrução de sinais sintéticos a fim de promover a validação das duas combinações de métodos. A seguir, como ilustração, segue dados de uma das simulações realizadas no MATLAB.

Quadro 1 – Comparação de alguns resultados da aplicação dos métodos ao sinal modelado por

$$f[n] = e^{\left(-\frac{1}{12} + i\frac{\pi}{6}\right)n} \text{ com } n = 1:1:100, d = 50 \text{ e } L = 100 \text{ na Eq. (3.9).}$$

n	$S^{a,g}$	P^b	K^c	$ S - P ^d$	$ S - K ^e$	$ P - K ^f$
1	7,9678E-01 +4,6002E-01i	7,9678E-01 +4,6002E-01i	7,9678E-01 +4,6002E-01i	1,3369E-15	1,0236E-15	1,1102E-15
10	2,1730E-01 -3,7637E-01i	2,1730E-01 -3,7637E-01i	2,1730E-01 -3,7637E-01i	3,4332E-16	2,2678E-15	2,0868E-15
20	-9,4438E-02 -1,6357E-01i	-9,4438E-02 -1,6357E-01i	-9,4438E-02 -1,6357E-01i	1,9280E-16	3,1434E-15	2,9506E-15
30	-8,2085E-02 +1,9607E-16i	-8,2085E-02 +1,4343E-15i	-8,2085E-02 +6,0066E-15i	1,8912E-15	7,1888E-15	7,2777E-15
40	-1,7837E-02 +3,0895E-02i	-1,7837E-02 +3,0895E-02i	-1,7837E-02 +3,0895E-02i	2,4787E-15	1,5435E-14	1,7558E-14
50	7,7519E-03 +1,3427E-02i	7,7519E-03 +1,3427E-02i	7,7519E-03 +1,3427E-02i	1,1501E-14	9,6900E-15	2,0639E-14
60	6,7379E-03 -3,2190E-17i	6,7379E-03 -4,7092E-16i	6,7379E-03 +2,3615E-15i	9,3734E-15	4,1066E-15	6,6589E-15
70	1,4641E-03 -2,5360E-03i	1,4641E-03 -2,5360E-03i	1,4641E-03 -2,5360E-03i	6,6981E-15	5,2616E-15	6,7406E-15
80	-6,3632E-04 -1,1021E-03i	-6,3632E-04 -1,1021E-03i	-6,3632E-04 -1,1021E-03i	3,3260E-15	1,2428E-14	1,0148E-14
90	-5,5308E-04 -9,4895E-19i	-5,5308E-04 +2,7963E-15i	-5,5308E-04 +1,7663E-15i	8,1814E-15	4,3918E-15	1,1754E-14
100	-1,2018E-04 +2,0817E-04i	-1,2018E-04 +2,0817E-04i	-1,2018E-04 +2,0817E-04i	9,9844E-15	8,9155E-15	7,4511E-15

^a Dados do sinal gerado sinteticamente pelo modelo;

^b Dados do sinal recuperados utilizando os métodos de Prony e mínimos quadrados;

^c Dados do sinal recuperados utilizando os métodos de Kung e mínimos quadrados;

^d Módulo da diferença entre os dados do sinal gerados sinteticamente e os recuperados fazendo-se uso dos métodos de Prony e mínimos quadrados;

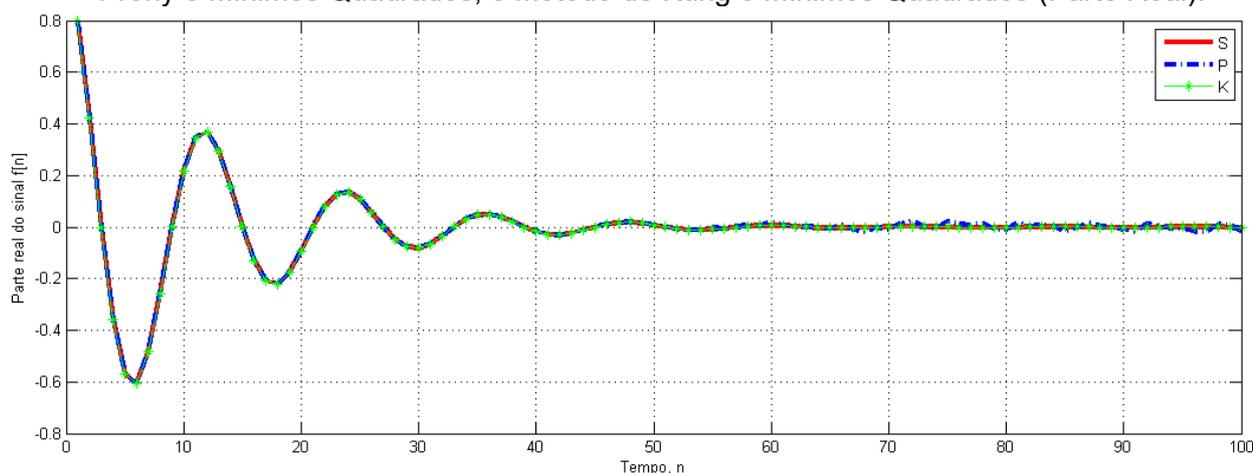
^e Módulo da diferença entre os dados do sinal gerados sinteticamente e os recuperados fazendo-se uso dos métodos de Kung e mínimos quadrados;

^f Módulo da diferença entre os dados do sinal recuperados pela aplicação dos métodos de Prony e mínimos quadrados, e Kung e mínimos quadrados;

^g Leia-se $7,9678E-01 + 4,6002E-01i$ como $7,9678 \times 10^{-1} + (4,6002i) \times 10^{-1}$.

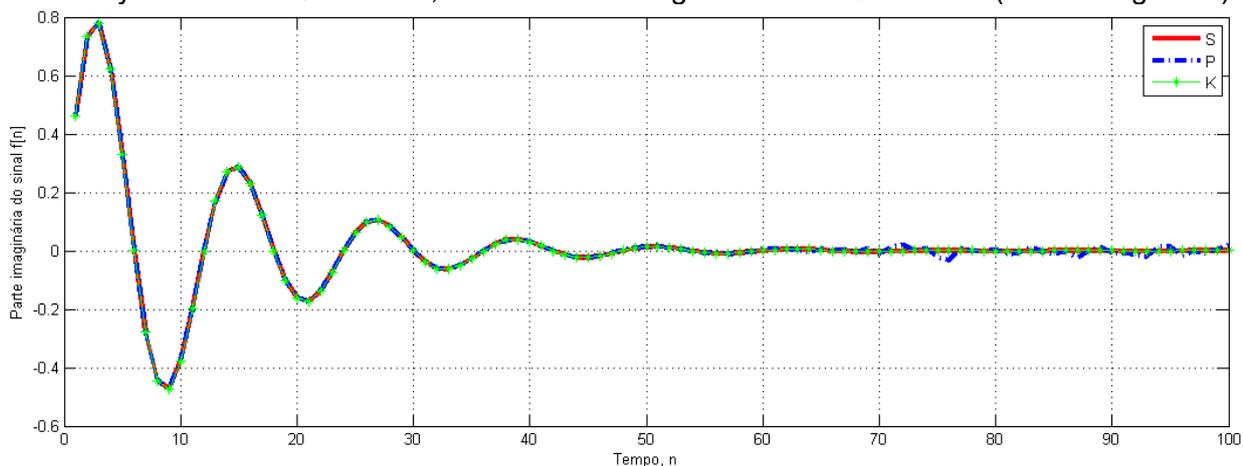
Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 1 – Dados do sinal $f[n] = e^{\left(-\frac{1}{12} + i\frac{\pi}{6}\right)n}$ recuperados utilizando a combinação dos métodos Prony e Mínimos Quadrados, e Método de Kung e Mínimos Quadrados (Parte Real).



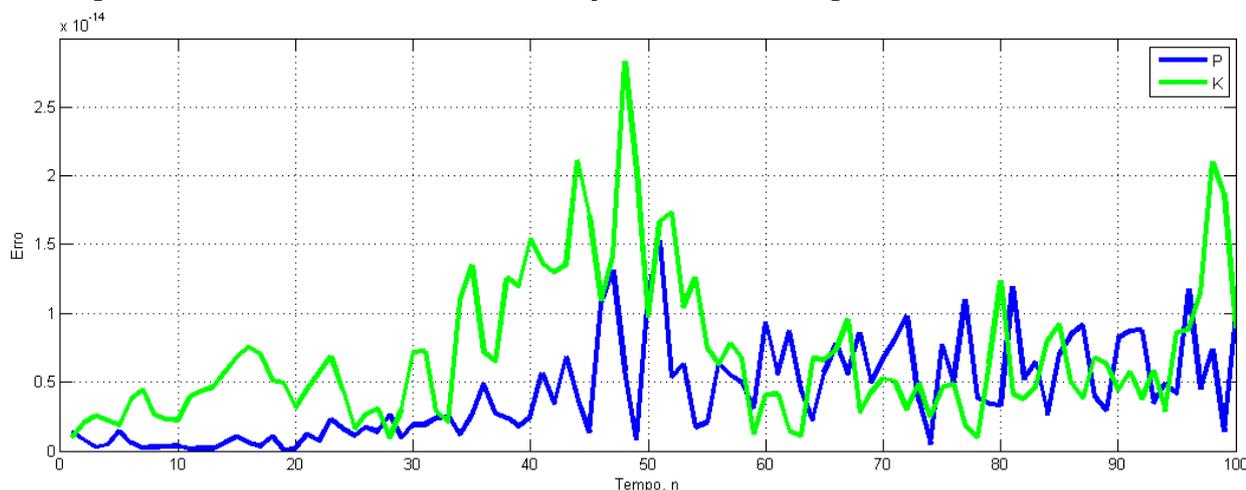
Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 2 – Dados do sinal $f[n] = e^{(-\frac{1}{12} + i\frac{\pi}{6})n}$ recuperados utilizando a combinação dos métodos Prony e Mínimos Quadrados, e Método de Kung e Mínimos Quadrados (Parte Imaginária).



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 3 – Gráfico do módulo da diferença entre o sinal original e os sinais reconstruídos.



Fonte: Dados da pesquisa.

A partir do exposto no Quadro 1 e nas Figuras Figura 1, Figura 2 e Figura 3, é possível notar que ambas as combinações de métodos se mostraram eficientes para a estimação dos parâmetros de $f[n]$. No entanto, pode-se observar na Figura 3 que a combinação dos métodos de Prony e mínimos quadrados mostrou-se sutilmente melhor. Nas Figuras Figura 1 e Figura 2, percebe-se que as partes reais e imaginárias dos sinais reconstruídos são praticamente coincidentes com as do sinal gerado sinteticamente, livre de ruídos que não sejam os intrínsecos aos processos numéricos envolvidos nas simulações. Assume-se aqui, esta simulação como necessária à validação das combinações de métodos aplicados ao problema.

Agora, serão utilizados dados obtidos experimentalmente por Barbosa Jr. (1997). Seu objetivo era estudar a dispersão longitudinal de um constituinte em um trecho do Rio Jacaré-Guaçu (SP), estimando a concentração de um contaminante em um tempo e em uma posição, considerando conhecidas as características do rio e a descarga do contaminante. Os dados

assumidos por Barbosa Jr. foram: 248g de rodamina-WT diluídas em 10l de água e liberados de forma instantânea sobre a linha de corrente central do escoamento.

Para validar os resultados obtidos experimentalmente por Barbosa Jr. (1997), serão utilizados aqui dados de Sousa *et al.* (2008), que fizeram uso da solução da equação da advecção-difusão unidimensional, apresentada abaixo, com condições inicial e de contorno específicas:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, -\infty < x < +\infty, t > 0 \quad (4.1)$$

na qual,

$C = C(x, t)$ = concentração [ML-3]

u = componente longitudinal instantânea da velocidade [LT-1]

D' = coeficiente de dispersão longitudinal [L²T-1]

x = posição longitudinal em relação à entrada do sistema [L]

A solução fundamental de (4.1) decorre da injeção instantânea de uma massa M de uma substância conservativa, distribuída de modo uniforme em uma seção transversal de área A , localizada em $x = 0$. A solução foi obtida, no caso estudado por Sousa *et al.* (2008), para as seguintes condições iniciais e de contorno:

$$\begin{cases} C(x, 0) = \frac{M}{A} \delta(x) & -\infty < x < +\infty \\ C(\pm\infty, t) = 0 & t > 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

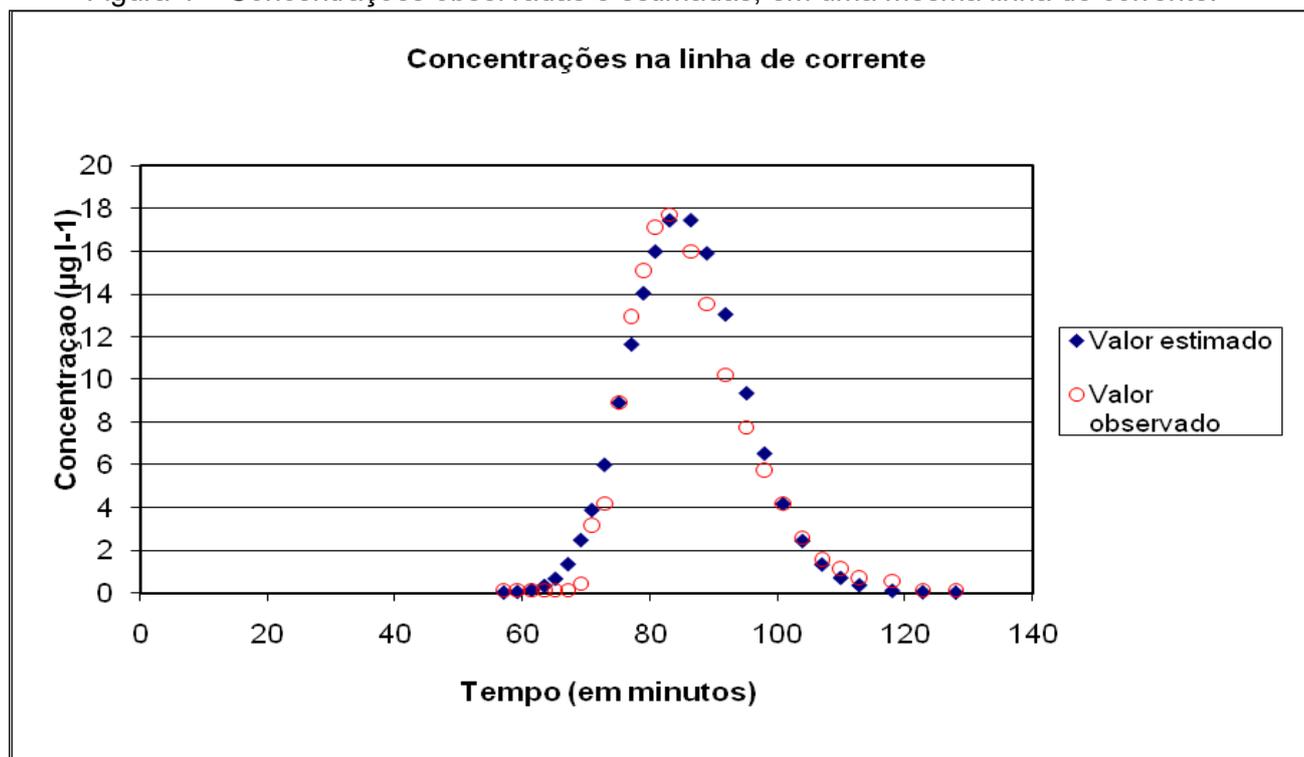
em que $\delta(x)$ denota a função *delta de Dirac*, que, neste caso, representa uma unidade de massa de constituinte dentro de um espaço infinitamente pequeno, com a propriedade de ser nula no tempo inicial em todos os lugares, exceto na posição de injeção da massa M do constituinte, ou seja, em $x = 0$, e $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$.

A solução do sistema composto por (4.1) e (4.2) é da forma

$$C(x, t) = \frac{M}{A\sqrt{4\pi D}} e^{-\frac{(x-ut)^2}{4Dt}}, -\infty < x < +\infty, t > 0 \quad (4.3)$$

Em resumo, utilizam-se neste texto os dados experimentais de Barbosa Jr. (1997) e os calculados por Sousa *et al.* (2008). A Figura 4 mostra que a equação da advecção-difusão unidimensional, com as condições adotadas, é eficiente para descrever a comportamento da concentração do contaminante em meio fluvial.

Figura 4 – Concentrações observadas e estimadas, em uma mesma linha de corrente.



Fonte: Sousa *et al.* (2008, p. 6).

Barbosa Jr. (1997) não utilizou taxa de amostragem constante, e para que o modelo explorado neste texto possa ser utilizado, os tempos foram equiespaçados da seguinte forma

$$\Delta t = \frac{(b - a)}{n} \quad (4.4)$$

na qual a e b são o primeiro e o último tempos em que foram aferidas as amostras, e n o número de aferições. No Quadro 3 são apresentados alguns dos resultados da aplicação dos métodos aqui estudados, utilizando os tempos equiespaçados e aplicando os dados do Quadro 2 na Eq. (4.3).

Quadro 2 – Parâmetros utilizados na Eq. (4.3).

M (kg)	x (m)	u (m/s)	A (m ²)	D (m ² /s)
0,248	2 250	0,44	24,2	5,2

Fonte: Barbosa Jr. (1997, p. 187) e Sousa *et al.* (2008, p. 5).

Quadro 3 – Alguns resultados da aplicação dos métodos aos dados gerados pela solução da equação de advecção-difusão.

$t^{a,h}$	SE^b	P^c	K^d	$ SE - P ^e$	$ SE - P ^f$	$ P - K ^g$
5,7088E+01	9,3720E-03	9,3720E-03 +1,9895E-13i	9,3720E-03 +8,5265E-14i	3,147700E-08	1,206600E-08	4,346500E-08
6,2344E+01	1,9035E-01	1,9035E-01 +3,4106E-12i	1,9035E-01 +6,3949E-13i	4,402000E-07	1,602700E-07	5,996600E-07
6,7600E+01	1,5286E+00	1,5286E+00 +1,0836E-12i	1,5286E+00 -1,5916E-12i	1,109900E-07	1,512900E-07	2,622800E-07
7,2856E+01	5,9337E+00	5,9337E+00 -1,1354E-11i	5,9337E+00 +6,5015E-13i	1,602200E-06	7,424300E-07	2,343600E-06
7,8112E+01	1,2897E+01	1,2897E+01 +1,3252E-12i	1,2897E+01 -1,0270E-12i	6,615600E-07	2,596400E-07	9,211600E-07
8,3368E+01	1,7519E+01	1,7519E+01 -5,3983E-12i	1,7519E+01 +2,3803E-12i	1,183000E-06	6,433400E-07	1,826300E-06
8,8624E+01	1,6170E+01	1,6170E+01 +1,0592E-11i	1,6170E+01 -2,9601E-12i	6,567900E-07	5,719400E-07	1,226900E-06
9,3880E+01	1,0824E+01	1,0824E+01 -1,4102E-11i	1,0824E+01 +3,4660E-12i	1,880600E-07	5,962100E-07	5,025000E-07
9,9135E+01	5,5297E+00	5,5297E+00 -9,9718E-12i	5,5297E+00 +2,6936E-12i	1,119000E-06	1,021800E-06	2,139800E-06
1,0439E+02	2,2463E+00	2,2463E+00 +2,6885E-11i	2,2463E+00 -5,7201E-12i	4,646700E-07	6,544400E-07	1,081300E-06
1,0965E+02	7,4988E-01	7,4988E-01 +3,9582E-11i	7,4988E-01 -8,4897E-12i	1,656600E-06	1,561000E-06	3,203600E-06
1,1490E+02	2,1136E-01	2,1136E-01 +2,7088E-011i	2,1136E-01 -5,7330E-012i	1,408100E-06	1,196400E-06	2,597600E-06
1,2016E+02	5,1429E-02	5,1429E-02 +1,1944E-011i	5,1429E-02 -2,4931E-012i	7,009100E-07	5,593400E-07	1,257800E-06
1,2541E+02	1,1005E-02	1,1005E-02 +3,5234E-012i	1,1005E-02 -7,2015E-013i	2,361200E-07	1,733700E-07	4,089100E-07
1,2804E+02	4,8755E-03	4,8755E-03 +6,9861E-013i	4,8755E-03 -1,4134E-013i	4,823100E-08	3,469900E-08	8,282000E-08

^a Tempo em minutos, equiespaçado de acordo com a Eq. (5.5);

^b Dados calculados utilizando a solução da equação de advecção-difusão;

^c Dados do sinal recuperados utilizando os métodos de Prony e mínimos quadrados;

^d Dados do sinal recuperados utilizando os métodos de Kung e mínimos quadrados;

^e Módulo da diferença entre os dados do sinal gerados sinteticamente e os recuperados fazendo-se uso dos métodos de Prony e mínimos quadrados;

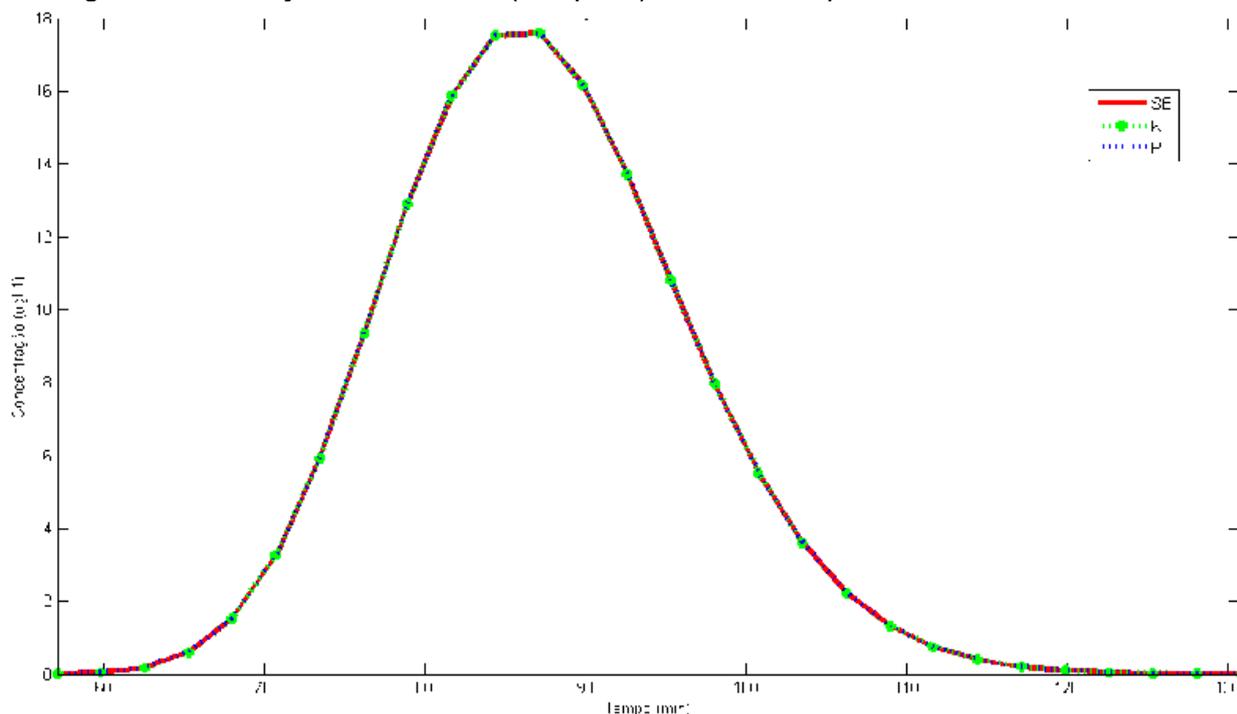
^f Módulo da diferença entre os dados calculados e os recuperados fazendo-se uso dos métodos de Kung e mínimos quadrados;

^g Módulo da diferença entre os dados recuperados pela aplicação dos métodos de Prony e mínimos quadrados, e Kung e mínimos quadrados;

^h Leia-se 5,7088E+01 como $5,7088 \times 10^1$.

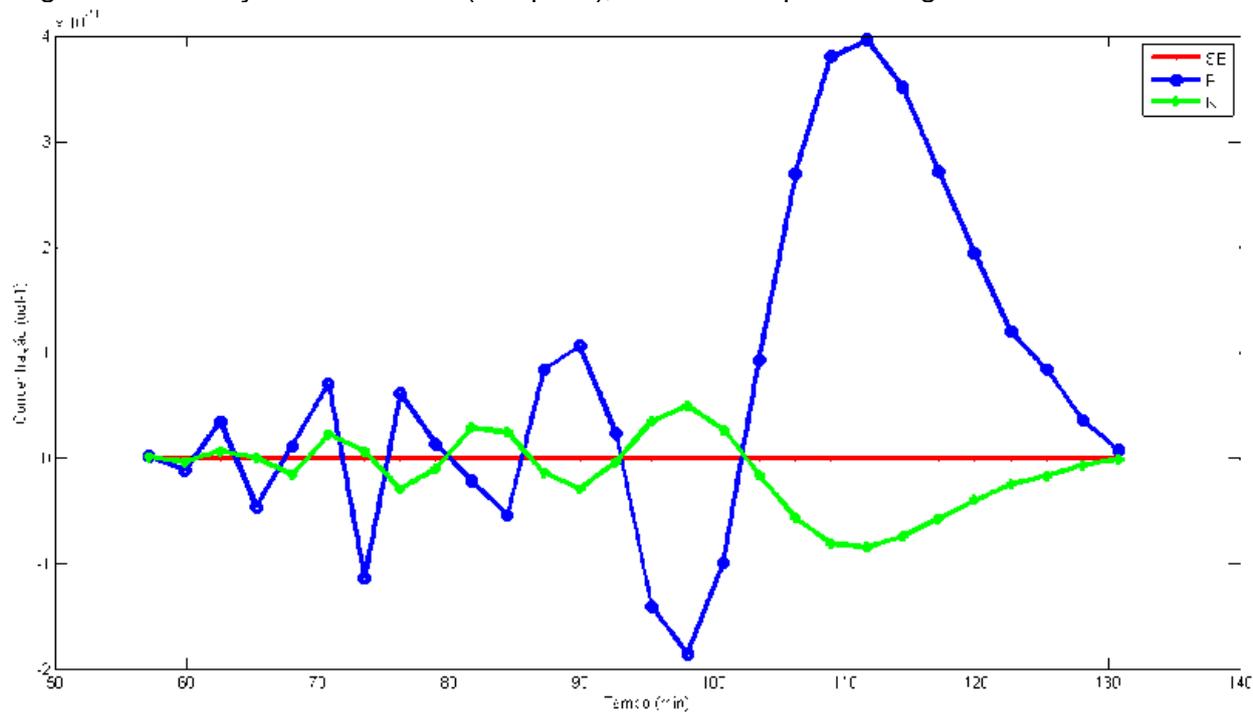
Fonte: Sousa *et al.* (2008).

Figura 5 – Ilustração do Quadro 3 (completo), tomando as partes reais das colunas P e K.



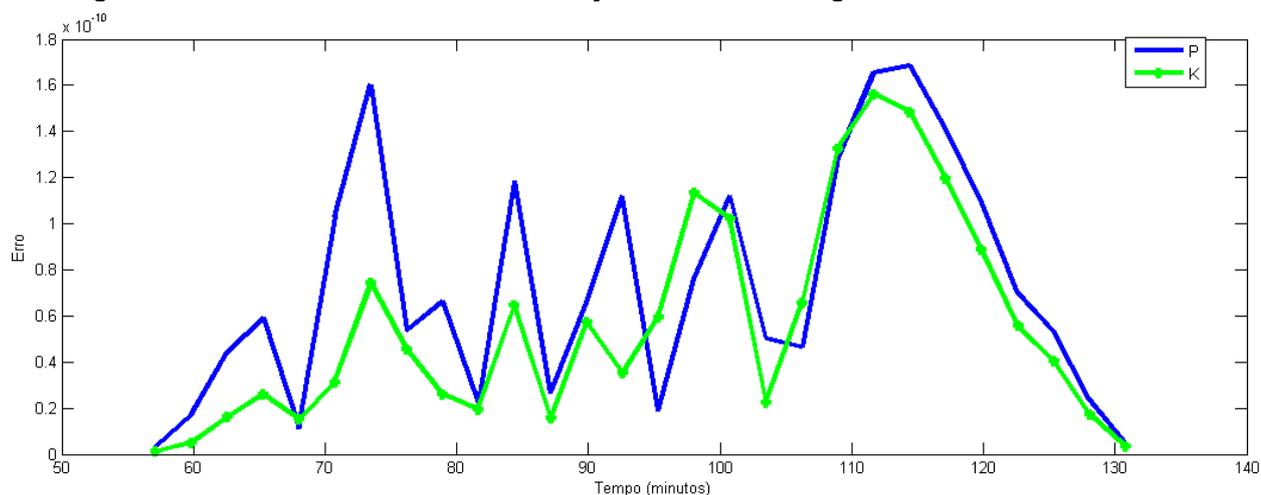
Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 6 – Ilustração do Quadro 3 (completo), tomando as partes imaginárias das colunas P e K.



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 7 – Gráfico do módulo da diferença entre o sinal original e os sinais reconstruídos.



Fonte: Dados da pesquisa.

A partir dos resultados apresentados no Quadro 3 e nas Figuras Figura 5, Figura 6 e Figura 7, é possível observar como as combinações dos métodos foram eficazes na estimação dos parâmetros do sinal que representa a concentração do contaminante ao longo do tempo. Agora, a combinação dos métodos de Kung e mínimos quadrados mostrou-se um pouco melhor, como se percebe na Figura 7. Em relação à parte imaginária nas reconstruções dos sinais, a Figura 6 mostra uma oscilação muito próxima de zero, como esperado.

5. Considerações Finais

Este artigo teve como objetivo apresentar combinações de métodos da Álgebra Linear Computacional, no caso Prony e Mínimos Quadrados, e Kung e Mínimos Quadrados, para determinar os coeficientes lineares e as exponenciais de sinais modelados por somas de exponenciais complexas, fazendo uso do *software* MATLAB para a simulação numérico-computacional.

Fundamentando-se na teoria matemática apresentada e nas simulações realizadas como ilustração, conclui-se que as duas combinações de métodos são eficazes para a estimação de parâmetros do modelo representado na Eq. (3.1). Numericamente falando, as simulações indicam que o erro apresentado nos sinais reconstruídos, em comparação com os originais, é praticamente desprezível. Cabe ainda ressaltar que os erros na recuperação dos parâmetros dos sinais ilustrados são da mesma ordem de grandeza, não sendo possível, aqui, inferir sobre qual combinação de métodos seja mais eficiente.

Referências

BARBOSA JR., A. R. **Uso de traçadores na determinação de parâmetros de qualidade em escoamentos naturais de água**. 1997. Tese (Doutorado em Hidráulica e Saneamento) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997.

BAZÁN, F.; CARDOSO, M. I. Métodos de álgebra linear computacional para problemas de posto incompleto. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 23., 2000, Florianópolis. **Notas de minicurso**. Florianópolis: SBMAC, 2000. p. 1-86.

CUNHA, C. **Métodos numéricos**. Campinas: UNICAMP, 2000.

KUMARESAN, R; TUFTS, D. W. Estimating the parameters of exponentially damped sinusoids and pole-zero modeling in noise. **IEEE Transactions On Acoustics, Speech And Signal Processing**, v. 30, n. 6, p.833-840, dez. 1982.

KUMARESAN, R; TUFTS, D. W; SCHARF, L. L. A Prony method for noisy data: choosing the signal components and selecting the order in exponential signal models. **Proceedings of the IEEE**, S.I., v. 72, n. 2, p. 230-233, feb. 1984.

KUNG, S.-Y. A new identification and model reduction algorithm via singular value decomposition. In: CONF. ON CIRCUITS, SYSTEMS AND COMP., 12., 1978, Asilomar. **Proceedings...** 1978. p. 705-714.

MARPLE, S.L. **Digital Spectral Analysis with Applications**. San Diego, California: Prentice Hall, 1987.

MITRA, S. K. **Digital signal processing: a computer-based approach**. Singapura: McGraw-Hill, 1998.

POOLE, D. **Álgebra linear**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

PRONY, G. R. Essai experimental et analytique sur les loi de la dilatabilité et surcelles de la force expansive de lavapeur de l'eau et de lacapeur de l'alkool, à diferentes températures. **Journal de l'Ecole Polytechnique**, S.I., n.1, p. 24-76, 1795.

SOUSA, E. P; RODRIGUES, P. P. G. W.; MOURA NETO, F. D. Obtenção do coeficiente de dispersão em escoamentos fluviais. In: ENCONTRO DE MODELAGEM COMPUTACIONAL, 11., Volta Redonda, 2008. **Anais...** Volta Redonda: UFF. Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda, 2008.