Uma compreensão matemática dos Jogos de Somatórios

A mathematical understanding of Summation Games

Ross Alves do Nascimento
Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE), Recife, PE, Brasil
ross.n58@gmail.com

Informações do Artigo

Histórico do Artigo
Submissão: 14 de fevereiro de 2017.
Aceite: 03 de maio de 2017.

Palavras-chave
Jogos de Somatório
Prática de Ensino
Sistemas de Equações
Teorias da Aprendizagem

Resumo

Este estudo analisa o conhecimento matemático vivenciado nos jogos de somatórios (triangular, quadrado, estrelar, entre outros). Várias são as estratégias que podem ser utilizadas para atividades de ensino nos diversos níveis de escolaridade. O uso de jogos no ensino é defendido em diversas pesquisas (BORIN, 2004; GUZMÁN, 1990; GARDNER, 1961; HUIZINGA, 1971; MIORIN; FIORENTINI, 1990), em uma perspectiva que propõe a prática/manipulação a partir das teorias do ensino aprendizagem. Esse tipo de proposta vem sendo explorada de forma sistemática no LACAPE/UFRPE (Laboratório Científico de Aprendizagem Pesquisa e Ensino), por meio do projeto de desenvolvimento de jogos matemáticos, o qual envolve grupos de alunos tanto da Licenciatura em Matemática quanto da Licenciatura em Pedagogia, para explorar tarefas de investigação no uso de jogos matemáticos do Ensino Básico. Nesse estudo, participaram 14 alunos de uma turma de Prática de Ensino de Matemática I do turno da noite, que deveriam descrever o conhecimento matemático envolvido em um jogo somatório triangular e apresentar uma generalização dessa atividade. Os resultados indicam que os estudantes conseguem oferecer uma descrição dos elementos matemáticos presentes na atividade, produzem situações novas para enriquecer esse saber e exploram compreensão dos campos matemáticos requisitados na situação, como: lógica e sequências, operações matemáticas, construção de modelos, combinatória e probabilidade, entre outros conhecimentos.

Keywords
Summation Games
Teaching Practice
Systems of Equations
Learning Theories

Abstract

This study analyzes the mathematical knowledge experienced in summation games (triangular, square, star, among others). Several strategies can be used for teaching activities at various levels of education. Using games in teaching is advocated in many researches (BORIN, 2004; GUZMÁN, 1990; GARDNER, 1961; MIORIN; FIORENTINI, 1990; HUIZINGA, 1971), in a perspective that proposes the practice/manipulation with learning-teaching theories. This type of proposal has been systematically explored in LACAPE/UFRPE (Learning Scientific Laboratory Research and Teaching), when we work with groups of students either of Mathematics graduation as of Pedagogy, to become involved in research tasks in the use of mathematical games of Basic Education. In this study, 14 students of the Mathematical Teaching Practice I class at the night shift participated. They should describe the mathematical knowledge involved in a triangular summation and present a generalization of this activity. The results indicate that students can offer a description of the mathematical elements present in the activity, produce new situations to enrich this knowledge and explore understanding of mathematical fields required in the situation, such as: logic and sequences, mathematical operations, construction of models, combinatorics and probability, among other knowledge.

1. Introdução

Trabalhar situações de aprendizagem utilizando jogos tornou-se uma prática bastante frequente na escola. As propostas metodológicas para o ensino de matemática que envolvem Modelagem, Resolução de Problemas, Recursos Computacionais, entre outras, enriquecem e valorizam uma aprendizagem significativa (AUSUBEL, 1978). Nesse sentido, as estratégias de utilização e exploração do conhecimento matemático a partir do uso de jogos são várias. Constatam-se atividades que envolvem recreações, adivinhações, charadas (HUIZINGA, 1971:2003; KISHIMOTO, 1994, 2006), jogos de manipulação (DIENES, 2004), estratégia de ensino (SMOLE *et al.*, 2007), instrumento recreativo (GARDNER, 1961), entre outras formas de atividades discutidas em várias pesquisas.

Com relação aos jogos de somatório, percebe-se que as atividades de ensino que exploram esse tipo de proposta têm um bom potencial para favorecer aplicações da matemática. Além disso, promovem o entendimento de conceitos específicos do campo da álgebra e da aritmética que podem ser generalizáveis para situações exploradas pelos estudantes, como discute Vergnaud (1991), quando aponta para a necessidade do envolvimento do estudante com diferentes situações que deem significado aos conceitos e procedimentos matemáticos que necessita aplicar.

2. Os Jogos e o Ensino de Matemática

A utilização do conhecimento matemático nas atividades que envolvem o uso de jogos é bastante intensa, gerando campos e formas de investigação em diversas áreas, com destaque para: Psicologia (PIAGET, 1977, 1988; VYGOTSKY, 1984,1988), Psicopedagogia (KISHIMOTO, 1994; AUSUBEL, 1978; KARMILOFF-SMITH; INHELDER, 1974; FREIRE, 1987:1988; GARDNER, 1961), Sociologia (CAILLOIS, 1990), Filosofia (HUIZINGA, 1971) e especificamente na Educação Matemática (VERGNAUD, 1987; BROUSSEAU, 1986; D'AMBROSIO, 2002; ETESSAMI, 2004) entre outras.

Os conceitos matemáticos explorados e vivenciados na sala de aula ainda são trabalhados a partir de metodologias tradicionais. Poucas são as novidades observadas, com raras exceções quanto ao modo de abordagem, onde busca-se dinamizar apenas a forma como os conceitos devem ser trabalhados com os alunos, já que estes podem receber novidades e incrementações que valorizam o conhecimento matemático.

Os professores de matemática vivenciam um momento em que devem inovar suas metodologias de ensino, pois é fundamental discutir, abordar e sugerir novas estratégias, diferenciando cada aula no seu trabalho de ensino da matemática. Esse procedimento permite que os alunos fujam de uma metodologia tradicional e comecem a praticar e vivenciar situações de ensino em que são cobrados: o raciocínio lógico, a dedução, a experimentação, entre outros. Kishimoto (2006), quando discute o uso de jogos no ensino, destaca a importância da análise e escolha dos jogos, e que os profissionais de ensino procurem conhecer e estudar o material antes da proposição aos alunos.

Diante de tal problemática, muitos professores buscam aperfeiçoar suas técnicas de ensino para que as aulas sejam mais atraentes e dinâmicas. A aplicação de problemas matemáticos em forma de jogos tem oportunizado a conquista dos alunos, que podem ser atraídos por diversas formas de aprendizagem e interação. Existem casos em que terão de apresentar dados ou pesquisar para explicar por meio de linguagem matemática o conhecimento que está envolvido ou representado na atividade (como discutido no tópico 3 deste texto). Assim, o estudante estará realizando, em certos casos, atividades de modelagem, preenchendo como destaca Nascimento (2007, p. 40), o "hiato entre a prática, digamos profissional da modelagem matemática e o seu uso na Educação Matemática". A Modelagem Matemática (BASSANEZI, 2002; BEAN, 2001; BIEMBENGUT; HEIN, 2000; BLUM; NISS, 1991) é uma prática com destaque na Educação Matemática, que vem sendo pesquisada nos diversos níveis de escolaridade, quando se requisita dos estudantes soluções construtivas a partir dos conhecimentos prévios que dominam.

A proposta de utilização de jogos na sala de aula é importante para o desenvolvimento individual e social dos alunos, pois existem aqueles que ficam inibidos na ação de perguntar sobre determinados conhecimentos e conteúdos, de expressar dúvidas, sendo a Matemática um problema para muitos deles. Nesse sentido, a realização de atividades que fazem uso de jogos pelos professores é uma estratégia que visa superar as dificuldades apresentadas em matemática por alguns alunos. A cooperação mútua, a participação em equipe, a busca incessante para elucidar um problema proposto, são momentos de liberdade na aprendizagem. Para que isso aconteça, o educador precisa de um planejamento organizado e de um material didático-pedagógico (jogo) que proporcione ao aluno buscar conhecimentos e resultados. Esse material precisa ser interessante, desafiador e estimulador. Huizinga (1971, p. 33) quando discute a importância da atividade com jogos afirma que:

> O jogo é uma atividade ou ocupação voluntária, exercida dentro de certos e determinados limites de tempo e de espaço, segundo regras livremente consentidas, mas absolutamente obrigatórias, dotado de um fim em si mesmo, acompanhado de um sentimento de tensão e de alegria e de uma consciência de ser diferente da vida quotidiana.

O uso de jogos no ensino de matemática às vezes vem acompanhado de uma série de exercícios que podem ser propostos aos alunos a partir da atividade. Portanto, deve-se buscar entender a diferença que existe entre exercícios e problemas. Lopes (2007, p. 12-13) discute que um problema "é uma situação que o aluno se depara, de pouca ou de muita complexidade, e para o qual não tem uma resposta imediata, mas para o qual necessita de meios intelectuais para resolvê-los". A pesquisadora ainda enfatiza que "exercício é uma situação que o aluno se depara e já sabe resolver ou tem memorizado o mecanismo de como resolver". Desse modo, ao explorar um jogo, o professor deve ter em mente quais conteúdos trabalhar ao nível de conhecimento dos alunos.

Dante (1991) no seu livro "*Didática da Resolução de Problemas*" destaca uma classificação dos tipos de problemas que vão ajudar o professor a melhor explorá-los em situações de ensino. Já Nascimento (2007, p. 94), discute sobre um novo olhar para os problemas do tipo "abertos" desenvolvido e explorado por Arsac *et al.* (1991). Ele dinamiza uma nova proposta, fazendo surgir o problema "completamente aberto", quando propõe a necessidade de esconder os elementos construtores do problema, deixando-o "completamente aberto" para se trabalhar as situações de Modelagem Matemática que investigou (NASCIMENTO, 2007).

Com esse propósito, foi observado e investigado um tipo de problema que vai gerar estudos e resoluções para o seu explorador. São os problemas "generalizáveis", em que se podem construir novas ampliações a partir dele. Os jogos de somatório estão nessa classe de problemas.

2.1. O Jogo de Somatório "Quadrado Mágico"

Os jogos de somatório apresentam técnicas de resolução específicas, constantemente baseadas no cálculo mental e lógica matemática. Um jogo desse tipo bastante oferecido nas escolas é o "Quadrado Mágico", no qual os números de 1 a 9 devem ser inseridos e sem repetição, de modo que a soma dos algarismos em todas as linhas, colunas ou diagonais deve ser sempre 15, conforme a Figura 1.

Figura 1 – Quadrado mágico de soma 15.

4	3	8
9	5	1
2	7	6

Fonte: Elaboração do autor (2016).

A estratégia explorada nesse material inicia por meio de preenchimento aleatório, quando por "tentativa e erro" as crianças percebem que os numerais de 1 a 9 podem ser arrumados nos quadradinhos, possibilitando uma mesma soma (15) nas colunas, linhas e diagonais. No entanto, um tópico específico para explicação do preenchimento e uso de outras estratégias desse jogo é a sua modelagem, quando recorre-se ao campo matemático de sistema de equações.

Nascimento e Gitirana (2013, p. 131) discutem sobre a importância dos aspectos didáticos para o uso da Modelagem Matemática em sala de aula, quando destacam que "uma abordagem que preze pela modelagem apresenta limites e possibilidades, aos quais os professores precisam estar atentos". É claro que vai depender de algumas condições apropriadas para gerar as discussões que devem ocorrer no processo de modelagem.

3. Fundamentação Didática em Atividades com Jogos

Seguindo o caminho da teoria da Transposição Didática (CHEVALLARD, 2005), que estuda as transformações que vão sofrendo os conteúdos da educação matemática desde quando são constituídos/produzidos em saberes científicos até receberem uma transformação para entrar no campo de saber escolar, que deverá ser trabalhado com os estudantes, entende-se que se devem valorizar as situações de ensino em que os conteúdos matemáticos presentes nos jogos precisam ser identificados como parte desse processo de transformação.

Outro fato é o valor que se deve dar ao lado histórico que envolve a teoria dos jogos, que remetem a registros desde o século XVIII, com destaque para alguns matemáticos: Nicolas Bernoulli (1695-1726), James Waldegrave (1684-1741), Ernst Zermelo (1871-1953), John von Neumann (1903-1957), entre outros. A partir daí, suas ações e estudos começaram a incorporar saberes específicos dessa teoria no campo do conhecimento matemático. Portanto, enriquecer o aluno de saberes, que precisam ser mais bem utilizados por ele como ferramentas de aprendizagem, traz para a didática da matemática uma responsabilidade quanto à valorização de elementos que são importantes para o estudo e compreensão do aprender e ensinar. Focar desde cedo no significado da Matemática e em suas imbricações, leva o aluno a uma compreensão mais apurada das conexões que estão estabelecidas na própria matemática e também com as outras ciências.

Os cadernos dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) enriquecem as orientações para o ensino, sustentam e valorizam propostas de aprendizagem em matemática. O foco baseia-se na resolução de problemas e nas contribuições que essa prática proporciona no significado da matemática para o aluno, levando-se em conta as compreensões das conexões que ele estabelece entre ela e as demais áreas.

No Ensino, discute-se que a matemática deve ser uma ferramenta/linguagem para divulgar conhecimentos das outras ciências (por meio de modelagem). Nesse sentido, ao estabelecer relações, o aluno começa a perceber o significado da linguagem matemática, de saber o que ela representa. Ter um referencial de linguagem deve ser próprio em qualquer área, para se compreender e perceber a estrutura de um problema ou situação. Neto (2007) discute que entender as relações existentes entre os elementos do problema e o próprio problema é importante na sua solução. Sendo assim, a Álgebra é um importante campo da matemática que auxilia o ser humano na compreensão de conhecimentos e das estruturas matemáticas. Conhecê-la e trabalhar a sua simbologia faz parte da formação matemática de qualquer estudante.

Entende-se que o estudo de problemas que buscam recurso nessa área deve ser mais utilizado no ensino de matemática. Esse é um mecanismo de reforço para implementação de outros campos da matemática que estão ou são associados e dependentes do conhecimento e da aplicação da álgebra. Esse campo do conhecimento deve ser bem compreendido pelos estudantes, pois com essa base, podem explorar com mais significado a estrutura da álgebra e investigar em diversas situações as compreensões de generalização dos problemas ou a partir deles observar novas estruturas de construção.

4. Metodologia

Com o objetivo de investigar como os futuros formandos da Licenciatura em Matemática entendem a relação das atividades com jogos aritméticos e a presença da matemática nesses jogos, propomos uma situação de modelagem do jogo de somatório “triângulo mágico” ou triângulo de seis casas. Participaram do estudo 14 alunos de uma turma de Prática de Ensino de Matemática I do turno noturno, com os quais buscava-se perceber as ações que eles utilizam ou visualizam para entendimento e aplicabilidade dos conhecimentos matemáticos que dominam e que estão presentes nesse jogo a partir do preenchimento, bem como que processo de modelagem (esquema matemático), que pode ser apresentado para descrever as possibilidades matemáticas do jogo.

Os dados do estudo foram anotações dos estudantes (como o processo de resolução apresentado na subseção 4.1, questionamentos e discussões sobre a modelagem do problema, generalizações do problema, mapeamento de estratégias, entre outros aspectos.

O experimento que gerou esse trabalho é fruto do desenvolvimento dos projetos de pesquisa realizados no LACAPE sobre uso e análise de jogos matemáticos, que posteriormente foram aplicados nas atividades de ensino da disciplina de Prática de Ensino de Matemática I, oferecida no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco. Nesta proposta, sempre foram exploradas atividades com grupos de estudantes para que trabalhassem com jogos de somatório aritmético (triângulos, quadrados, círculos, entre outros), estruturas generalizáveis que foram sendo analisadas por meio da técnica de Modelagem Matemática (construção do modelo), a qual define sua estrutura e possibilidades de solução.

Os problemas foram propostos para análise crítica dos estudantes que estavam matriculados na disciplina e buscou-se verificar a importância do conhecimento matemático, aprendizagens e sua aplicabilidade. Os estudantes participantes do estudo foram reunidos em grupos, que deveriam analisar problemas de somatório aritmético e a partir disso propor sua solução, além de apresentar uma análise matemática das respostas. Após essa etapa, foram questionados se havia possibilidade de generalização do problema para novas estruturas ou novos problemas, apresentando-se suas respectivas soluções e análises. Após isso, deveriam socializar no grande grupo as produções realizadas na atividade. Geralmente, como propostas de estudo, os estudantes compuseram um grupo menor para que escrevessem toda a fase do trabalho executado, detalhando a fundamentação e leituras realizadas, no sentido de compor um trabalho científico para ser divulgado como fruto da experiência.

4.1. Análise dos Jogos de Somatório

Os jogos de somatório aritmético são vários, dentre eles está o do triângulo de seis casas, conhecido como triângulo mágico (Figura 5). O problema do triângulo mágico é inicialmente dispor os números de 1 a 6 em uma pilha triangular de modo que a soma dos números de cada lado do triângulo seja sempre 9. Posteriormente, sugere-se que os alunos tentem de forma indutiva solucioná-lo também para que a soma seja 10, 11 e 12. Além disso, outras questões podem ser trabalhadas, dependendo do objetivo da atividade. Podem ser discutidas questões do tipo:

- A solução encontrada é única?
- Que situações de preenchimento estão sendo utilizadas?
- Que conhecimentos matemáticos elementares estão sendo trabalhados?
- A sequência apresentada (9, 10, 11 e 12) é a única possível, nesse triângulo?
- O triângulo é o único polígono possível para situações desse tipo?

Diniz (1991) apresenta uma discussão desse problema na Revista do Professor de Matemática, quando traz uma rica sugestão de atividade. No entanto, a necessidade de aprofundamento propõe a busca por mais conhecimentos e discussões. Tal situação-problema pode ser vivenciada nos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, pois envolve diversos conceitos e conhecimentos matemáticos, tais como adição, sequenciação, ideia de máximo e de mínimo, paridade, entre outros conceitos. Entretanto, o foco da pesquisa será voltado para avaliar as soluções do problema partindo do conceito de sistema linear.

A proposta de aplicação nos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental restringe-se quando não se faz alusão à construção matemática do jogo e da sua estrutura matemática. Mas sim, discute-se a forma de preenchimento, com destaque para os tópicos que podem ser descobertos pelos alunos:

- Soma 9 (observa-se que os números de menor valor da sequência estarão localizados nos vértices), nesse caso, um conceito importante da matemática vem à tona – a ideia de mínimo ou de soma mínima;
- Soma 10 (só os números ímpares nos vértices);
- Soma 11 (só os números pares nos vértices);
- Soma 12 (observa-se que os números de maior valor da sequência estarão localizados nos vértices), nesse caso, um outro conceito importante da matemática vem à tona – a ideia de máximo ou de soma máxima.

Para o Ensino Fundamental, pode-se modificar a sequência original, requisitando-se novos intervalos no conjunto dos inteiros positivos. Por exemplo: substituir a sequência 1, 2, 3, 4, 5, 6, por uma nova sequência, do tipo: 3, 4, 5, 6, 7 e 8, levando os estudantes a perceber que as propriedades são mantidas.

Tanto no caso do quadrado mágico (somatório 15), apresentado na Figura 1, quanto no triângulo de seis casas (Figura 5 – Soluções do triângulo mágico de seis casas.), observa-se que, nesses jogos, pode-se trabalhar também no campo dos inteiros negativos, por exemplo: no caso do quadrado mágico, pode-se propor aos estudantes que preencham o quadrado com os números da sequência (-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9), o que ocasionará um resultado do somatório igual a -15 (Figura 2).

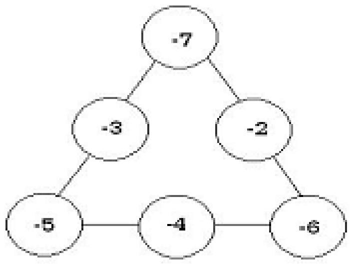
Figura 2 – Quadrado mágico com somatório negativo.

−8	−1	−6
−3	−5	−7
−4	−9	−2

Fonte: Elaboração do autor (2016).

Já no caso do triângulo de seis casas, pode-se sugerir a sequência (-7, -6, -5, -4, -3, -2), em que um dos resultados também é -15, como apresentado na Figura 3. Há ainda a possibilidade de mesclar o intervalo com números positivos e negativos. Nesse caso, novas soluções são encontradas a partir da sequência que vai ser estabelecida, tanto para o quadrado mágico, quanto para o triângulo.

Figura 3 – Triângulo mágico com somatório negativo.



Fonte: Elaboração do autor (2016).

Outra proposta bastante rica é a ampliação do número de casas nos lados do triângulo. Ampliam-se para 4, 5 ou mais casas em cada lado do triângulo, dependendo do objetivo de estudo.

No Ensino Médio, busca-se a mesma compreensão trabalhada no Ensino Fundamental, mas pode-se expandir a investigação para a fase explicativa do problema (modelagem). Questões podem ser levantadas, como por exemplo: Por que esses resultados são possíveis? Por que tal soma não é possível? Isso leva a uma busca do entendimento do problema e diversos conhecimentos matemáticos são requisitados, tais como: operações, paridade, combinatória, probabilidade, entre outros. Entretanto, o foco da pesquisa está voltado para avaliar as soluções do problema partindo do conceito de sistemas lineares. Esse é o campo de investigação que pretende-se apresentar. É nesse campo que estará a base de demonstração e construção do modelo explicativo para as soluções do problema e suas generalizações.

Uma solução do triângulo mágico de somas (9, 10, 11 e 12) é apresentada no modelo da Figura 4. Deve-se partir para o caminho algébrico com uma demonstração que pode ser baseada no conceito e nas propriedades de sistemas lineares. Esse conceito, baseado no campo da Álgebra Linear, está conectado a diversos conteúdos que são importantes para a aprendizagem dos estudantes, destacando-se matrizes, determinantes, transformações lineares, dentre outros.

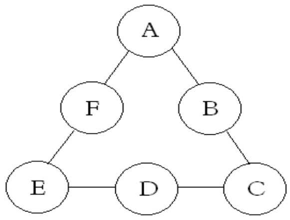
A importância dos conceitos próprios da teoria algébrica para os estudantes são caracterizados por uma conexão desses com outros conteúdos de diferentes áreas da Matemática.

O estudante começa a necessitar, por exemplo, como no nosso caso, discutir por meio de descrição e representação algébrica, as demonstrações e provas da possibilidade dos somatórios do triângulo mágico. Acredita-se que esse tipo de atividade ocorrendo desde cedo no Ensino Médio vai proporcionar aos estudantes possibilidades e ganho de saberes conceituais que lhes darão subsídios para entender o significado do conhecimento algébrico, fugindo assim do grupo de estudantes que chegam à universidade sem participar de propostas que enriquecem a aplicação de conceitos algébricos.

Essa discussão sobre como valorizar a introdução da álgebra no ensino, nos lembra o estudo de Dorier *et al.* (2000), quando constataram que nos primeiros períodos das universidades francesas, o ensino de Álgebra Linear não era promissor, pois foi verificado uma grande dificuldade nos conceitos e métodos de ensino, considerados "pobres", quanto ao conhecimento das bases da Álgebra Linear, que destacava uma ênfase no ensino e aplicações de técnicas sem, entretanto, valorizar a compreensão dos conceitos requisitados.

Modelar a estrutura que vai gerar um conhecimento das possibilidades e possíveis soluções do triângulo mágico de seis casas, requer uma busca no conhecimento e conceitos que envolvem sistemas lineares. Observemos os casos a seguir.

Figura 4 – Triângulo mágico de seis casas.



Fonte: Elaboração do autor (2016).

A lógica do problema consiste em criar um sistema linear de três equações e seis incógnitas.

$$\begin{cases} A+B+C=K \\ C+D+E=K \\ E+F+A=K \end{cases} \tag{1}$$

Somando-se as três equações acima, tem-se:

$$(2A+2C+2E)+B+D+F=3K \tag{2}$$

Como $S=A+B+C+D+E+F$, obtém-se:

$$B+D+F=S-(A+C+E) \tag{3}$$

Substituindo (3) em (2), chega-se a uma equação do valor de K, $2A+2C+2E+S-(A+C+E)=3K$, e, portanto:

$$A + C + E + S = 3K \tag{4}$$

$$\frac{(A + C + E) + S}{3} = K \tag{5}$$

Assim, é possível analisar as possibilidades de soluções a partir de K, que define as somas possíveis para o problema.

Nota-se que as incógnitas A, B, C, D, E e F (sequência de seis números naturais), podem assumir qualquer valor, em particular, podem assumir os valores da sequência original: 1, 2, 3, 4, 5 e 6. O maior valor para K será quando a soma entre os três números $(A + C + E)$ dessa sequência for a maior possível, ou seja, quando $A = 4$, $C = 5$ e $E = 6$, daí temos que $4 + 5 + 6 = 15$. Portanto, o maior valor de K será:

$$A + C + E + S = 3K \tag{6}$$

que resultará na soma 12, que será máxima.

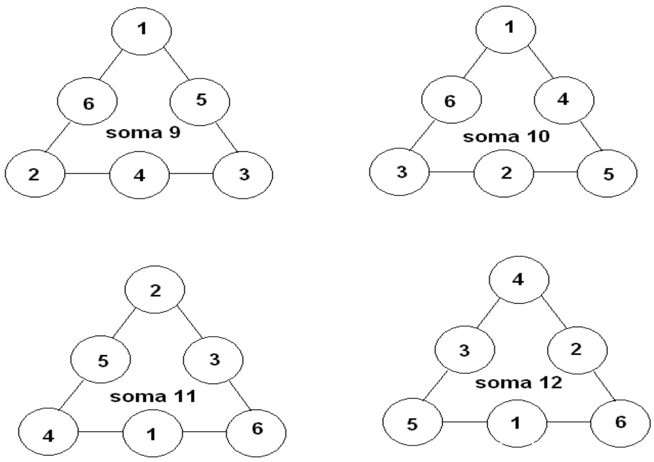
Analogamente, o menor valor para K será quando a soma entre os três números $(A + C + E)$ dessa sequência for a menor possível, ou seja, quando $A = 1$, $C = 2$ e $E = 3$, o que resulta em $1 + 2 + 3 = 6$. Portanto o menor valor de K será:

$$A + C + E + S = 3K \tag{7}$$

que resultará na soma 9, que será mínima.

Dessa forma, conclui-se que K deve sa zer a relação $9 \leq K \leq 12$. A Figura 5 ilustra os casos de K tendo soma 9, 10, 11 e 12.

Figura 5 – Soluções do triângulo mágico de seis casas.

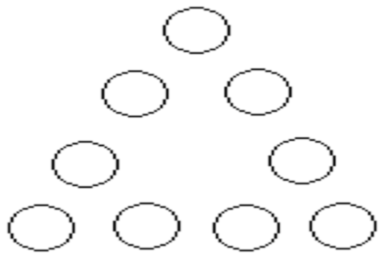


Fonte: Elaboração do autor (2016).

As generalizações para o somatório triangular são obtidas a partir da modificação da sequência (1, 2, 3, 4, 5, 6) ou do formato do triângulo para quatro peças em cada lado do triângulo

(Figura 6). Nesse caso, a partir da sequência (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), o problema passa a ter cinco soluções de somatórios (17, 19, 20, 21, 23).

Figura 6 – Representação para o somatório triangular de 9 casas.



Fonte: Elaboração do autor (2016).

Algumas questões que podem ser levantadas para problemas desse tipo são:

- Se existem soluções, essas soluções são únicas?
- Por que as somas 18 e 22 não são possíveis no triângulo de quatro casas?
- Que soluções são possíveis de obter para um triângulo de cinco casas?

Essas e outras questões podem ser discutidas a partir da modelagem desse tipo de situação-problema. As generalizações obtidas a partir da modificação da forma geométrica do jogo também são diversas. Podem-se criar quadrados, círculos, pentágonos, estrelas, entre outros. É claro que nesses casos existirão alguns casos particulares, como a estrela de cinco pontas, que não obedece a uma lei de somatório para cada um de seus lados. Nesse caso, deve-se discutir o porquê desse fato.

5. Resultados e Discussão

As atividades descritas neste estudo proporcionaram aos estudantes da Licenciatura em Matemática um novo olhar para a aplicação dos conhecimentos matemáticos adquiridos. A prática do emprego dessa atividade em turmas de formação de professores tem uma receptividade validada pelo fato de se buscar um processo de contextualização do conhecimento matemático, percebendo-se o quanto a matemática é necessária como linguagem de comunicação e explicação dos fenômenos.

Os estudantes afirmaram que esse tipo de atividade os levou a manipular um sentido prático da matemática, que modelar problemas desse tipo é importante, pois resgata e incentiva a aplicação do saber que dominam.

Percebe-se que a “abordagem humanista” como uma sugestão metodológica citada em Maio e Chiummo (2012), proporciona o desejo de aprender, característica inata, que possibilita mudanças no comportamento dos estudantes.

O trabalho realizado pelos estudantes que participaram do estudo foi proposto como sugestão de atividade para apresentação em um congresso científico local (XI Semana de Matemática realizada pelo Departamento de Matemática da universidade – IX SEMAT – UFRPE).

Um dos pontos em destaque dessa sugestão foi a possibilidade de por em prática as discussões levantadas na realização da atividade para outros estudantes e participantes do encontro.

Todos os estudantes que participaram da atividade estavam em processo de finalização de curso de graduação e argumentaram que a formação em Licenciatura em Matemática, nos primeiros períodos, não fomenta o envolvimento dos alunos com esse tipo de proposta. Percebe-se que o ensino de matemática nos primeiros períodos do curso de Licenciatura vem ocorrendo sem um significado de sua aprendizagem e repleto de técnicas operacionais para uso de algoritmos. Como destaque para essa crítica, Maio e Chiummo (2012, p. 2) destacam que "ensinam-se os cálculos operacionais, as regras práticas da geometria, como se isso fosse matemática, mas não é". Buscando quebrar esse viés formativo, as atividades de ensino apresentadas neste estudo realizado na UFRPE, buscam inserir a proposta humanista do ensino, na formação acadêmica dos futuros professores.

Diante de tudo o que foi exposto anteriormente, entende-se que o trabalho com jogos de somatório tem um bom potencial para favorecer contextos do conhecimento matemático, oferecendo aos estudantes desde o por em prática, o enfrentamento de desafios e o aprender com sua manipulação. O trabalho que vem sendo desenvolvido no LACAPE com os jogos de somatório propõe aos estudantes modelar, generalizar, entender contextos e aplicar os saberes matemáticos requisitados para esse recurso de aprendizagem.

O trabalho desenvolvido no LACAPE nos traz ganhos importantes na proposta de formação de professores desenvolvida na UFRPE. Vários projetos baseados tanto na construção quanto na análise de jogos e materiais manipulativos, promovem uma formação mais sustentada nesses saberes para os estudantes de Licenciatura em Matemática e de Licenciatura em Pedagogia.

Os estudantes passam a valorizar e entender saberes constituintes que fazem parte dos materiais didáticos que analisam através das propostas de estudos oferecidas no laboratório e, consequentemente, se apropriam de conhecimentos que os colocam como idealizadores de jogos matemáticos, etapa essa complementar trabalhada no LACAPE/UFRPE.

Referências

ARSAC, G.; GERMAIN, G; MANTE, M. **Problème ouvert et situation-problème**. Lyon: Presses Universitaires de Lyon, 1991.

AUSUBEL, D.; NOVAK, J.; HANESIAN, H. **Educational Psychology**: A Cognitive View. 2. ed. New York: Holt, Rinehart & Winston, 1978.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.

BEAN, D. O que é Modelagem Matemática. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v. 8, n. 9/10, p. 49-57, abr. 2001.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2000.

BLUM, W.; NISS, M. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects: state, trends and issues in mathematics instruction. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecth, v. 22, n. 1, p. 37-68, 1991.

BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas**: uma estratégia para as aulas de matemática. 5. ed. São Paulo: CAEM/IME-USP, 2004.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes en didactique des mathematiques. **Recherches en didactique des mathématiques**, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 35-115, 1986.

CAILLOIS, R. **Os jogos e os homens**: a máscara e a vertigem. Trad. GARCEZ, J. Lisboa: Gradiva, 1990.

CHEVALLARD, Y. **La transposición didática**: del saber sábio al saber enseñado. Trad. GILMAN, C. 3. ed. Buenos Aires: Aique, 2005.

D'AMBRÓSIO, U. Conversas Matemáticas: metodologia de pesquisa ou prática professoral? In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS- GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2002, Campinas. **Anais...** Campinas, 2002. p. 18- 20.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática**. 2. ed. São Paulo: Ática, 1991.

DIENES, Z. P. **Mathematics as an Art form**: an essay about the stages of mathematics learning in an artistic evaluation of mathematical activity, 2004. Disponível em: <http://www.zoltandienes.com/wp-content/uploads/2010/05/Mathematics_as_an_art_form.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2014.

DINIZ, M. I. A Metodologia de Resolução de Problemas. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 18, p. 12-15, 1991.

DORIER, J. L.; ROBERT, A.; ROBINET, J.; ROGALSKI, M. On a research program about the teaching and learning of linear algebra in first year of French science university. **International Journal of Mathematical Education in Sciences and Technology**, v. 31, n. 1, p. 27-35, 2000.

ETESSAMI, K. **Algorithmic Game Theory and Aplications**. Lecture Notes. Edimburgo, 2004.

FREIRE, P. **Na escola que fazemos**. Rio de Janeiro: Vozes, 1988.

FREIRE, P. **O processo educativo segundo Paulo Freire e Pichon Rivière**. Rio de Janeiro: Vozes, 1987.

GARDNER, Martin. **Divertimentos matemáticos**. São Paulo: Ibrasa, 1961.

GUZMÁN, M. de. **Aventuras Matemáticas**. Lisboa: Gradiva, 1990.

HUIZINGA, J. **Homo Ludens**: o jogo como elemento da cultura. São Paulo: Perspectiva, 1971.

HUIZINGA, J. **Homo Ludens**: um estudo sobre o elemento lúdico da cultura. Lisboa: Edições 70, 2003.

KARMILOFF-SMITH, A.; INHELDER, B. If you want to go ahead, get a theory. **Cognition**, v. 3, n. 3, p. 195-212. 1974.

KISHIMOTO, T. M. Piaget, Vygotsky e Brunner: paradigmas sobre o jogo. In: **17º Reunião Anual da ANPEd**, Caxambu, 1994, 24 p.

KISHIMOTO, T M. (Org.). **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. 9. ed. São Paulo: Cortez, 2006.

LOPES, S. E. **Alunos do ensino fundamental e problemas escolares**: leitura e interpretação de enunciados e procedimentos de resolução. 2007. 278 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2007.

MAIO, W., CHIUMMO, A. **Didática da Matemática**. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

MIORIM, M. A.; FIORENTINI, D. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino de Matemática. **Boletim da** Sociedade Brasileira de Educação Matemática, São Paulo, v. 4, n. 7, p. 5-10, 1990.

NASCIMENTO, R. A. **Modelagem Matemática com simulação computacional na aprendizagem de funções**. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007.

NASCIMENTO, R. A.; GITIRANA, V. Modelagem Matemática e os Jogos. In: GITIRANA, V.; TELES, R. A.; BELLEMAIN, P. M. B.; CASTRO, A. T.; CAMPOS, I.; LIMA, P. F.; BELLEMAIN, F. (Orgs.). **Jogos com Sucata na Educação Matemática**. 1. ed. Recife: Editora Universitária da UFPE, 2013.

NETO, M. O. T. Os significados produzidos por estudantes durante a resolução de problemas em Matemática. In: **Encontro Nacional de Educação Matemática**, 9, 2007, Belo Horizonte – MG. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Html/comunicacaoCientifica.html>. Acesso em: 04 out. 2010.

PIAGET, J. A Teoria de Jean Piaget. In: CARMICHAEL, L. **Manual de Psicologia da Criança**. Organizado por Paul Mussen. v. IV. São Paulo: USP, p. 71-116, 1977.

PIAGET, J. **A psicologia da criança**. 17. ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 1988.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.; MILANI, E. Jogos de Matemática de 6º a 9º ano. In: **Cadernos do Mathema Ensino Fundamental**. Porto Alegre: Artmed, 2007.

VERGNAUD, G. **El niño, las matemáticas y la realidad**: problemas de la enseñanza de las matemáticas em la escuela primaria. 1. ed. México: Trillas, 1991.

VERGNAUD, G. **Problem solving and concept development in the learning of mathematics**. E.A.R.L.I. Second Meeting, Tübingen, 1987.

VYGOTSKY, L. S. **O desenvolvimento psicológico na infância**. São Paulo: Martins Fontes, 1984.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1988.