Formato da solução geral das sequências recorrentes lineares homogêneas com coeficientes constantes

General solution format of the homogeneous linear recurrent sequences with constant coefficients

Victor Emmanuel Dias Gomes
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense (IFF)
Campus Macaé, Macaé, RJ, Brasil
victor.gomes@iff.edu.br

Mitchael Alfonso Plaza Martelo
Universidade Federal Fluminense (UFF), Departamento de Matemática Aplicada, Niterói, RJ, Brasil
mitchaelmartelo@id.uff.br

Informações do Artigo

Histórico do Artigo
Submissão: 5 de outubro de 2016.
Aceite: 20 de março de 2017.

Palavras-chave
Equações de Recorrência
Sequências Recorrentes
Matemática Discreta
Equações Diferenciais Ordinárias

Keywords
Recurrence Equations
Recurrent Sequences
Discrete Mathematics
Ordinary Differential Equations

Resumo
Este artigo tem o objetivo de construir a solução geral das sequências recorrentes lineares homogêneas com coeficientes constantes. Com o intuito de facilitar o entendimento do assunto e, assim, atingir uma maior quantidade de leitores, apresenta-se um argumento alternativo (ver [6], [10] e [7]). Para tal construção, foram usadas basicamente derivação de polinômios e indução matemática. Ressalta-se que a maioria dos livros que abordam o tema somente enunciam a forma que as soluções devem ter, mas não as demonstram.

Abstract
This article aims to build general solution of the homogeneous linear recurring sequences with constant coefficients. In order to facilitate understanding of the subject and thus achieve a greater amount of readers, we present an alternative argument (see [6], [10] and [7]) for such construction. In this investigation, we used basically derivation of polynomials and mathematical induction. We also emphasize that the most of the books which deal with the topic only states the way the solutions should be, but do not demonstrate it.

1 Introdução

Para chegar ao objetivo final deste artigo, inicialmente é definido o que é uma recorrência linear homogênea de ordem k com coeficientes constantes ([8], [11]). A seguir, garante-se a existência de soluções com condições iniciais e que o conjunto das soluções possui estrutura de espaço vetorial, que por sua vez possui dimensão k ([4]). Após isso, é deduzida a equação característica associada à recorrência e provada a forma das soluções a partir das suas raízes, reais ou complexas, porém sem multiplicidade. Como se pretende encontrar k soluções linearmente independentes, deduzimos outras soluções a partir das raízes múltiplas (Proposição 5.2), sendo que nesta etapa apenas usamos derivadas de polinômios ([5], [2]). Logo, de forma elementar (usando somente indução matemática) mostramos a independência linear das soluções obtidas, nosso principal resultado (Teorema 6.5), podendo, assim, enunciar a solução geral das equações recorrentes (Teorema 6.6). Finalizamos o artigo, aplicando a teoria desenvolvida às equações diferenciais ordinárias homogêneas de ordem k com coeficientes constantes ([1]).

As sequências recorrentes aparecem em diversos problemas matemáticos, por exemplo, de quantas maneiras distintas podemos guardar n dominós de dimensões 2 x 1 em uma caixa de dimensão 2 x n, supondo que todos os dominós são iguais, como se estivessem com a numeração para baixo, e sem levar em conta as espessuras desses e da caixa? De fato, esta questão pode ser resolvida através de uma sequência recorrente linear homogênea com coeficientes constantes. A solução deste problema foi feita de forma gradativa segundo o número de dominós e pode ser vista em ([3]). A solução do problema foi feita no formato de oficina em sala de aula para alunos do ensino médio, assim como outra atividade referente ao estudo das sequências recorrentes ([3]).

2 Preliminares

Definição 2.1. *Uma sequência é dita recorrente, ou simplesmente uma* **Recorrência***, quando a relação entre seus termos é dada por uma equação de recorrência, que é uma expressão matemática que relaciona um termo da sequência em função do(s) termo(s) anterior(es).*

Definição 2.2. *Uma recorrência é dita linear de ordem k, se um termo pode ser expresso em função dos k termos imediatamente anteriores de forma linear, ou seja, se podemos escrever x_{n+k} em função de $x_{n+(k-1)}$, $x_{n+(k-2)}$, ..., x_n, satisfazendo uma relação do tipo:*

$$x_{n+k} = f_{n+(k-1)}(n) \cdot x_{n+(k-1)} + f_{n+(k-2)}(n) \cdot x_{n+(k-2)} + \cdots + f_n(n) \cdot x_n + h(n),$$

onde $f_j(n)$ com $n \leq j \leq n + (k-1)$ e $h(n)$ são funções em n.

Neste artigo, será visto apenas as recorrências lineares de ordem k homogêneas com coeficientes constantes. Portanto, $f_n(n), f_{n+1}(n), \cdots, f_{n+(k-1)}(n)$ são constantes e $h(n) = 0$. Assim, a recorrência tem a seguinte forma:

$$x_{n+k} = a_1 \cdot x_{n+(k-1)} + a_2 \cdot x_{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot x_n \tag{1}$$

onde $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ são constantes arbitrárias.

Proposição 2.3. *Se $(b_1)_n, (b_2)_n, \ldots, (b_k)_n$ são soluções da recorrência de (1), então para as constantes arbitrárias $C_1, C_2, \ldots, C_k$, temos que $C_1 \cdot (b_1)_n + C_2 \cdot (b_2)_n + \cdots + C_k \cdot (b_k)_n$ também é solução.*

Prova. *Por hipótese temos,*

$$\begin{cases} (b_1)_{n+k} = a_1 \cdot (b_1)_{n+(k-1)} + a_2 \cdot (b_1)_{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot (b_1)_n \\ \qquad\vdots \\ (b_k)_{n+k} = a_1 \cdot (b_k)_{n+(k-1)} + a_2 \cdot (b_k)_{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot (b_k)_n \end{cases}$$

multiplicando as igualdades por $C_1, C_2, C_3, \cdots, C_k$, respectivamente, e somando-as

$$C_1 \cdot (b_1)_{n+k} + \cdots + C_k \cdot (b_k)_{n+k} = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \left[\sum_{j=1}^{k} C_j \cdot (b_j)_{n+(k-i)} \right]$$

□

Proposição 2.4. *Dada a recorrência $x_{n+k} = a_1 \cdot x_{n+(k-1)} + a_2 \cdot x_{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot x_n$ e números reais $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Existe uma solução b_n tal que*

$$b_1 = r_1, b_2 = r_2, \ldots, b_k = r_k.$$

Isto é, a sequência é unicamente determinada a partir de seus primeiros termos.

Prova. *Pelo princípio da indução completa. Para $p = 1$, temos:*

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= a_1 \cdot b_k + a_2 \cdot b_{k-1} + \cdots + a_k \cdot b_1 \\ &= a_1 \cdot r_k + a_2 \cdot r_{k-1} + \cdots + a_k \cdot r_1, \end{aligned}$$

logo, b_{k+1} fica unicamente determinado. Supondo que os termos $b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_{k+p}$ com $p \in \mathbb{N}$ são unicamente determinados, então

$$b_{k+p+1} = a_1 \cdot b_{k+p} + a_2 \cdot b_{k+p-1} + \cdots + a_k \cdot b_{p+1},$$

que, por indução, é unicamente determinado.

□

3 Dimensão de $\mathrm{S_k}$

Nesta seção verificaremos que a dimensão de S_k é igual a k.

Proposição 3.1. *Dada a recorrência $x_{n+k} = a_1 \cdot x_{n+(k-1)} + a_2 \cdot x_{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot x_n$, então existem $(b_1)_n, (b_2)_n, \ldots, (b_k)_n$, que são soluções linearmente independentes.*

Prova. *Pela Proposição 2.4, existe solução $(b_p)_n$, com a p-ésima coordenada igual a 1 e o restante igual a zero, isto é:*

$$(b_p)_1 = 0, (b_p)_2 = 0, \ldots, (b_p)_{p-1} = 0, (b_p)_p = 1, (b_p)_{p+1} = 0, \ldots, (b_p)_k = 0, \ com \ 1 \leq p \leq k.$$

Note que cada uma das soluções tem os primeiros k termos associado a um vetor uniário de $\mathbb{R}^k$,

$$((b_p)_1, (b_p)_2, \ldots, (b_p)_{p-1}, (b_p)_p, (b_p)_{p+1}, \ldots, (b_p)_k) = e_p = (0, 0, \ldots, 0, \underline{1}_p, 0, \ldots, 0). \tag{2}$$

Assim, existem k soluções distintas para a recorrência dada. Pela escolha dos primeiros termos ("condições iniciais") de cada sequência temos que estas são lineramente independentes. De fato, sejam $C_1, C_2, \ldots, C_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$C_1 \cdot (b_1)_n + C_2 \cdot (b_2)_n + \cdots + C_k \cdot (b_k)_n = 0, \ \ \forall n.$$

Logo, se $n = p$, com $1 \leq p \leq k$, temos

$$C_1 \cdot (b_1)_p + C_2 \cdot (b_2)_p + \cdots + C_p \cdot (b_p)_p + \cdots + C_k \cdot (b_k)_p = 0,$$

e por (2) concluímos que $C_p = 0$. Como $1 \leq p \leq k$, temos que $C_1 = C_2 = \cdots = C_k = 0$.

$\square$

Proposição 3.2. *Para quaisquer $k+1$ soluções $(b_1)_n, (b_2)_n, \ldots, (b_k)_n, (b_{k+1})_n$ da recorrência $x_{n+k} = a_1 \cdot x_{n+(k-1)} + a_2 \cdot x_{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot x_n$, o conjunto $\{(b_1)_n, (b_2)_n, \ldots, (b_k)_n, (b_{k+1})_n\}$ é linearmente dependente.*

Prova. *Suponha $\{(b_1)_n, (b_2)_n, \ldots, (b_k)_n\}$ linearmente independente. Tomando $C_{k+1} = -1$, temos*

$$C_1 \cdot (b_1)_n + C_2 \cdot (b_2)_n + \cdots + C_k \cdot (b_k)_n = (b_{k+1})_n, \ \ \forall n.$$

Logo, fazendo $n = 1, 2, 3, \ldots, k$, obtemos

$$\begin{pmatrix} (b_1)_1 & (b_2)_1 & \cdots & (b_k)_1 \\ (b_1)_2 & (b_2)_2 & \cdots & (b_k)_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (b_1)_k & (b_2)_k & \cdots & (b_k)_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b_{k+1})_1 \\ (b_{k+1})_2 \\ \vdots \\ (b_{k+1})_k \end{pmatrix}.$$

Como $\{(b_1)_n, (b_2)_n, \ldots, (b_k)_n\}$ *é linearmente independente,*

$$det\left[\begin{pmatrix} (b_1)_1 & (b_2)_1 & \cdots & (b_k)_1 \\ (b_1)_2 & (b_2)_2 & \cdots & (b_k)_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (b_1)_k & (b_2)_k & \cdots & (b_k)_k \end{pmatrix}\right] \neq 0,$$

assim o sistema acima possui solução, ou seja, $C_1, C_2, \ldots, C_k$ *estão bem definidos. Portanto, existem* $C_1, C_2, \ldots, C_k, C_{k+1} = -1 \in \mathbb{R}$*, não simultaneamente nulos, tais que* $C_1 \cdot (b_1)_n + C_2 \cdot (b_2)_n + \cdots + C_k \cdot (b_k)_n + C_{k+1} \cdot (b_{k+1})_n = 0$*. Em consequência,* $\{(b_1)_n, (b_2)_n, \ldots, (b_{k+1})_n\}$ *é linearmente dependente.*

□

4 Equação Característica: Raiz Simples

Ao estudar recorrências lineares homogêneas com coeficientes constantes de primeira (por exemplo, as Progessões Geométricas – PG) e segunda ordens, encontramos soluções da forma $x_n = r^n$. Então, supondo $x_n = r^n$ uma solução, com $r \neq 0$ e substituindo na recorrência (1), obtemos:

$$r^{n+k} = a_1 \cdot r^{n+(k-1)} + a_2 \cdot r^{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot r^n$$

Logo, dividindo ambos os membros da igualdade por r^n, teremos:

$$\mathbf{r^k = a_1 \cdot r^{k-1} + a_2 \cdot r^{k-2} + \cdots + a_k}. \tag{3}$$

A equação (3) é chamada de **equação característica** da recorrência

$$x_{n+k} = a_1 \cdot x_{n+(k-1)} + a_2 \cdot x_{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot x_n$$

Proposição 4.1. *Se* r_1 *é raiz da equação característica da recorrência* $x_{n+k} = a_1 \cdot x_{n+(k-1)} + a_2 \cdot x_{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot x_n$*, então* r_1^n *é solução da recorrência.*

Caso a raiz da equação característica seja complexa, pode-se encontrar soluções reais associadas. A proposição a seguir mostrará como isso é feito.

Proposição 4.2. *Se* $r_1 = \rho(cos\theta + isen\theta)$ *é raiz complexa da equação característica de* $x_{n+k} = a_1 \cdot x_{n+(k-1)} + a_2 \cdot x_{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot x_n$*, então* $\rho^n cos(n\theta)$ *e* $\rho^n sen(n\theta)$ *são soluções da recorrência.*

Prova. *Como r_1 é complexa, tem-se que o seu conjugado $\overline{r_1}$ também é raiz da equação característica, então pela Proposição 4.1, r_1^n e $(\overline{r_1})^n$ são soluções da recorrência. Como,*

$$r_1 = \rho(cos\theta + isen\theta) \quad \text{e} \quad (\overline{r_1}) = \rho(cos\theta - isen\theta),$$

pelo teorema de De Moivre (ver [9], p. 12), temos que

$$r_1^n = \rho^n(cos(n\theta) + isen(n\theta)) \quad \text{e} \quad (\overline{r_1})^n = \rho^n(cos(n\theta) - isen(n\theta)).$$

Logo, pela Proposição 2.3, temos que

$$\frac{r_1^n + (\overline{r_1})^n}{2} = \rho^n cos(n\theta) \quad \text{e} \quad \frac{r_1^n - (\overline{r_1})^n}{2 \cdot i} = \rho^n sen(n\theta).$$

também são soluções da recorrência.

□

5 Equação Característica: Raiz Múltipla

Já é conhecido um formato de solução e, para encontrar outras soluções que compõem S_k, é necessário o seguinte lema técnico.

Lema 5.1. *Dado o polinômio $q_0(r)$ de grau maior ou igual a m, podemos construir os polinômios $q_k(r)$:*

$$q_{k+1}(r) = r \cdot q_k'(r), \ para \ \ 0 \le k \le m-1,$$

onde $q_k'(r)$ é a derivada do polinômio $q_k(r)$. Se $r_1 \in \mathbb{C}$ é raiz de multiplicidade m do polinômio $q_0(r)$, então r_1 é raiz dos polinômios $q_k(r)$ $(0 \le k \le m-1)$.

Prova. *Como r_1 tem multiplicidade m, temos que:*

$$q_0(r_1) = q_0'(r_1) = q_0''(r_1) = \cdots = q_0^{(m-1)}(r_1) = 0 \ \ e \ \ q_0^{(m)}(r_1) \neq 0 \ \ (ver[2], \ p. 64).$$

Por hipótese, $q_1(r) = r \cdot q_0'(r)$ e, portanto, $q_1(r_1) = 0$. Além disso, suas derivadas são dadas por:

$$\begin{aligned} q_1'(r) &= q_0'(r) + rq_0''(r) \\ q_1''(r) &= 2q_0''(r) + rq_0'''(r) \\ &\vdots \\ q_1^{(k)}(r) &= kq_0^{(k)}(r) + rq_0^{(k+1)}(r) \end{aligned}$$

Repare que, se $r_1 \neq 0$ *(observe que, caso* $r_1 = 0$*, o lema é trivialmente satisfeito), então*

$$q_1(r_1) = q_1'(r_1) = q_1''(r_1) = \cdots = q_1^{(m-2)}(r_1) = 0 \;\; e \;\; q_1^{(m-1)}(r_1) \neq 0.$$

Assim, r_1 *é uma raiz de multiplicidade* $m-1$ *de* $q_1(r)$*. Logo, podemos repetir este argumento de forma análoga, obtendo*

$$q_k(r_1) = q_k'(r_1) = q_k''(r_1) = \cdots = q_k^{(m-(k+1))}(r_1) = 0 \;\; e \;\; q_k^{(m-k)}(r_1) \neq 0.$$

Como a quantidade de vezes que derivamos um polinômio deve ser maior ou igual a zero, temos que $m-(k+1) \geq 0$*, logo* $k \leq m-1$*. Portanto,* r_1 *é raiz de cada polinômio* $q_k(r)$*, com* $0 \leq k \leq m-1$*.*

□

Proposição 5.2. *Se* r_1 *é raiz de multiplicidade* $m \geq 2$ *da equação característica de* $x_{n+k} = a_1 \cdot x_{n+(k-1)} + a_2 \cdot x_{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot x_n$*, então* $r_1^n, nr_1^n, n^2r_1^n, \ldots, n^{m-1}r_1^n$ *são soluções da recorrência.*

Prova. *Definindo* $q_{k+1}(r) = r \cdot q_k'(r)$ *e* $q_0(r) = a_1 \cdot r^{n+(k-1)} + a_2 \cdot r^{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot r^n - r^{n+k}$*, o lema 5.1, garante que*

$$q_0(r_1) = q_1(r_1) = q_2(r_1) = \cdots = q_{m-1}(r_1) = 0.$$

Como $q_0(r_1) = 0$*, então* r_1^n *é solução da recorrência. Por outro lado, como*

$$\begin{aligned} 0 &= q_1(r_1) = r_1 \cdot q_0'(r_1) \\ &= a_1 \cdot (n+(k-1))r_1^{n+(k-1)} + a_2 \cdot (n+(k-2))r_1^{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot nr_1^n - (n+k)r_1^{n+k} \end{aligned}$$

temos que

$$(n+k)r_1^{n+k} = a_1[(n+(k-1))r_1^{n+(k-1)}] + a_2[(n+(k-2))r_1^{n+(k-2)}] + \cdots + a_k[nr_1^n].$$

Assim, nr_1^n *é solução da recorrência. De forma análoga, temos que*

$$\begin{aligned} q_l(r) &= r \cdot q_{l-1}'(r) \\ &= a_1 \cdot (n+(k-1))^l r^{n+(k-1)} + a_2 \cdot (n+(k-2))^l r^{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot n^l r^n - (n+k)^l r^{n+k} \end{aligned}$$

uma vez que, ao derivar cada monômio do polinômio, seu expoente multiplica o coeficiente aumentando sua potência, e ao ser multiplicado por r*, o expoente de cada monômio volta a ser o mesmo. Agora, como* $q_l(r_1) = 0$*, para* $0 \leq l \leq m-1$*, temos que*

$$(n+k)^l r_1^{n+k} = a_1[(n+(k-1))^l r_1^{n+(k-1)}] + a_2[(n+(k-2))^l r_1^{n+(k-2)}] + \cdots + a_k[n^l r_1^n].$$

Portanto, $n^l r_1^n$ *é solução da recorrência, para* $0 \leq l \leq m-1$.

□

6 Solução Geral

Dadas as sequências $\lambda^n, n\lambda^n, \ldots, n^{m-1}\lambda^n$, na qual $\lambda \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$, uma combinação linear delas pode ser escrita da forma:

$$P(n)\lambda^n$$

onde $P(n)$ é um polinômio em n, com grau menor ou igual a $m-1$. Logo, podemos reescrever a Proposição 5.2, da seguinte forma:

Proposição 6.1. *Se* r_1 *é raiz de multiplicidade* m, $m \geq 2$, *da equação característica de* $x_{n+k} = a_1 \cdot x_{n+(k-1)} + a_2 \cdot x_{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot x_n$, *então*

$$x_n = P(n) \cdot r_1^n$$

é solução da recorrência em que $P(n)$ *é um polinômio em* n, *de grau menor ou igual a* $m-1$.

Prova. *Consequência imediata das proposições 2.3, 4.1 e 5.2.*

□

Caso as raízes sejam complexas temos:

Proposição 6.2. *Se* $r_1 = \rho(cos\theta + isen\theta)$ *é raiz complexa com multiplicidade* m *da equação característica de* $x_{n+k} = a_1 \cdot x_{n+(k-1)} + a_2 \cdot x_{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot x_n$, *então*

$$Q(n) \cdot \rho^n cos(n\theta) \quad \text{e} \quad R(n) \cdot \rho^n sen(n\theta)$$

são soluções da recorrência, nas quais $Q(n)$ *e* $R(n)$ *são polinômios em* n, *de grau menor ou igual a* $m-1$.

Prova. *Consequência imediata das proposições 2.3, 4.2 e 5.2.*

□

Note que as proposições acima nos fornecem uma forma abreviada de representar as soluções, em que a informação da multiplicidade da raiz característica está contida nos polinômios $P(n)$, $Q(n)$ e $R(n)$.

6.1 Independência Linear

As proposições anteriores nos fornecem o caminho para encontrar k soluções de S_k. Para poder obter a solução geral da recorrência basta verificar que tais soluções são linearmente independentes. Dessa forma, provar-se-á os seguintes lemas técnicos:

Lema 6.3. *Se $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$ é um polinômio de grau m, e α, $\beta \in \mathbb{C}$, então $\forall n \in \mathbb{N}$, temos*

$$\alpha P(n+1) - \beta P(n) = \sum_{k=0}^{m} \left[(\alpha - \beta)a_k + \alpha \cdot \sum_{p=k+1}^{m} a_p \cdot \binom{p}{p-k} \right] n^k,$$

ou seja, $(\alpha - \beta)$ acompanha a_k, para $0 \leq k \leq m$.

Prova. *Temos que $P(n+1) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k(n+1)^k$ e, portanto, suas parcelas podem ser escritas através do binômio de Newton. Então, sua k-ésima parcela pode ser escrita como*

$$a_k(n+1)^k = a_k \cdot \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{k-p} n^p,$$

com $0 \leq k \leq m$. Fazendo k variar em seu intervalo, podemos reescrever $P(n+1)$ determinando os coeficientes de cada parcela pelos seus graus. Obtemos

$$P(n+1) = \sum_{k=0}^{m} \left[\sum_{p=k}^{m} a_p \cdot \binom{p}{p-k} \right] n^k,$$

e a forma da diferença procurada é

$$\alpha P(n+1) - \beta P(n) = \sum_{k=0}^{m} \left[(\alpha - \beta)a_k + \alpha \cdot \sum_{p=k+1}^{m} a_p \cdot \binom{p}{p-k} \right] n^k.$$

□

Lema 6.4. *Seja o polinômio $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$ e $\alpha \neq \beta \in \mathbb{C}$. Se $\alpha P(n+1) - \beta P(n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $P(x) \equiv 0$, isto é, $a_k = 0$ para $0 \leq k \leq m$.*

Prova. *Como*

$$0 = \alpha P(n+1) - \beta P(n) = \sum_{k=0}^{m-1} \left[(\alpha - \beta)a_k + \alpha \cdot \sum_{p=k+1}^{m} a_p \cdot \binom{p}{p-k} \right] n^k + (\alpha - \beta)a_m \cdot n^m,$$

com $n \in \mathbb{N}$, necessariamente tem-se que $a_m = 0$. Como o coeficiente de n^{m-1} é $(\alpha-\beta)a_{m-1} + \alpha m a_m$, concluímos que $a_{m-1} = 0$. De forma análoga, tem-se que $a_k = 0$ para $0 \leq k \leq m$, pois pelo Lema 6.3 o coeficiente do termo n^k é uma combinação linear de $(\alpha-\beta)a_k$ e dos termos $a_{k+1}, \ldots, a_m$, os quais já se sabe que são nulos. □

Teorema 6.5. *Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$, dois a dois distintos e sejam $P_j(n)$, com $1 \leq j \leq k$. Se*

$$P_1(n)\lambda_1^n + P_2(n)\lambda_2^n + \cdots + P_k(n)\lambda_k^n = 0,$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, então $P_j(n)$ é identicamente nulo para todo j com $1 \leq j \leq k$.

Prova. *Indução finita sobre k.*

1. *Se $k = 1$, ou seja, há apenas um número complexo $\lambda_1 \in \mathbb{C}^*$, tal que*

   $$P_1(n)\lambda_1^n = 0 \Rightarrow P_1(n) = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Logo $P_1(n)$ possui tantas raízes quantos os números naturais, o que implica que $P_1(n)$ é identicamente nulo $(P_1(n) \equiv 0)$.

2. *Suponha a validade para k, ou seja, para $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}^*$ diferentes entre si, se*

   $$P_1(n)\lambda_1^n + P_2(n)\lambda_2^n + \cdots + P_k(n)\lambda_k^n = 0,$$

   para qualquer polinômio $P_j(n),\ 1 \leq j \leq k$, implica que $P_j(n) \equiv 0$.

3. *Para provar a validade de $k+1$, ou seja, dados $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1} \in \mathbb{C}^*$, diferentes entre si, se para qualquer polinômio $P_i(n)$ com $1 \leq i \leq k+1$, tivermos*

   $$P_1(n)\lambda_1^n + P_2(n)\lambda_2^n + \cdots + P_k(n)\lambda_k^n + P_{k+1}(n)\lambda_{k+1}^n = 0$$

   implica que $P_i(n) \equiv 0$. Vamos focar em $P_{k+1}(n)$ pois é o polinômio que acompanha λ_{k+1}^n. Suponha que este possa ser escrito da forma:

   $$P_{k+1}(n) = b_0 + b_1 n + \cdots + b_m n^m.$$

   Indução finita sobre m.

   (a) *Se $m = 0$, então $P_{k+1}(n) = b_0 \in \mathbb{C}$. Se*

   $$P_1(n)\lambda_1^n + P_2(n)\lambda_2^n + \cdots + P_k(n)\lambda_k^n + b_0\lambda_{k+1}^n = 0, \ \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{4}$$

   então a equação acima também deve valer para $n+1$. Reescrevendo-a, obtemos

   $$P_1(n+1)\lambda_1^{n+1} + P_2(n+1)\lambda_2^{n+1} + \cdots + P_k(n+1)\lambda_k^{n+1} + b_0\lambda_{k+1}^{n+1} = 0. \tag{5}$$

   Multiplicando (4) por $-\lambda_{k+1}$ e somando com (5), temos

   $$[\lambda_1 P_1(n+1) - \lambda_{k+1}P_1(n)]\lambda_1^n + \cdots + [\lambda_k P_k(n+1) - \lambda_{k+1}P_k(n)]\lambda_k^n = 0.$$

Pela hipótese de indução, cada polinômio $\lambda_j P_j(n+1) - \lambda_{k+1} P_j(n) \equiv 0$ *com* $1 \leq j \leq k$ *e como* $\lambda_j \neq \lambda_{k+1}$*, pelo Lema 6.4, temos que* $P_j(n) \equiv 0$ *com* $1 \leq j \leq k$*. De onde segue que* $P_{k+1}(n) = b_0 = 0$*.*

(b) Suponha a validade para algum número natural $m > 0$*, ou seja, para* $P_{k+1}(n) = b_0 + b_1 n + \cdots + b_m n^m$*, se tivermos*

$$P_1(n)\lambda_1^n + P_2(n)\lambda_2^n + \cdots + P_k(n)\lambda_k^n + P_{k+1}(n)\lambda_{k+1}^n = 0,$$

então $P_i(n) \equiv 0$ *para* $1 \leq i \leq k+1$*.*

(c) Verificação da validade para $m+1$*. Escrevendo* $P_{k+1}(n)$ *na forma*

$$P_{k+1}(n) = b_0 + b_1 n + \cdots + b_{m+1} n^{m+1},$$

se vale a equação

$$P_1(n)\lambda_1^n + P_2(n)\lambda_2^n + \cdots + P_k(n)\lambda_k^n + P_{k+1}(n)\lambda_{k+1}^n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{6}$$

então esta também deve valer para $n+1$*. Reescrevendo-a, obtemos*

$$P_1(n+1)\lambda_1^{n+1} + P_2(n+1)\lambda_2^{n+1} + \cdots + P_k(n+1)\lambda_k^{n+1} + P_{k+1}(n+1)\lambda_{k+1}^{n+1} = 0. \tag{7}$$

Multiplicando (6) por $-\lambda_{k+1}$ *e somando com (7), temos*

$$\begin{aligned} 0 &= [\lambda_1 P_1(n+1) - \lambda_{k+1} P_1(n)]\lambda_1^n + \cdots + \\ &\quad [\lambda_k P_k(n+1) - \lambda_{k+1} P_k(n)]\lambda_k^n + \\ &\quad [\lambda_{k+1} P_{k+1}(n+1) - \lambda_{k+1} P_{k+1}(n)]\lambda_{k+1}^n. \end{aligned}$$

Pelo Lema 6.3, pode-se escrever $\lambda_{k+1} P_{k+1}(n+1) - \lambda_{k+1} P_{k+1}(n)$ *como*

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1} P_{k+1}(n+1) - \lambda_{k+1} P_{k+1}(n) &= (\lambda_{k+1} - \lambda_{k+1}) b_{m+1} n^{m+1} + \\ &\quad [(\lambda_{k+1} - \lambda_{k+1}) b_m + \lambda_{k+1} b_{m+1}] n^m + \cdots + \\ &\quad (\lambda_{k+1} - \lambda_{k+1}) b_0 + \lambda_{k+1}(b_1 + b_2 + \cdots + b_{m+1}). \end{aligned}$$

Note que o coeficiente de n^{m+1} *é zero, logo podemos escrever*

$$\lambda_{k+1} P_{k+1}(n+1) - \lambda_{k+1} P_{k+1}(n) = \lambda_{k+1} b_{m+1} n^m + \cdots + \lambda_{k+1}(b_1 + b_2 + \cdots + b_{m+1}),$$

que é um polinômio de grau m*. Pela hipótese de indução temos que*

$$\lambda_i P_i(n+1) - \lambda_{k+1} P_i(n) \equiv 0, \quad com \;\; 1 \leq i \leq k+1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então, pelo Lema 6.4, concluímos que $P_i(n) \equiv 0$ *para* $1 \leq i \leq k$ *(note que o Lema 6.4 não vale para* $i = k+1$*). Assim, a equação*

$$P_1(n)\lambda_1^n + P_2(n)\lambda_2^n + \cdots + P_k(n)\lambda_k^n + P_{k+1}(n)\lambda_{k+1}^n = 0 \tag{8}$$

se reduz a $P_{k+1}(n)\lambda_{k+1}^n = 0$ *e como* $\lambda_{k+1} \neq 0$*, temos que* $P_{k+1}(n) \equiv 0$.

□

Teorema 6.6. *Sejam* $r_1, \ldots, r_j$ *raízes reais de multiplicidades* $m_1, \ldots, m_j$*, respectivamente, e* $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ *raízes complexas de multiplicidades* $M_1, \ldots, M_s$*, respectivamente, da equação característica da recorrência* $x_{n+k} = a_1 \cdot x_{n+(k-1)} + a_2 \cdot x_{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot x_n$*, na qual* $m_1 + m_2 + \cdots + m_j + M_1 + M_2 + \cdots + M_s = k$*. Então a solução geral é dada por*

$$x_n = \sum_{t=1}^{j} P_t(n) r_t^n + \sum_{t=1}^{s} Q_t(n)\rho_t^n cos(n\theta_t) + \sum_{t=1}^{s} R_t(n)\rho_t^n sen(n\theta_t),$$

na qual $\lambda_t^n = \rho_t^n(cos(n\theta_t) + isen(n\theta_t))$*, com* $1 \leq t \leq s$*, e* $P_k(n), Q_t(n), R_t(n)$ *com* $1 \leq k \leq j$ *e* $1 \leq t \leq s$ *são polinômios em* n.

Prova. *As Proposições 6.1 e 6.2 garantem a existência das soluções. Para verificar a independência linear, podemos escrever*

$$\rho_t^n cos(n\theta_t) = \frac{\lambda_t^n + (\overline{\lambda_t})^n}{2} \quad e \quad \rho_t^n sen(n\theta_t) = \frac{\lambda_t^n - (\overline{\lambda_t})^n}{2i}$$

e assumimos que

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \widetilde{P}_1(n) r_1^n + \cdots + \widetilde{P}_j(n) r_j^n + \\ & \widetilde{Q}_1(n)\left(\frac{\lambda_1^n + (\overline{\lambda_1})^n}{2}\right) + \cdots + \widetilde{Q}_s(n)\left(\frac{\lambda_s^n + (\overline{\lambda_s})^n}{2}\right) + \\ & \widetilde{R}_1(n)\left(\frac{\lambda_1^n - (\overline{\lambda_1})^n}{2i}\right) + \cdots + \widetilde{R}_s(n)\left(\frac{\lambda_s^n - (\overline{\lambda_s})^n}{2i}\right), \end{aligned}$$

para todo n *natural, a partir da qual temos*

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \widetilde{P}_1(n) r_1^n + \cdots + \widetilde{P}_j(n) r_j^n + \\ & \left(\frac{\widetilde{Q}_1(n)}{2} + \frac{\widetilde{R}_1(n)}{2i}\right)\lambda_1^n + \left(\frac{\widetilde{Q}_1(n)}{2} - \frac{\widetilde{R}_1(n)}{2i}\right)(\overline{\lambda_1})^n + \cdots + \\ & \left(\frac{\widetilde{Q}_s(n)}{2} + \frac{\widetilde{R}_s(n)}{2i}\right)\lambda_s^n + \left(\frac{\widetilde{Q}_s(n)}{2} - \frac{\widetilde{R}_s(n)}{2i}\right)(\overline{\lambda_s})^n. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 6.5, temos que $\widetilde{P}_t(n) \equiv 0$ *com* $1 \leq t \leq j$, *e*

$$\begin{cases} \dfrac{\widetilde{Q}_t(n)}{2} + \dfrac{\widetilde{R}_t(n)}{2i} \equiv 0 \\ \dfrac{\widetilde{Q}_t(n)}{2} - \dfrac{\widetilde{R}_t(n)}{2i} \equiv 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, concluímos que $\widetilde{Q}_t(n) \equiv 0$ *e* $\widetilde{R}_t(n) \equiv 0$, *com* $1 \leq t \leq s$, *onde* $\widetilde{P}_t(n)$, $\widetilde{Q}_t(n)$, $\widetilde{R}_t(n)$ *são polinômios em* n.

□

7 EDO's de Ordem k

Assim como no caso das recorrências, geralmente em sala de aula não se verifica a independência linear das soluções das equações diferenciais ordinárias (EDO) homogêneas de ordem k com coeficientes constantes, muitas vezes pela notação extensa ou pelo fato do uso de determinantes (matriz de Vandermonde).

A seguir apresenta-se como a teoria das EDO's de ordem k está relacionada com as recorrências, e como podemos aproveitar o Teorema 6.5.

Para resolver a equação diferencial ordinária de ordem k, com coeficientes constantes,

$$y^{(n)} + a_{n+1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{9}$$

em que $y^{(n)}$ representa a n-ésima derivada de y, procuramos por soluções do tipo $y = e^{rx}$, com $x \in \mathbb{R}$. Esta, ao ser substituída na equação acima, fornece

$$(r^n + a_{n+1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0)e^{rx} = 0.$$

O polinômio $P(r) = r^n + a_{n+1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0$ é chamado **Polinômio Característico** e suas raízes fornecem as soluções da EDO. De fato, pode-se verificar que se r_1 é uma raiz de multiplicidade m de $P(r)$, então $e^{r_1 x}$, $xe^{r_1 x}$, ..., $x^{m-2}e^{r_1 x}$ e $x^{m-1}e^{r_1 x}$ satisfazem (9). Logo, de forma sucinta, pode-se dizer que $Q(x)e^{r_1 x}$ é solução da EDO, na qual $Q(x)$ é um polinômio de grau menor ou igual a $m - 1$. O objetivo é verificar a independência linear dessas soluções.

Teorema 7.1. *Sejam* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, *dois a dois distintos, e sejam* $P_j(x)$ *polinômios, para* j *com* $1 \leq j \leq k$. *Se tivermos*

$$P_1(x)e^{\lambda_1 x} + P_2(x)e^{\lambda_2 x} + \cdots + P_k(x)e^{\lambda_k x} = 0, \tag{10}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$*, então* $P_j(x)$ *é identicamente nulo, para todo* j*, com* $1 \leq j \leq k$*.*

Prova. *Note que os Lemas 6.3 e 6.4 valem trocando* $n \in \mathbb{N}$*, por* $x \in \mathbb{R}$*. Além disso, o princípio básico da prova do Teorema 6.5 é satisfeito da seguinte maneira: como a equação (10) vale para* $\forall x \in \mathbb{R}$*, tomando* $x+1$ *temos*

$$P_1(x+1)e^{\lambda_1}e^{\lambda_1 x} + P_2(x+1)e^{\lambda_2}e^{\lambda_2 x} + \cdots + P_k(x+1)e^{\lambda_k}e^{\lambda_k x} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Multiplicando a equação (10) por e^{λ_k} *e diminuindo da equação (11), pode-se demonstrar de forma análoga a prova do Teorema 6.5.*

$\square$

A seguir, será apresentada uma demostração mais curta deste fato, na qual usa-se somente derivada de polinômios e indução matemática.

Prova. [versão 2]. *Faremos indução sobre k. O caso* $k=1$ *é imediato. Suponha que vale para* k*. Vejamos o caso* $k+1$*, isto é, suponha que*

$$P_1(x)e^{\lambda_1 x} + P_2(x)e^{\lambda_2 x} + \cdots + P_{k+1}(x)e^{\lambda_{k+1} x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{12}$$

Multiplicando a equação (12) por $e^{-\lambda_1 x}$*, obtemos*

$$P_1(x) + P_2(x)e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} + \cdots + P_{k+1}(x)e^{(\lambda_{k+1}-\lambda_1)x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Derivando esta equação m *vezes (*m *é tal que* $P_1^{(m)} \equiv 0$*), pela regra de Leibniz temos que*

$$\begin{aligned}
(P_l(x) \cdot e^{(\lambda_l-\lambda_1)x})^{(m)} &= \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \cdot P_l^{(j)}(x) \cdot (e^{(\lambda_l-\lambda_1)x})^{(m-j)} \\
&= \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \cdot P_l^{(j)}(x) \cdot (\lambda_l-\lambda_1)^{m-j} \cdot e^{(\lambda_l-\lambda_1)x} \\
&= \left[\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \cdot P_l^{(j)}(x) \cdot (\lambda_l-\lambda_1)^{m-j}\right] \cdot e^{(\lambda_l-\lambda_1)x} \\
&= \widetilde{P}_{l-1}(x) \cdot e^{(\lambda_l-\lambda_1)x}
\end{aligned}$$

na qual

$$\widetilde{P}_1(x) \cdot e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} + \widetilde{P}_2(x) \cdot e^{(\lambda_3-\lambda_1)x} + \cdots + \widetilde{P}_k(x) \cdot e^{(\lambda_{k+1}-\lambda_1)x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pela hipótese de indução, temos que

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \cdot P_l^{(j)}(x) \cdot (\lambda_l - \lambda_1)^{m-j} = \widetilde{P}_{l-1}(x) \equiv 0, \qquad 2 \leq l \leq k+1$$

se $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$*. Como os* λ_j *são diferentes e o coeficiente de* x^n *de* $\widetilde{P}_{l-1}(x)$ *é* $(\lambda_l - \lambda_1)^m \cdot a_n$*, tem-se que* $a_n = 0$*. Por outro lado, o coeficiente de* x^{n-1} *de* $\widetilde{P}_{l-1}(x)$ *é*

$$(\lambda_l - \lambda_1)^m \cdot a_{n-1} + m \cdot n \cdot (\lambda_l - \lambda_1)^{m-1} \cdot a_n$$

e, portanto, $a_{n-1} = 0$*. De forma análoga, tem-se que* $a_k = 0$ *para* $0 \leq k \leq n$*, pois o coeficiente do termo* x^k *de* $\widetilde{P}_{l-1}(x)$ *é uma combinação linear de* a_k *e os termos* a_{k+1}*,...,*a_n *sabe-se de antemão serem nulos.*

$\square$

Referências

[1] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. São Paulo: LTC, 2008.

[2] GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. **Elementos de Álgebra**. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

[3] GOMES, V. E. D. **Solução Geral das Sequências Recorrentes**. 2016. 91f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2016.

[4] LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: IMPA, 2003.

[5] LIMA, E. L. **Análise Real**. v. 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

[6] MARKUCHEVITCH, A. **Seqüências Recorrentes**. Moscou: MIR, 1985.

[7] MOREIRA, C. G. Seqüências Recorrentes. **Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina**, Florianópolis, n. 4, p. 53-69,2007.

[8] MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. **Matemática Discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[9] SOARES, M. G. **Cálculo em uma variável complexa**. Rio de Janeiro: IMPA, 1999.

[10] SOUZA, H. Equações de Recorrência. **Revista Eureka!**, Rio de Janeiro, v. 9, p. 33-40, 2000.

[11] VILENKIN, N. **Combinatorial Mathematics For Recreations**. Moscou: MIR, 1972.