

Pesquisa de Desenvolvimento: o problema do sólido gerado pela intersecção de cilindros

Cristiana Pilatti
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS)
Campus Bento Gonçalves, RS, Brasil
cristiana.pilatti@bento.ifrs.edu.br

Kassiane Gabriel
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS)
Campus Bento Gonçalves, RS, Brasil
kassianegabriel55@hotmail.com

Delair Bavaresco
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS)
Campus Bento Gonçalves, RS, Brasil
delair.bavaresco@bento.ifrs.edu.br

Resumo

Este artigo apresenta resultados de uma ação investigativa realizada por meio de um “projeto-desafio”, com base na metodologia de “pesquisa de desenvolvimento”, envolvendo estudantes do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, Campus Bento Gonçalves, centrado na obtenção do volume de sólidos gerados pela intersecção de cilindros ortogonais de mesmo raio. O estudo teve como objetivo discutir resoluções clássicas em comparação com possibilidades atuais de obtenção de resultados, sobretudo com o auxílio de recursos tecnológicos disponíveis na contemporaneidade e a geração de um produto concreto. A teoria de George Polya sobre resolução de problemas aplicada a situações que envolvem Matemática orientou o delineamento de um plano de resolução. Os principais resultados obtidos mostram que a compreensão do fenômeno sob investigação é potencializada com o uso de ferramentas tecnológicas de geração e manipulação gráfica, bem como de modelagem tridimensional. Além disso, um dos sólidos em questão foi confeccionado em partes, conforme o procedimento de resolução utilizado, com a utilização de uma impressora 3D, representando um material facilitador do entendimento das etapas desse processo, vistos os objetivos propostos inicialmente. Por fim, destaca-se o caráter de ineditismo da proposta de utilização de técnicas de prototipagem no processo de resolução de problemas não triviais que envolvem Matemática, bem como possibilidades de aplicações em projetos de inovação científica e tecnológica.

Palavras-chave: Resolução de Problemas. Ferramentas Tecnológicas. Bicilindro. Tricilindro.

Abstract

This paper presents the results of an investigative action carried out by a "challenge-project", based on the methodology of "design experiments", involving students of Degree in Mathematics from IFRS-BG, focused on obtaining the volume of the resulting solids created by intersection of orthogonal cylinders of equal radius. The study aimed to discuss classical resolutions compared to current possibilities of achieving results, especially with the aid of technological resources available in contemporary times and the production of a concrete model. The theory of George Polya about problem solving applied to situations involving Mathematics guided the design of an action plan. The main results show that the understanding of the phenomenon under investigation is potentiated by the use of technological tools of graphic generation and manipulation, as well as three-dimensional modeling. In addition, one of the solids in question was made in parts, according to the resolution procedure used, using a 3D printer, that represents a facilitator of understanding of the steps of the process, considering the primary proposed objectives. Finally, we highlight the novelty character of the proposal to use prototyping techniques for the process of solving non-trivial problems involving Mathematics as well as possibilities of application in scientific and technological innovation projects.

Keywords: Problem Solving. Technological Tools. Bicylinder. Tricylinder.

1. Introdução

No trato acadêmico de diferentes temas relacionados à resolução de problemas que envolvem Matemática, é comum a apresentação de situações cuja resolução segue procedimentos, de certo modo padronizados e com uso exagerado de regras. As discussões sobre o resultado obtido geralmente tendem a limitar-se a obter respostas listadas em gabaritos. As demandas contemporâneas do sistema educacional brasileiro, no que diz respeito ao desenvolvimento científico e tecnológico, levam-nos a discutir alguns processos metodológicos e abordagens de problemas que envolvem Matemática de forma a transcender esses procedimentos padronizados com base nas atuais perspectivas e possibilidades. Entendemos que, com o uso de ferramentas tecnológicas disponíveis na atualidade, novos olhares se constituem sobre o conhecimento matemático com vistas ao desenvolvimento científico e tecnológico que, por sua vez, tem vistas à inovação.

As discussões teóricas de resolução de problemas proporcionadas a partir da publicação do livro “A arte de resolver problemas” (POLYA, 1995) também apoiam o delineamento de novos rumos para o ensino-aprendizagem de Matemática. O feito de definir técnicas e estratégias úteis para a obtenção de resultados tem se mostrado fonte de novas ideias e capaz de fertilizar os diversos campos da Matemática.

Sendo assim, o presente artigo apresenta algumas rediscussões de problemas não triviais que envolvem conceitos da Geometria Euclidiana e do Cálculo Diferencial e Integral. Apresentamos a resolução de problemas que abarcam a determinação do volume de sólidos resultantes da intersecção de cilindros, com o auxílio de ferramentas tecnológicas disponíveis na atualidade tais como *software* gráficos, *software* de modelagem tridimensional e impressora 3D. O “projeto-desafio”, como foi denominado, centra-se em calcular o volume desses sólidos, discutir diferentes possibilidades de resolução e gerar sólidos particionados para manipulação e melhor compreensão do problema proposto. Essa abordagem permite o desenvolvimento de estratégias, o que culmina por instigar a criatividade, autonomia e uma melhor compreensão do fenômeno sob investigação, característicos das demandas sociais atuais.

A metodologia utilizada, descrita por “pesquisa de desenvolvimento” (COBB *et al.*, 2003) possui como princípio norteador, o desenvolvimento de um processo, ou de um produto, com ênfase no aprofundamento da compreensão do fenômeno sob investigação, enquanto a atividade ainda está em andamento, tendo em vista o aprimoramento do produto. Os resultados do “projeto-desafio”, além da discussão de diferentes maneiras para a resolução de um mesmo problema, estão relacionados à geração de um produto concreto, facilitador do entendimento dos procedimentos, de modo a constituir uma cadeia de conhecimentos associados ao problema.

O presente estudo insere-se numa perspectiva contemporânea em que a ciência e tecnologia assumem lugar de destaque na conjuntura socioeconômica globalizada. Nessa perspectiva, Matemática configura-se como um dos alicerces desse processo, por meio de estratégias de resolução de problemas, modelagem matemática e simulação numérica e, ainda, técnicas de prototipagens e seus processos.

O avanço qualitativo no desenvolvimento científico e tecnológico, com vistas à industrialização e à inovação, as quais impulsionam o crescimento econômico, demanda a aplicação e a utilização de conhecimentos matemáticos nada elementares e o uso de recursos facilitadores, como o computador e outros. Esse cenário motivou a “pesquisa de desenvolvimento” sobre a intersecção de cilindros e suas possibilidades no estudo de outros temas, tanto em âmbito acadêmico quanto para aplicações no contexto de ciência e tecnologia.

2. Fundamentação teórica

No contexto contemporâneo de ênfase na questão do desenvolvimento tecnológico que atribui lugar de destaque para a ciência na modernidade, sobretudo para a Matemática como ciência de base (BOCASANTA, 2013), tornam-se oportunas as discussões a respeito das mudanças necessárias na forma de abordagem de conteúdos e problemas matemáticos. De acordo com Sasson (2003, p. 16), em livro elaborado pela UNESCO, no limiar do século XXI, “revoluções na ciência e na tecnologia estão em andamento e terão um impacto importante sobre as atividades humanas”. Nessa mesma linha, algumas publicações do Ministério da Educação estabelecem que “a necessidade de uma revolução na educação, em todos os níveis, tornou-se unanimidade nacional” (BRASIL, 2010, p. 97). Nesse cenário, destaca-se a importância da proposição de situações-problema para uma melhor compreensão dos conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, em uma associação direta com conceitos de Geometria Euclidiana e Analítica.

Com relação às perspectivas teórico-metodológicas de resolução de problemas no trato com a Matemática, apesar de não existirem regras rígidas no que diz respeito à resolução de um problema, Polya (1995) traçou um roteiro que pode auxiliar em uma extensa gama de problemas e é constituído de quatro passos: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto.

O primeiro passo é ler e compreender o problema. Isso abrange identificar suas partes principais, como os dados fornecidos e a incógnita. Nessa fase, pode ser interessante fazer um diagrama ou gráfico, utilizando-se de recursos como, por exemplo, o computador e materiais manipuláveis, pois, conforme o autor, “para nos convenceremos da presença ou da qualidade de um objeto, desejamos vê-lo e tocá-lo” (POLYA, 1995, p. 10).

No caso de problemas de Cálculo Diferencial e Integral, mais especificamente, as dificuldades estão relacionadas, observando o contexto no qual atuamos, justamente à visualização tridimensional, ou seja, na representação gráfica das superfícies. Nesse contexto, segundo Silva e

Ferreira (2009, p. 1), “a tecnologia é essencial no processo da visualização e essa por sua vez ocupa um papel fundamental na compreensão de conteúdos matemáticos”. Daí a utilização de *software* ser de grande valia, pois favorece a articulação entre as formas de representação – gráfica e analítica – e a compreensão do problema.

Para o delineamento de um plano de resolução, que corresponde à segunda fase, pode ser útil tentar lembrar de uma situação-problema familiar, anteriormente resolvida, ou relacionar com problemas análogos. Outra possibilidade é a de se resolver parte do problema, avançando rumo à sua solução.

Quando Arquimedes encontrou a área da superfície da esfera, ele não conhecia, como já mencionamos, nenhum problema já resolvido que tivesse a mesma incógnita. Mas ele conhecia vários outros problemas já anteriormente resolvidos, cujas incógnitas eram semelhantes. Há superfícies curvas cujas áreas são mais fáceis de calcular que a da esfera e que eram bem conhecidas na época de Arquimedes, tais como as superfícies laterais de cilindros retos circulares, de cones retos circulares e de troncos destes cones. Podemos estar certos de que Arquimedes examinou cuidadosamente estes casos similares mais simples (POLYA, 1995, p. 39).

O terceiro passo refere-se à execução e verificação de cada etapa do plano traçado. O retrospecto – quarto passo – consiste numa nova análise da estratégia de resolução e do resultado obtido, procurando-se descobrir uma forma mais simples e aprimorada de resolver o problema. Além disso, ao nos apropriarmos das estratégias utilizadas, elas tornam-se ferramentas para problemas futuros, o que confirma-se pela enunciação de Descartes ao afirmar que: “Todo problema que resolvi acabou se tornando uma regra que serviu posteriormente para resolver outros problemas” (STEWART, 2013, p. 70).

Nessa mesma perspectiva de estudo e aprofundamento do/no problema e de aprimoramento do procedimento, a proposta metodológica que embasa este trabalho denomina-se “pesquisa de desenvolvimento” como uma tradução para *design-based research* ou *design experiments*, introduzida em 1992, por Brown e Collins (COLLINS *et al.*, 2004).

Doerr e Wood (2006) definem dois princípios norteadores dessa metodologia: o desenvolvimento de um processo, ou de um produto, e os vários ciclos de análise necessários, com a finalidade de aprimorar o produto. No caso deste trabalho, o produto final é a reunião de diferentes formas de abordagem e resolução do problema proposto e a confecção de um sólido particionado para melhor compreender a simetria existente.

A “pesquisa de desenvolvimento” enfoca o progressivo aprimoramento da investigação mediante as várias etapas de análise, enquanto a atividade ainda está em andamento. Como defendem Doerr e Wood (2006, p. 117), essa metodologia:

[...] requer vários ciclos de análise para aprimorar o produto e a interpretação em múltiplos níveis. [...] a coleta e a interpretação dos dados não acontecem ao término do experimento, mas a própria coleta em desenvolvimento e a interpretação de dados em todos os níveis devem gerar e refinar princípios, propriedades e produtos que sejam cada vez mais úteis a pesquisadores, professores e outros profissionais.

De maneira geral, podemos dizer que uma “pesquisa de desenvolvimento” refere-se àquelas investigações que envolvem delineamento, como a elaboração do artefato em sua primeira versão, sendo que o desenvolvimento refere-se ao processo contínuo de seu refinamento por meio da avaliação sistemática (BARBOSA; OLIVEIRA, 2015).

De acordo com Cobb *et al.* (2003), uma das características próprias da metodologia de “projeto de desenvolvimento” é a de que a equipe de investigação aprofunda sua compreensão do fenômeno sob investigação. Para os autores, nesse processo, os problemas estão associados às ferramentas ou aos recursos disponíveis para sua resolução, considerando a natureza interativa dos contextos investigados e a importância de analisar seus diversos elementos em conjunto e não separadamente.

Segundo Vaz (2004, p. 36), “no *design experiments* o enfoque está nos significados construídos pelos aprendizes, tendo como objetivo principal analisar o seu pensamento matemático, ou seja, os processos pelos quais esses pensamentos se constroem e suas modificações”. Sztajn *et al.* (2013) destacam o uso dessa metodologia como um campo emergente para as ciências da aprendizagem e desenvolvimento profissional, ligados às questões de desenvolvimento tecnológico com base na ciência aplicada.

3. Os procedimentos metodológicos para a investigação

O estudo de integrais duplas e triplas, abordado nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral de várias variáveis, apresenta, observando o contexto no qual atuamos, elevados níveis de dificuldade quando se trata de visualização tridimensional e determinação dos limites de integração, sejam eles constantes, funções de uma e duas variáveis e equações de até três variáveis. Diante disso, inspirado na metodologia de “pesquisa de desenvolvimento”, criou-se um “projeto-desafio” tendo como objetivo a obtenção do volume de sólidos gerados pela intersecção ortogonal de cilindros de mesmo raio, com o uso de recursos tecnológicos e aplicações de conhecimentos adquiridos nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral.

Um “projeto-desafio” (MORIN, 2006) pode ser descrito como uma proposta que busca proporcionar aos alunos situações desafiadoras, nas quais possam expressar seus conhecimentos, utilizando-se de estratégias próprias e recursos tecnológicos, transcendendo a forma como esses conteúdos são tradicionalmente abordados.

O “projeto-desafio” de calcular o volume do sólido obtido pela intersecção de dois e três cilindros foi desenvolvido por estudante do curso de Licenciatura em Matemática do campus Bento Gonçalves do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, bolsistas do Programa de Educação Tutorial – PET Matemática, sob orientação do professor da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral IV, resultando na produção deste trabalho.

O desafio proposto consiste em obter uma relação que determina o volume dos sólidos gerados pela intersecção de dois e três cilindros de mesmo raio, apresentando e discutindo outros

métodos de resolução disponíveis na literatura. O desenvolvimento contempla a geração de representações do sólido, bem como das partes resultantes da decomposição desse sólido, que podem ser obtidas por meio de *softwares* gráficos e/ou de modelagem tridimensional. Por fim, o desafio contempla a avaliação de possibilidades de aplicações em ciência, tecnologia e na indústria, bem como a confecção de sólidos gerados por meio do uso de uma impressora 3D.

3.1. Detalhamento dos procedimentos computacionais

Os procedimentos que permitiram a obtenção das soluções apresentadas neste estudo são descritos nesta e nas seções posteriores.

O primeiro passo consiste na representação dos cilindros ortogonais de mesmo raio r por equações cartesianas. Associando cada um dos três cilindros a um dos eixos do sistema cartesiano ortogonal tridimensional, esses podem ser descritos pelas equações

$$y^2 + z^2 = r^2 \quad (1)$$

$$x^2 + z^2 = r^2 \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (3)$$

sendo (1) o cilindro centrado no eixo x , (2) o cilindro centrado no eixo y e (3) o cilindro centrado no eixo z . Para a plotagem dos gráficos de cada um dos cilindros, como superfícies tridimensionais, através do *software Maple 15*, utiliza-se o comando *plot3d*. Antes disso, porém, deve-se carregar o pacote *plots*, usando o comando *with(plots)*, que disponibiliza ferramentas avançadas para a criação de gráficos, como o comando *display*, usado para a exibição das superfícies em uma mesma imagem. Para facilitar, fez-se as transformações das Equações (1), (2) e (3), de coordenadas cartesianas para coordenadas cilíndricas, usando, para o cilindro centrado no eixo z , as relações

$$x = r \cdot \cos \theta \quad (4)$$

$$y = r \cdot \sen \theta \quad (5)$$

$$z = z \quad (6)$$

Para o cilindro centrado no eixo x ,

$$x = z \quad (7)$$

$$y = r \cdot \cos \theta \quad (8)$$

$$z = r \cdot \sen \theta \quad (9)$$

Para o cilindro centrado no eixo y ,

$$x = r \cdot \cos \theta \quad (10)$$

$$y = z \quad (11)$$

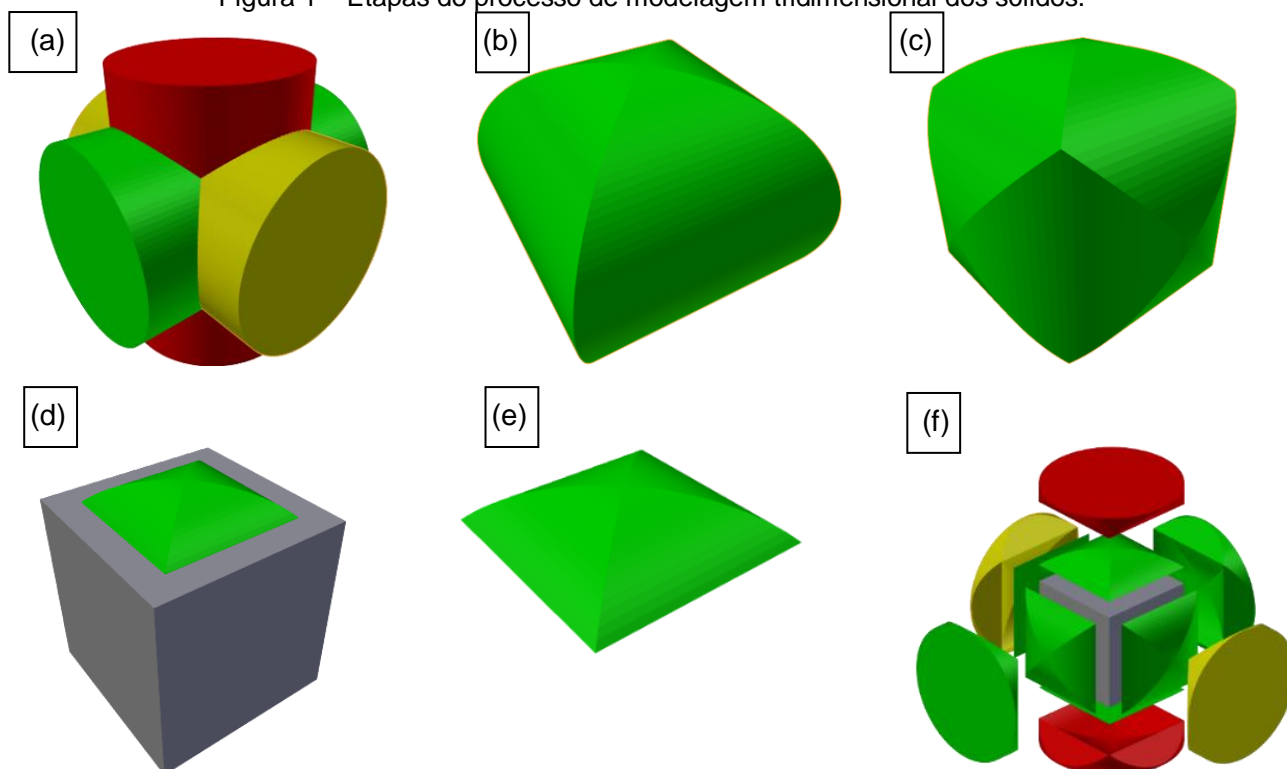
$$z = r \cdot \sen \theta \quad (12)$$

No *Maple*, o gráfico de uma superfície paramétrica é produzido a partir do comando *plot3d*, com sintaxe: *plot3d([x, y, z], $\theta = a..b, z = c..d$)*, em que x , y e z são substituídos pelas expressões equivalentes nas variáveis θ e z : (4), (5) e (6), ou (7), (8) e (9), ou (10), (11) e (12), conforme o caso;

$a..b$ especifica a variação de θ ; $c..d$ representa a variação de z , sendo que c e d podem ser funções de θ .

A última etapa do processo consiste na modelagem tridimensional e materialização, com uso de uma impressora 3D, *Cliever CL1 - Black Edition*, do sólido descrito no “projeto-desafio”, a partir da produção de cada uma das partes que o compõe. O processo que antecede o uso da impressora é a modelagem tridimensional, sendo que, neste caso, foi utilizado o *software Blender 2.75*. Partiu-se da criação de 3 cilindros ortogonais entre si de mesmo raio, conforme ilustra a Figura 1(a). O *software* permite operações booleanas de diferença, união e intersecção entre objetos, possibilitando a obtenção dos sólidos em estudo. Efetuando a intersecção entre os cilindros de Equações (1) e (2), obtém-se um Bicilindro, como ilustra a Figura 1(b). Em seguida, efetuando-se a intersecção do Bicilindro com o cilindro de Equação (3), obtém-se o Tricilindro, como ilustra a Figura 1(c). Ainda, a subtração efetuada com um cubo de dimensões que ultrapassam as dimensões do Tricilindro resulta na obtenção de uma das 6 faces simétricas do sólido, conforme ilustra a Figura 1(d) e a Figura 1(e). Por fim, desse processo resultam as peças mostradas, em separado, na Figura 1(f), e que podem ser exportadas com extensão *.stl*, compatível com o *software* da impressora 3D.

Figura 1 – Etapas do processo de modelagem tridimensional dos sólidos.



Fonte: Elaboração dos autores.

Destaca-se nesse processo a possibilidade clara de identificação de simetrias, de partes semelhantes, que facilitam significativamente o cálculo do volume total desses sólidos, a partir do cálculo do volume de suas partes. O detalhamento dos procedimentos algébricos que culminaram na obtenção da resposta do problema é feito na próxima seção.

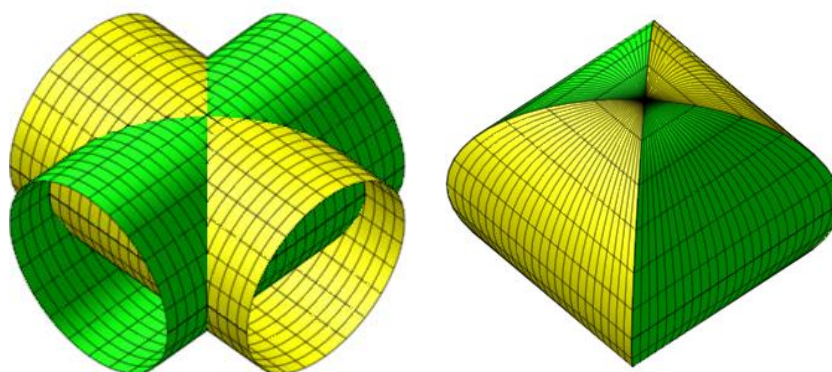
4. Resultados e discussão

O presente estudo está centrado nas discussões sobre a obtenção de relações para determinar o volume dos sólidos gerados pela interseção de dois e três cilindros de mesmo raio que se interceptam ortogonalmente. Atualmente, esses sólidos são chamados de sólidos de Steinmetz, ou ainda, Bicilindro ou Tricilindro, conforme cada caso (ABREU, 2016).

4.1. O Bicilindro

Bicilindro é a denominação do sólido limitado por dois cilindros de mesmo raio, que se interceptam ortogonalmente. A Figura 2 mostra esse sólido, gerado no *software Maple 15*, considerando-se os cilindros em verde e em amarelo dados pelas Equações (1) e (2), respectivamente.

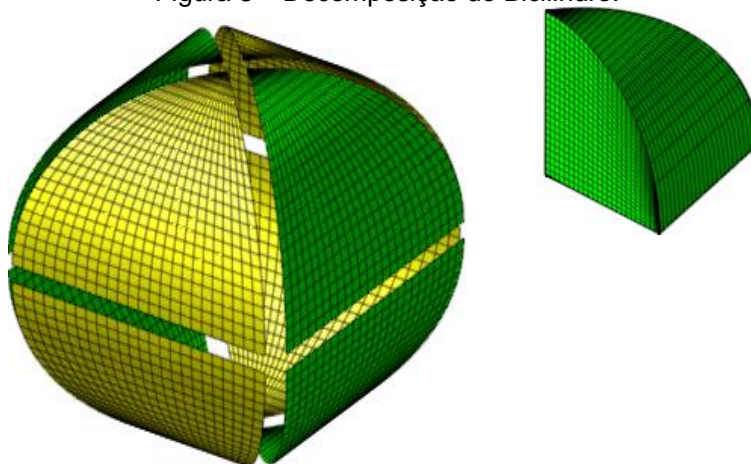
Figura 2 – Bicilindro gerado pela interseção de dois cilindros de raio r .



Fonte: Elaboração dos autores.

Para determinar o volume do sólido, considerou-se a simetria existente, ou seja, o Bicilindro foi dividido em 8 partes iguais, que denominamos de fatias, conforme ilustra a Figura 3.

Figura 3 – Decomposição do Bicilindro.



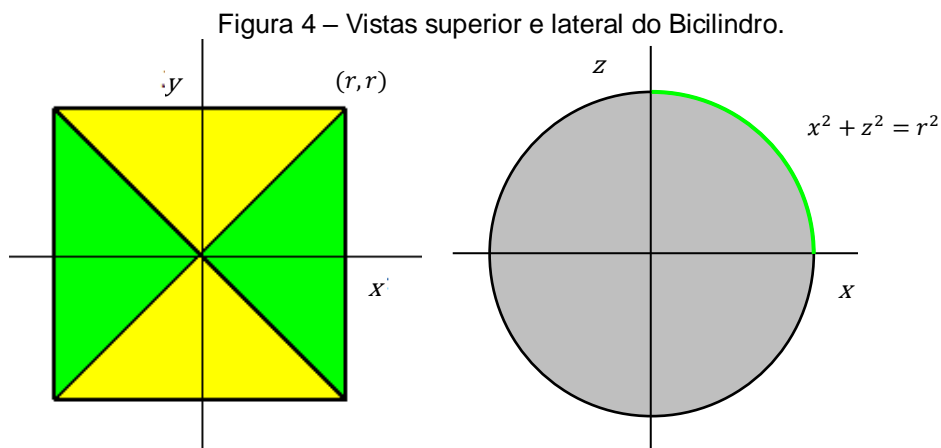
Fonte: Elaboração dos autores.

Desse modo, podemos calcular seu volume a partir do cálculo da integral definida. De (1) e (2), obtemos $y = \pm x$ e quando $z = 0$, $x = \pm r$ e $y = \pm r$. As vistas superior e lateral do sólido,

conforme ilustra a Figura 4, possibilitam determinar os limites de integração a serem considerados, ou seja, $0 \leq x \leq r$, $-x \leq y \leq x$ para a função dada por

$$f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2} \tag{11}$$

obtida a partir da equação do cilindro centrado no eixo y .



Fonte: Elaboração dos autores.

Sendo assim, o volume de uma dessas fatias pode ser calculado através da integral

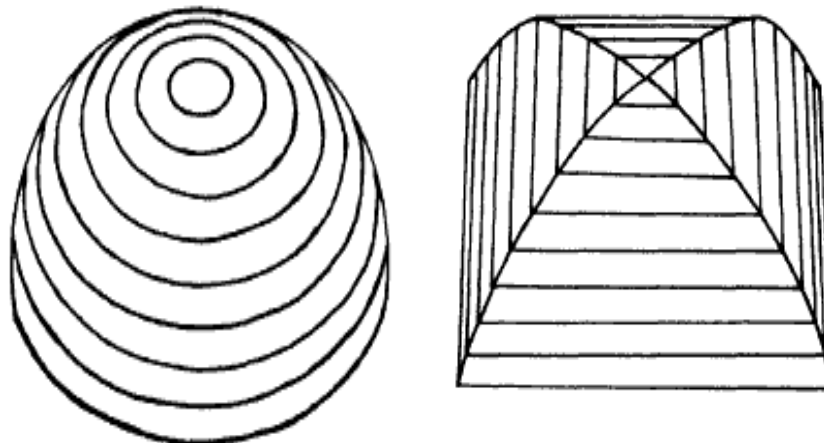
$$V_{fatia} = \int_0^r \int_{-x}^x \sqrt{r^2 - x^2} dy dx = \frac{2}{3} r^3 \tag{12}$$

E, por fim, o volume total é dado por

$$V_{total} = 8 \cdot V_{fatia} = \frac{16}{3} r^3 \tag{15}$$

Liú Huī foi um matemático chinês, do século III d.C., que concebeu o Bicilindro de um modo diferente do apresentado, não através da intersecção de cilindros. Se referia ao sólido por *móuhéfānggài* (KIANG, 1972), posteriormente utilizado para o cálculo do volume de uma esfera. Para obtê-lo, considerou uma esfera como uma pilha de círculos de tamanhos (raios) variados conforme a posição (altura) que ocupa, substituindo cada círculo pelos quadrados que os circunscreviam, conforme ilustram as Figuras 5 e 6.

Figura 5 – Construção da metade superior da esfera e do Bicilindro.



Fonte: KIANG (1972, p. 89).

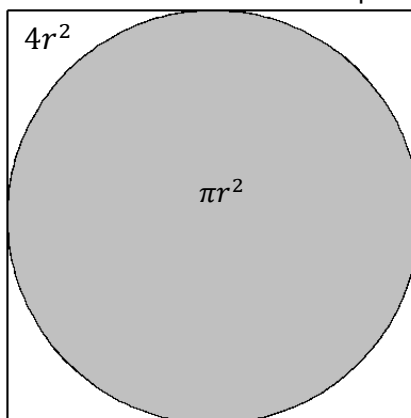
Figura 6 – Bicilindro circunscrevendo a esfera.



Fonte: Disponível em: <https://liuhuimathematician.wordpress.com/2014/04/07/a-great-invention-the-double-box-lid-model>. Acesso em: 29 ago. 2016.

Nesse processo, a determinação do volume parte da relação entre a área do círculo, correspondente a cada fatia da esfera, e a área do quadrado circunscrito a ele, que representa uma fatia do Bicilindro, conforme ilustra a Figura 7.

Figura 7 – Comparação entre as áreas do círculo e do quadrado a esse circunscrito.



Fonte: Elaboração dos autores.

A razão entre as áreas de um círculo e do quadrado circunscrito a ele é $\pi/4$. Assim, essa deve também ser a razão entre os volumes da esfera e do Bicilindro:

$$\frac{V_{esfera}}{V_{bicilindro}} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow V_{bicilindro} = \frac{4}{\pi} V_{esfera} \quad (16)$$

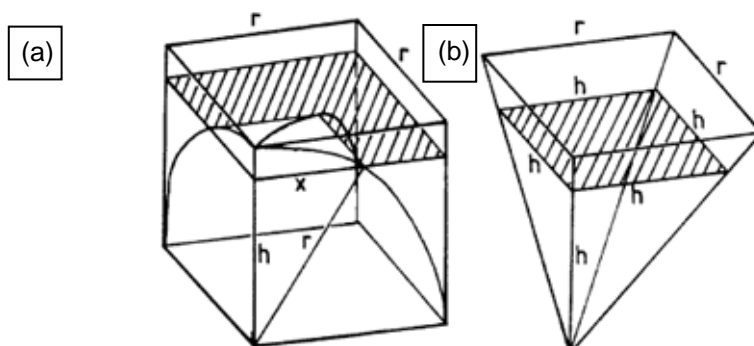
Ou seja, o volume do Bicilindro circunscrito a uma esfera de raio r é dado por:

$$V_{bicilindro} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{16}{3} r^3 \quad (17)$$

Porém, na época, Liú Huī desconhecia ambos os volumes, da esfera e do Bicilindro. Mais tarde, Tsu Ch'ung-Chih retomou o problema e dividiu o *móuhéffānggài* em oito partes iguais, a partir de três seções ortogonais entre si. Cada parte resultante apresenta uma base quadrada, duas faces perpendiculares à base e duas faces curvas, conforme ilustra a Figura 8(a). Se o raio da esfera original é r , então a base quadrada tem lado r , e cada face perpendicular à base é um quadrante de um círculo de raio r . Considerou uma dessas partes em seu cubo circunscrito, de aresta r , e provou,

usando o Princípio de Cavalieri, que o volume do sólido interno ao cubo e externo ao oitavo do Bicilindro é o mesmo que o do sólido já conhecido chamado *yángmǎ*, uma pirâmide oblíqua de base quadrada, mostrado na Figura 8(b).

Figura 8 – O volume do sólido interno ao cubo e externo ao oitavo do Bicilindro é igual ao de *yángmǎ*.



Fonte: KIANG (1972, p. 90).

A área destacada é a seção de altura h , um “L” cuja área é $r^2 - x^2$, enquanto que a da *yángmǎ* é um quadrado com área h^2 . Vemos também que h, x, r são os lados de um triângulo retângulo. Pela aplicação do Teorema de Pitágoras, temos $r^2 - x^2 = h^2$. Então, essas áreas são iguais e os sólidos têm mesmo volume, pelo Princípio de Cavalieri, enunciado por Tsu Ch'ung-Chih em versos:

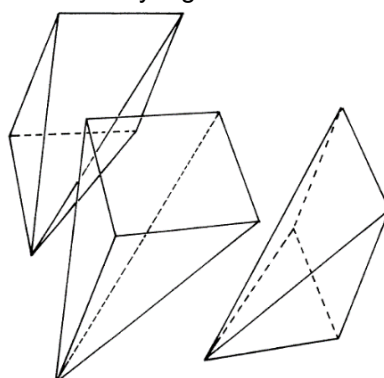
Se volumes são construídos de blocos empilhados
 E as áreas correspondentes são iguais
 Então os volumes não podem ser diferentes (WAGNER *apud* ABREU, 2016, p. 27).

Assim, Tsu Ch'ung-Chih chegou à equação

$$r^3 - \frac{1}{8}V_{\text{móuhéfānggài}} = V_{\text{yángmǎ}} \tag{18}$$

Também era de seu conhecimento que pode-se encaixar três *yángmǎ* de maneira a formar um cubo, como ilustra a Figura 9.

Figura 9 – Três *yángmǎ* formam um cubo.



Fonte: KIANG (1972, p. 90).

Consequentemente,

$$V_{\text{yángmǎ}} = \frac{1}{3}r^3 \tag{19}$$

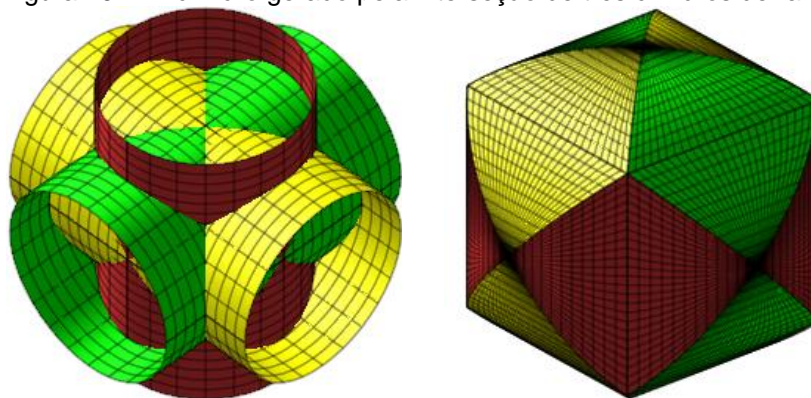
E, substituindo (19) em (18), temos

$$\frac{1}{8}V_{\text{móuhéfānggài}} = \frac{2}{3}r^3 \Rightarrow V_{\text{móuhéfānggài}} = \frac{16}{3}r^3 \quad (20)$$

4.2. O Tricilindro

O Tricilindro resulta da interseção de três cilindros de mesmo raio, centrados nos eixos x , y e z , conforme mostra a Figura 10, obtida através do software *Maple 15*. Além dos cilindros em verde e em amarelo, dados pelas Equações (1) e (2), acrescenta-se o cilindro vertical em vermelho dado por (3).

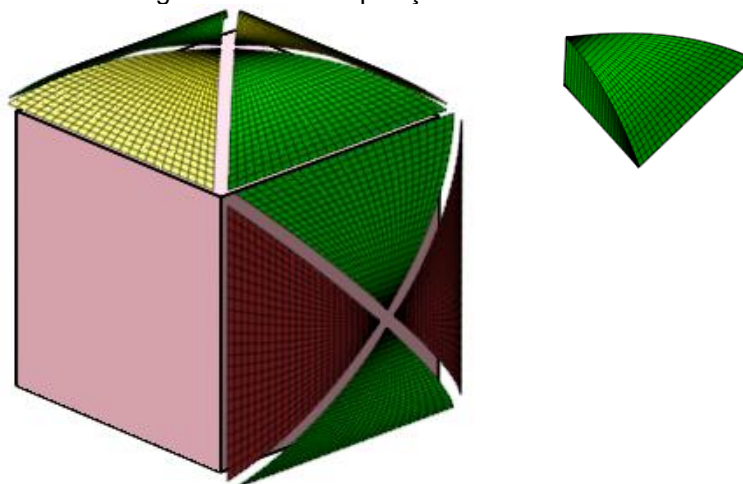
Figura 10 – Tricilindro gerado pela interseção de três cilindros de raio r .



Fonte: Elaboração dos autores.

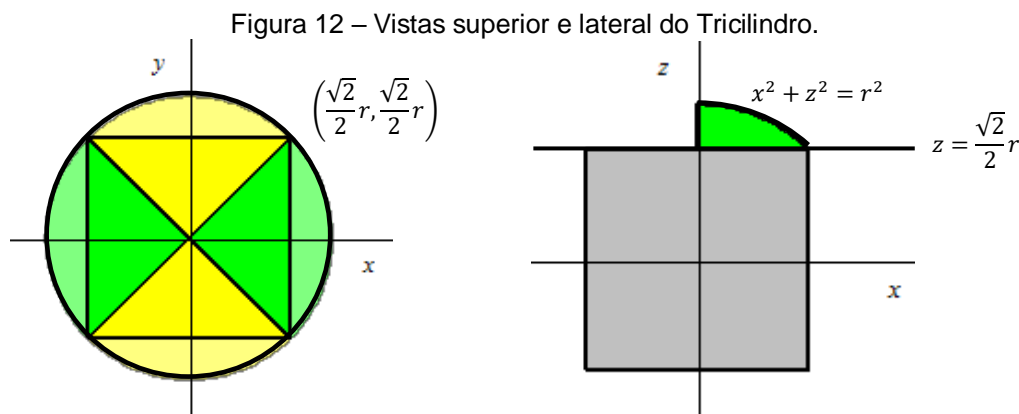
De modo semelhante ao caso do Bicilindro, apresentamos a determinação do volume do Tricilindro a partir de sua decomposição em partes iguais, considerada a simetria do sólido gerado. Com base na Figura 11 a seguir, observa-se a existência de vinte e quatro peças iguais, as quais podem ser entendidas como acopladas a cada uma das faces de um cubo.

Figura 11 – Decomposição do Tricilindro.



Fonte: Elaboração dos autores.

Como cada um dos cilindros que originam o Tricilindro tem raio r , a aresta do cubo mede $\sqrt{2} r$, como ilustra a Figura 12 a seguir, com vértices associados aos pontos $(\pm \frac{\sqrt{2}}{2} r, \pm \frac{\sqrt{2}}{2} r)$, pois, das Equações (1), (2) e (3), temos $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} r$, $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} r$ e $z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} r$.



Fonte: Elaboração dos autores.

Assim, uma dessas fatias tem volume

$$V_{fatia} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}r} \int_{-x}^x \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}r}^{\sqrt{r^2-x^2}} 1 \, dz \, dy \, dx = \left(\frac{2}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{12}\right) r^3 \quad (21)$$

Multiplicando por 24, e somando ao volume do cubo, o volume total é igual a:

$$V_{cubo} = (\sqrt{2} r)^3 = 2 \sqrt{2} r^3 \quad (22)$$

$$V_{total} = 24 \cdot V_{fatia} + V_{cubo} = 8 (2 - \sqrt{2}) r^3 \quad (23)$$

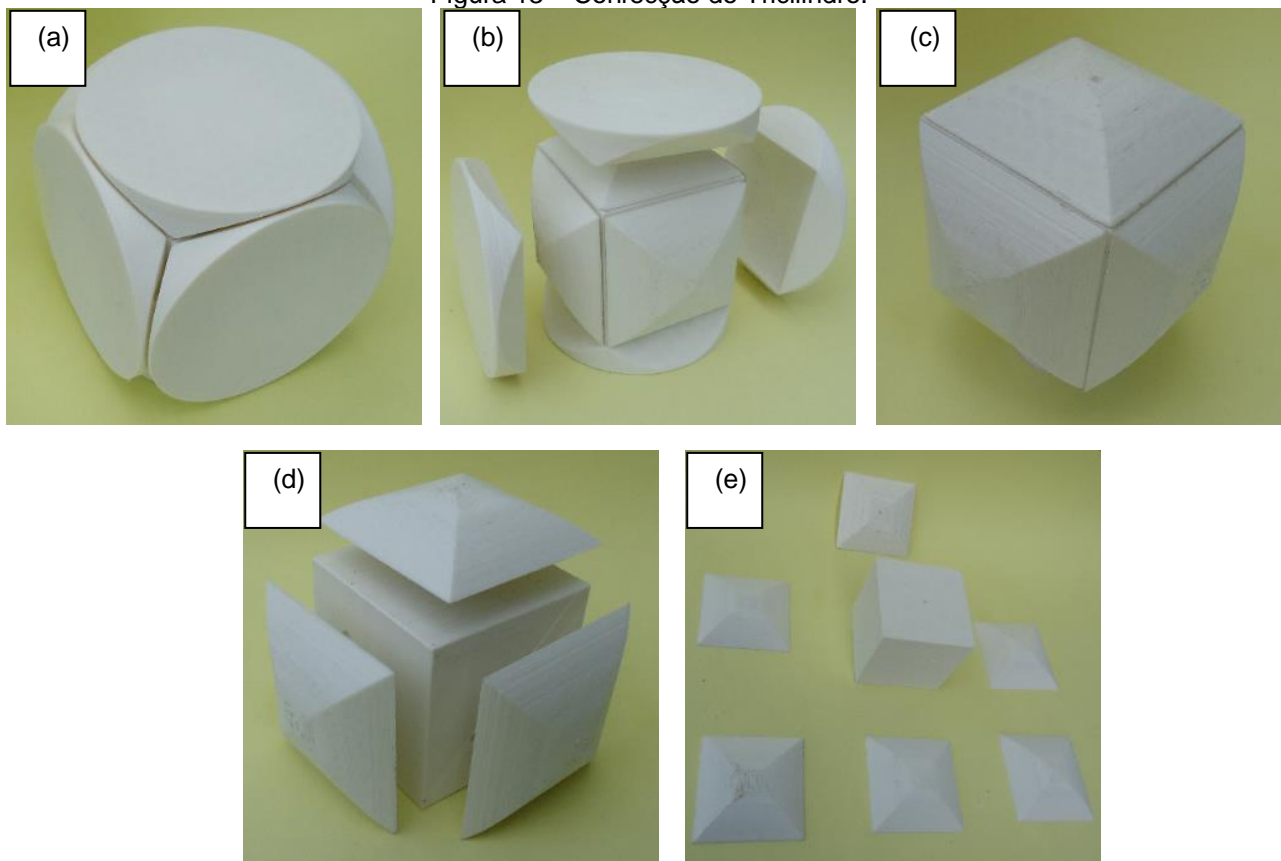
Desse modo, a Equação (23) expressa o resultado do problema central do “projeto-desafio”.

4.3. Confeção do Tricilindro

A Figura 13 a seguir mostram os sólidos gerados através de *software* de modelagem tridimensional *Blender 2.75* e confeccionados por meio de uma impressora 3D, *Cliever CL 1 - Black Edition*. Essas peças representam as partes nas quais o Tricilindro foi dividido, conforme o procedimento de resolução utilizado, para a obtenção de seu volume. A sequência de fotos representa a intersecção entre os cilindros ortogonais, em (a) e (b), o Tricilindro, em (c), e a decomposição do Tricilindro, em (d) e (e).

A estratégia de prototipagem permitiu dar forma às ideias, tornando-se parte integrante do processo de aprendizagem e inovação. A construção de modelos pode e deve ser algo para se replicar e aprender a partir da manipulação dessas peças.

Figura 13 – Confeção do Tricilindro.



Fonte: Elaboração dos autores.

5. Considerações finais

O “projeto-desafio”, cuja proposta era a determinação do volume de sólidos resultantes da intersecção de dois e três cilindros ortogonais de mesmo raio, inicialmente, foi encarado como um problema complexo, mas que, a partir do momento em que nos familiarizamos com as características do sólido observadas por meio de esboços, no papel e através do *software Maple*, tornou-se mais acessível. Enfatiza-se a importância de utilização dos recursos tecnológicos disponíveis atualmente como ferramentas/assistentes na resolução de problemas, pois, nesse caso, mostraram-se elementos essenciais na visualização e na compreensão do problema.

Para o delineamento do plano de resolução, utilizamos técnicas que Polya (1995) sugere em seu livro, de forma que, decompondo o problema em subproblemas (das partes ao todo) recaímos em casos mais fáceis de resolver. Tomamos conhecimento, através da pesquisa de outros possíveis métodos de resolução, de que o estudo do Bicilindro, há mais de 1500 anos, constituiu-se como uma possibilidade para o cálculo do volume da esfera. O uso exagerado de regras e procedimentos padronizados de resolução, típico do ensino da Matemática, em seus diferentes níveis, inibe a compreensão dos fenômenos, o que é, de fato, o essencial.

As contribuições do “projeto-desafio” não se restringem à compreensão de um problema isolado, mas dizem respeito também aos conhecimentos adquiridos - matemáticos e de resolução de problemas - que poderão ser úteis em situações e estudos futuros. A geração de representações

por meio de *software* gráficos, ao mesmo tempo que serviu de meio para, é resultado desse processo, assim como a confecção do sólido particionado, através de *software* de modelagem tridimensional e impressora 3D, conforme o procedimento de resolução utilizado, como um facilitador do entendimento das etapas desse processo.

Muitos estudos técnicos e práticas laboratoriais voltados para a produção de equipamentos, peças e produtos de utilidade, entre outros, vêm, cada vez mais, utilizando-se de técnicas de prototipagem como facilitadores da elaboração de projetos e para a produção desse tipo de material. Nessa perspectiva, o produto concreto desse estudo apresenta certo ineditismo em relação às estratégias de resolução de problemas não triviais que envolvem Matemática. A aproximação entre os estudos teóricos e aplicados deste trabalho com estratégias e recursos tecnológicos atuais, vem ao encontro do atendimento das demandas contemporâneas de desenvolvimento de ciência básica e aplicada associada ao desenvolvimento tecnológico com vistas à inovação.

Referências

- ABREU, F. A. **Um estudo sobre a interseção de cilindros e outros sólidos relacionados**. 2016. 46 f. Dissertação (mestrado) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2016.
- BARBOSA, J. C.; OLIVEIRA, A. M. P. Por que a pesquisa de desenvolvimento na Educação Matemática?. **Perspectivas da Educação Matemática**, UFMS, v. 8, n. temático, p. 526-546, 2015.
- BOCASANTA, D. M. **Dispositivo da tecnocientificidade**: a iniciação científica ao alcance de todos. São Leopoldo, 2013. 233 f. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade do Vale do Rio dos Sinos, São Leopoldo, 2013.
- BRASIL. Ministério da Ciência e Tecnologia. **Livro Azul**: 4ª Conferência Nacional de Ciência Tecnologia e Inovação para o Desenvolvimento Sustentável. Brasília: MCTI/Centro de Gestão e Estudos Estratégicos, 2010.
- COBB, P.; CONFREY, J.; DISESSA, A.; LEHRER, R.; SCHAUBLE, L. Design experiments in educational research. **Educational Researcher**, v. 32, n. 1, p. 9-13, jan./fev. 2003.
- COLLINS, A.; JOSEPH, D.; BIELACZYK, K. Design Research: Theoretical and Methodological Issues. **Journal of the Learning Sciences**, 13(1), p. 15-42, 2004.
- DOERR, H. M.; WOOD, T. Pesquisa-Projeto (design research): aprendendo a ensinar Matemática. In: BORBA, M. C. (Org.). **Tendências internacionais em formação de professores de matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p. 113-128.
- KIANG, T. An Old Chinese Way of Finding the Volume of a Sphere. **The Mathematical Gazette**, v. 56, n. 396, p. 88-91, 1972. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/3615251>>. Acesso em: ago. 2016.
- MORIN, E. **Os sete saberes necessários à educação do futuro**. Trad. SILVA, Catarina Eleonora F. da; SAWAYA, Jeanne. 11. ed. São Paulo: Cortez; Brasília, DF: UNESCO, 2006.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

SASSON, A. A renovação do ensino das ciências no contexto da reforma da educação secundária. In: _____. **Cultura científica**: um direito de todos. Brasília: UNESCO, 2003. p. 15-24.

SILVA, J. I. G.; FERREIRA, D. H. L. O uso de tecnologias na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. In: ENCONTRO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA PUC-CAMPINAS, 14., 2009, Campinas. **Anais do XIV Encontro de Iniciação Científica da PUC-Campinas**. Disponível em: <<http://docplayer.com.br/15548103-O-uso-de-tecnologias-na-disciplina-de-calculo-diferencial-e-integral-i.html>>. Acesso em: 30 ago. 2016.

STEWART, J. **Cálculo**, v. I. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

SZTAJN, P.; WILSON, H.; EDGINGTON, C.; MYERS, M.; DICK, L. Using Design Experiments to Conduct Research on Mathematics Professional Development. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 6, n. 1, p. 9-34, abr. 2013.

VAZ, R. L. **O uso das isometrias do Software Cabri-Gèomètre como recurso no processo de prova e demonstração**. 2004. 216 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.