



REMAT

Revista Eletrônica da Matemática

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul



Uma sequência didática para compreender a potenciação e a radiciação de números complexos

Cassiano Scott Puhl

Universidade de Caxias do Sul (UCS), Caxias do Sul, RS, Brasil

cspuhl@ucs.br

Isolda Gianni de Lima

Universidade de Caxias do Sul (UCS), Caxias do Sul, RS, Brasil

iglima@ucs.br

Resumo

Neste artigo, apresenta-se uma proposta didática para compreender as operações de potenciação e radiciação de números complexos. A proposta consta de uma atividade para esse estudo no Ensino Médio, em que, por meio de aplicativos digitais, os estudantes podem refletir, estabelecer conjecturas, testar hipóteses e, por fim, desenvolver um algoritmo para resolver tais operações. O objetivo principal da estratégia é promover a resolução dessas operações sem utilizar fórmulas, e sim, aproveitar conhecimentos prévios e compreender e aplicar, de forma intuitiva, outro modo de resolver tais operações. A teoria de Ausubel, da aprendizagem significativa, fundamentou a criação da sequência didática e dos aplicativos que são propostos e que estão disponíveis em um ambiente virtual de aprendizagem (OA), onde o estudante interage e desenvolve aprendizagens. Esta proposta, ao ser aplicada em uma escola, propiciou um ambiente reflexivo e de trocas de conhecimentos, principalmente em interações no OA. Os resultados da experiência superaram as expectativas iniciais, conforme comprovam observações e relatos de estudantes, demonstrando o alcance dos objetivos que foram propostos.

Palavras-chave: Números Complexos. Potenciação e Radiciação. Sequência Didática. Aprendizagem Ativa e Significativa.

Abstract

This article presents a didactic proposal to operate with powers and roots of complex numbers. The proposal consists of an activity for high school students, in which, by means of digital applications, students can reflect, establish conjectures, test hypotheses and, finally, develop an algorithm to solve such operations. The main objective of the strategy is promoting results of powers and roots exercises without using a mathematical formula, but using the previous knowledge that students have and develop, intuitively, a way to resolve the requested operations. The theory of Ausubel, of meaningful learning, based the creation of the didactic sequence that is presented here, and also helped with the digital applications, which are available in a virtual learning environment (LO), where the student interacts as active agent in their learning. This proposal, when applied, provided a reflective environment and knowledge exchanges, especially in interactions in LO. The results of the experiment exceeded the initial expectations, as proving the observations and reports of students, demonstrating the achievement of goals that were proposed.

Keywords: Complex Numbers. Potentiation and nth Root. Didactic Sequence. Active and Meaningful Learning.

1. Introdução

A Matemática, para muitos estudantes, é considerada uma disciplina chata e complicada, pois sem entender o significado dos conteúdos, o estudo reduz-se a fórmulas e relações que devem ser memorizadas para uma aplicação, quase sem nenhuma novidade, em exercícios (BÚRIGO *et al.*, 2012). Os estudantes têm mais dificuldades em compreender os conceitos estudados quando não percebem nenhuma relação com outros conhecimentos que já possuem e, ainda mais, quando são propostos sem nenhuma forma de contextualização. O conteúdo escolar, em muitas situações, é apresentado como algo totalmente novo, um conhecimento estático e desvinculado do contexto social e histórico em que se desenvolveu. Esse cenário está presente nas escolas públicas brasileiras, causado, principalmente, por estratégias transmissivas de informações. Visando alterar esse panorama, uma vez que não é um cenário ideal para a aprendizagem, tem-se políticas educacionais como o Programa Ensino Médio Inovador e o Pacto Nacional pelo Fortalecimento do Ensino Médio, inovações e incentivo aos professores, tal como formações que lhes permitem refletir sobre a ação docente.

O Programa do Ensino Médio Inovador visa à “[...] disseminação da cultura de um currículo dinâmico, flexível e que atenda às demandas da sociedade contemporânea” (BRASIL, 2013, p. 10). A sociedade contemporânea clama por cidadãos críticos e criativos, que saibam lidar com problemas sociais e afetivos e que conheçam seus direitos e deveres para o bem próprio, para com quem convivem e para a sociedade (VASCONCELLOS, 2001). A escola conseguirá atender essa demanda quando as metodologias propostas pelos professores levarem em consideração os conhecimentos dos estudantes, fazendo-os perceber que eles são responsáveis por suas aprendizagens.

Para o desenvolvimento de uma aprendizagem ativa, o professor deve planejar bem as sequências didáticas, estabelecendo e verificando os objetivos das atividades. Após a aplicação, cabe uma avaliação da prática, uma análise dos aspectos positivos e das dificuldades, buscando subsídios para melhorar a estratégia em futuras aplicações.

Segundo Búrigo *et al.* (2012, p. 21), “[...] o ensino de qualidade começa pela reflexão do docente sobre a sua atividade, com boa fundamentação no conhecimento sistematizado”. Dessa forma, não basta somente aplicar o planejamento desenvolvido, mas deve-se repensar a prática em sala de aula, procurando analisar se os objetivos foram atingidos e refletindo sobre possíveis aperfeiçoamentos. Em uma perspectiva científica, procura-se compreender o fenômeno estudado no contexto social inserido, através da elaboração de asserções¹ que correspondem aos objetivos da sequência didática² construída, remetendo assim a uma pesquisa de caráter qualitativo

¹ “A asserção é um enunciado afirmativo no qual o pesquisador antecipa os desvelamentos que a pesquisa poderá trazer” (BORTONI-RICARDO, 2008, p. 53).

² Entende-se que sequência didática seja um conjunto de atividades planejadas visando à aprendizagem de conceitos pelos estudantes.

(BORTONI-RICARDO, 2008). Portanto, a pesquisa qualitativa na área da educação tem o objetivo de construir e aperfeiçoar a didática, o ambiente escolar e os espaços de aprendizagem. Ao refletir e estando aberto a novas ideias e conceitos, o professor torna-se um professor-pesquisador (BORTONI-RICARDO, 2008).

Dentre dos conteúdos matemáticos nos quais os professores encontram dificuldade em mostrar significados ou aplicação para estudantes, encontram-se as operações de potenciação e radiciação de números complexos. É mais simples para o professor explanar e explicar as fórmulas de Moivre do que resolver tais operações, como foi realizado na pesquisa de Almeida (2013). Seguindo essa metodologia, o estudante recebe informações do professor, sendo passivo no processo de aprendizagem, não valorizando o conhecimento do estudante. Assim, dificilmente compreenderá o que é resolver essas operações. As ações de sujeito ativo, de cidadão crítico, como a reflexão, a análise e a investigação, propostas por Almeida (2013) para as operações de potenciação e radiciação de números complexos, não foram contempladas nas atividades.

Contrapondo essa perspectiva, criaram-se aplicativos digitais de Geometria Dinâmica, e aplicou-se uma sequência didática cujo objetivo é aproveitar os conhecimentos que os estudantes possuem, ampliando-os, dando significado para as operações de potenciação e radiciação de números complexos. Para fundamentar esta pesquisa, utilizou-se a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel, que ressalta o conhecimento do estudante como o fator fundamental para a aprendizagem de novos conceitos: se não houver uma relação entre aquilo que o estudante conhece e o conceito estudado, provavelmente não haverá a compreensão dos novos conceitos, resultando em uma aprendizagem mecânica.

Portanto, o objetivo desta pesquisa é compartilhar uma sequência didática, planejada, aplicada e analisada, que instigou os estudantes a compreenderem as operações de potenciação e radiciação de números complexos, utilizando conhecimentos já presentes na sua estrutura cognitiva. Esta sequência didática é parte de um projeto maior, que consiste em uma dissertação de mestrado (PUHL, 2016), em que se criou uma sequência didática para desenvolver todos os conceitos e todas as operações de números complexos. Assim, espera-se divulgar uma didática diferenciada, como indicativo de que a Matemática não se reduz a fórmulas, sendo possível compreender as operações utilizando conhecimentos prévios dos estudantes.

2. Referencial teórico

O fácil acesso à informação é como um forte clamor para que a escola repense seu papel social. Ao invés de formar pessoas que reproduzem o conhecimento que recebem, deve formar cidadãos críticos e criativos (MORETTO, 2007). Assim, o professor não deve se limitar a apresentar informações aos estudantes, mas, sim, desenvolver os conteúdos escolares de forma que o estudante reflita, troque conhecimentos com os colegas, teste hipóteses, esboce conjecturas, criando estratégias ativas para promover a aprendizagem (BRASIL, 2002).

Alguns conhecimentos matemáticos são mais difíceis de serem compreendidos se o professor utiliza somente o quadro negro e o giz. Os recursos tecnológicos estão aí para ajudar, abrindo um leque de possibilidades, como os entes geométricos, por exemplo, que podem ser construídos com um *software* de Geometria Dinâmica. Desse modo, os estáticos quadro e giz ou lápis e papel cedem lugar ao dinâmico, permitindo que o estudante manipule e interaja com os objetos matemáticos (GRAVINA; SANTAROSA, 1999). A Geometria Dinâmica e interativa auxilia na visualização geométrica, possibilitando a exploração de diferentes situações e a construção de conjecturas que colaboram para dar sentido aos conceitos. Ao construir uma figura geométrica, o estudante tem um ponto de partida e pode, então, realizar testes transformando-a quantas vezes quiser em novas experimentações, visando reforçar, reformar, confirmar ou refutar suas conjecturas (GRAVINA, 1996).

Ainda assim, não basta somente utilizar os recursos digitais em sala de aula, as práticas didáticas devem seguir uma tendência construtivista. Dizem Búrigo *et al.* (2012, p. 19): “Mudam os recursos para a educação, mas as concepções dos professores sobre o processo de ensino e aprendizagem não se modificam”. O uso de recursos digitais não garante qualidade no ensino. Cabe ao professor promover situações em que os estudantes interajam, compreendam, testem e validem hipóteses, aprendendo com os recursos digitais (GRAVINA; SANTAROSA, 1999).

Seguindo essa perspectiva de utilizar recursos digitais segundo uma teoria de aprendizagem construtivista, criaram-se aplicativos no GeoGebra³ e uma proposta didática para a aprendizagem de potenciação e radiciação de números complexos, à luz da aprendizagem significativa, de Ausubel.

Segundo Ausubel *et al.* (1980, p. 34), “[...] a essência do processo de aprendizagem significativa é que as idéias expressas simbolicamente são relacionadas às informações previamente adquiridas através de uma relação não arbitrária e substantiva (não literal)”. O conteúdo a ser aprendido deve relacionar-se com conhecimentos já existentes, chamados de subsunçores. O subsunçor é o ponto mais importante no processo de aprendizagem, pois é âncora para novos conhecimentos e ideias (MOREIRA, 2011).

O novo conceito é ancorado à estrutura cognitiva, indicando que há uma relação não arbitrária da aprendizagem e que o conhecimento não é somente de palavras, regras ou algoritmo (MOREIRA; MASINI, 2006).

Ausubel (2003) contrapõe-se à aprendizagem mecânica, porque geralmente ocorre quando o conteúdo é transmitido aos estudantes, quando o professor acredita ser o transmissor do conhecimento. Assim, esse autor define duas características fundamentais para o desenvolvimento da aprendizagem significativa: a não arbitrariedade e a substantividade.

³ O GeoGebra é um *software* livre, que reúne recursos para processar geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos variados, sendo utilizado em multiplataformas. Disponível para download em: <http://www.geogebra.org/>.

A não arbitrariedade significa que o conteúdo não pode ficar solto na mente do estudante, deve estabelecer ligações entre o novo conhecimento e outros que ele já possui: os subsunçores. Assim, o conhecimento do estudante vai se ampliando, se enriquecendo, se construindo ou se reconstruindo, ou seja, o estudante utiliza um conjunto de subsunçores que servem como ancoradouro do novo conhecimento; se houver a construção do conhecimento, os novos conceitos estarão agregados aos subsunçores, e esses, como “novos” subsunçores, apresentarão um nível mais elevado de complexidade, possibilitando, da mesma forma, a ancoragem de novos conteúdos (AUSUBEL, 2003).

A outra característica é a substantividade, que é a parte mais desejada pelos estudantes. Refere-se a desenvolver uma aprendizagem com sentido, compreendendo o significado do conhecimento, alguma aplicação ou a sua utilidade. Em outras palavras, a substantividade é o significado do conteúdo. É comum ouvir de grande parte dos estudantes perguntas como: “Porque vou aprender este conteúdo?” ou “Onde vou utilizar isso?”. São perguntas que demonstram a necessidade de compreensão do significado do conhecimento e da sua relação com outros que já possuem, com sua vida e com seus interesses e curiosidades, para aproveitá-lo da melhor forma possível.

Contemplando essas duas características, é possível desenvolver uma aprendizagem subordinada, que ocorre quando um novo conteúdo é assimilado, alterando e ampliando os subsunçores utilizados nesse processo, sendo o novo conteúdo desenvolvido com apoio de outros conhecimentos presentes na estrutura cognitiva do estudante (AUSUBEL, 2003).

Partindo desse contexto, orientador da construção da sequência didática, esta é relatada a seguir e são apresentados, também, os aplicativos digitais que a compõem, com a imprescindível função de propiciar um ambiente reflexivo e investigativo, constituindo-se os estudantes em sujeitos ativos e o professor em mediador no processo de aprendizagem.

3. Metodologia

Para iniciar a sequência didática, é necessário que os estudantes saibam operar com multiplicação e divisão na forma trigonométrica, conteúdos trabalhados antes das operações de potenciação e radiciação. Para a sequência didática, foram utilizados aplicativos digitais do GeoGebra, que estão disponíveis no objeto de aprendizagem virtual (OA) denominado “Números Complexos: interação e aprendizagem”⁴, nos espaços de aprendizagem “Potenciação de Números Complexos” e “Radiciação de Números Complexos”.

Em relação às operações a serem estudadas, em potenciação espera-se que os estudantes não apresentem maiores dificuldades, pois podem relacionar a operação diretamente com a ideia de operar com sucessivas multiplicações, método utilizado por muitos estudantes, principalmente

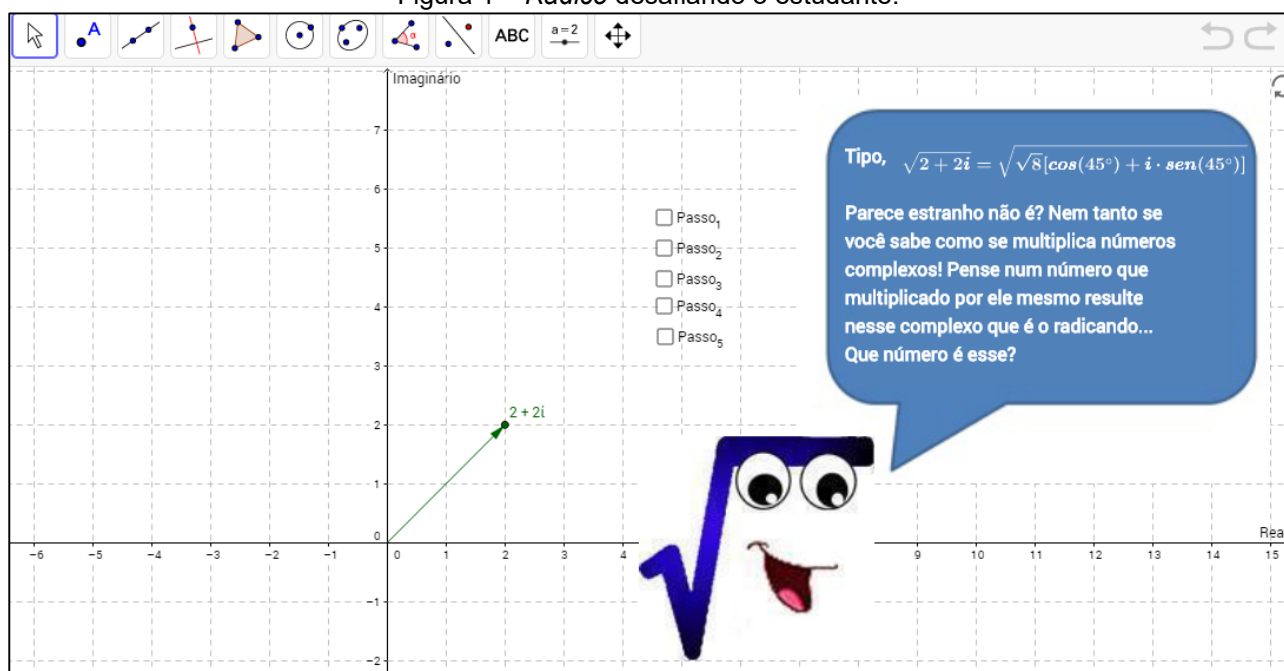
⁴ Disponível em: <<http://matematicacomplexa.hol.es>>. Acesso em: 10 fev. 2016.

no Ensino Fundamental. Assim, o estudante já conhece a operação que deve efetuar com o módulo⁵ e o argumento⁶ do número complexo para elevá-lo à determinada potência.

Já a radiciação, operação considerada difícil, tanto por estudantes quanto por professores, merece atenção diferenciada, pois está presente nos currículos do Ensino Médio e nos conteúdos previstos em vestibulares de instituições federais (DIAS, 2013). Procurando as dificuldades da operação e o desinteresse dos estudantes, o enfoque não será somente nos algoritmos da extração de raízes enésimas de números complexos (2ª fórmula de Moivre), mas serão enfatizados mais os conceitos geométricos, dando significado a essa operação. Para auxiliar nesse estudo, existe um personagem chamado *Radice*, que ganhou vida nos aplicativos, pois ele interage com os estudantes: conversa, questiona, desafia e dá algumas dicas e informações para prosseguir nas atividades, desempenhando um papel fundamental, de professor, estimulando e orientando o estudante para a aprendizagem.

Na operação de radiciação é requerida a maturidade e uma atenção especial dos estudantes, sendo importante considerá-la, como de fato é, operação inversa da potenciação, facilitando a compreensão da forma de calcular as raízes. Realizando uma analogia: se na potenciação faz-se potência no módulo, então na radiciação faz-se a raiz no módulo; se na potenciação faz-se multiplicação do argumento, então na radiciação faz-se divisão do argumento.

Figura 1 – *Radice* desafiando o estudante.



Fonte: Elaboração dos autores.

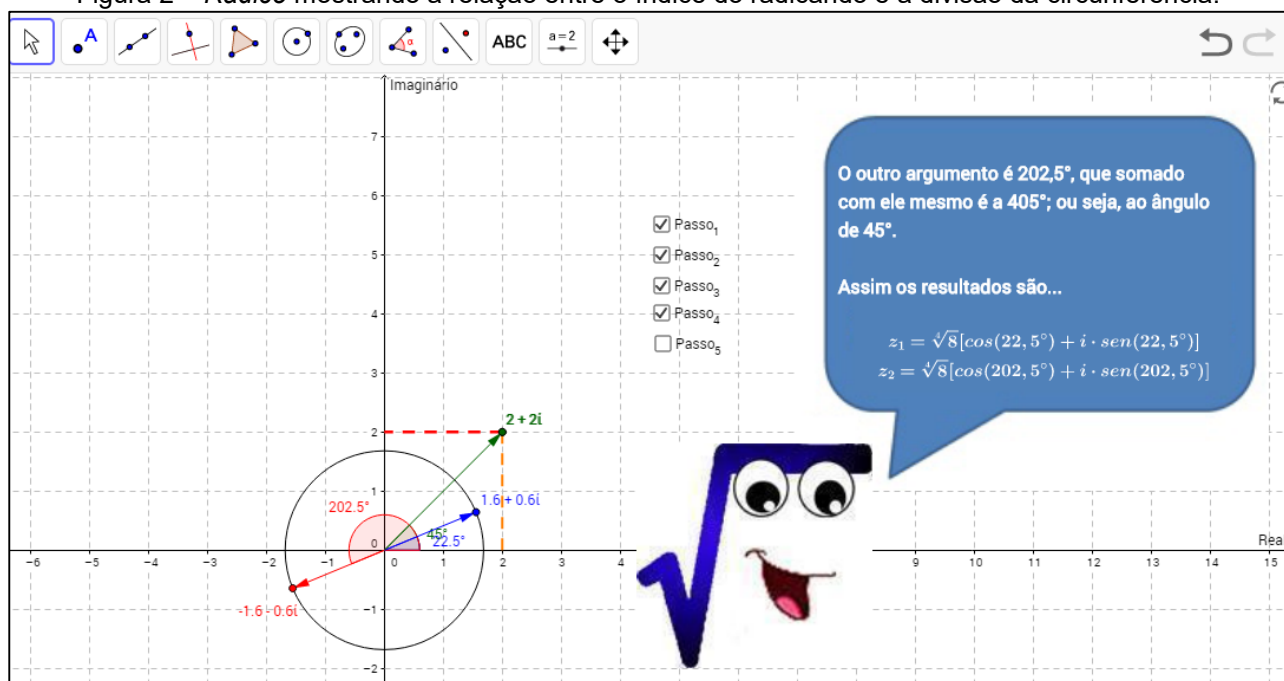
⁵ “O **módulo de z**, indicado por $|z|$ ou p , é o módulo do vetor \overrightarrow{OP} que o representa (comprimento do vetor), ou seja, é a distância da origem $O(0, 0)$ ao ponto $P(a, b)$.” (MELLO, 2005, p. 578).

⁶ “A direção do vetor \overrightarrow{OP} é dada pelo ângulo θ (com $0 \leq \theta \leq 2\pi$), formado pelo vetor e pelo semieixo real positivo, considerado no sentido anti-horário. Para um complexo não-nulo z , o ângulo θ é chamado de **argumento de z**.” (MELLO, 2005, p. 578).

Para iniciar o estudo sobre a radiciação, *Radice* desafia o estudante para calcular a raiz quadrada de um número complexo (Figura 1), representando-o na forma algébrica e na trigonométrica. Espera-se que os estudantes façam a relação da radiciação como a operação inversa da potenciação. Assim, como na potenciação faz-se a potência no módulo, na radiciação será extraída a raiz enésima no módulo. Logo, o módulo é igual para todas as raízes.

Como as raízes têm o mesmo módulo, *Radice* sugere que se desenhe uma circunferência centrada na origem e de raio igual ao módulo da raiz, representando, assim, todas as possíveis raízes (Figura 2). Para resolver o desafio do *Radice*, ainda falta calcular e determinar o argumento das duas possíveis raízes. Assim, como o argumento, na potenciação, é determinado através da multiplicação, na radiciação, será pela divisão. Assim, quando o estudante determina a primeira raiz, tem-se a outra raiz, que é o número oposto, pois todo número elevado ao quadrado possui o mesmo resultado que seu respectivo oposto elevado ao quadrado. Dessa forma, a outra raiz será o número complexo com um argumento de diferença de 180° em relação à primeira raiz.

Figura 2 – *Radice* mostrando a relação entre o índice do radicando e a divisão da circunferência.



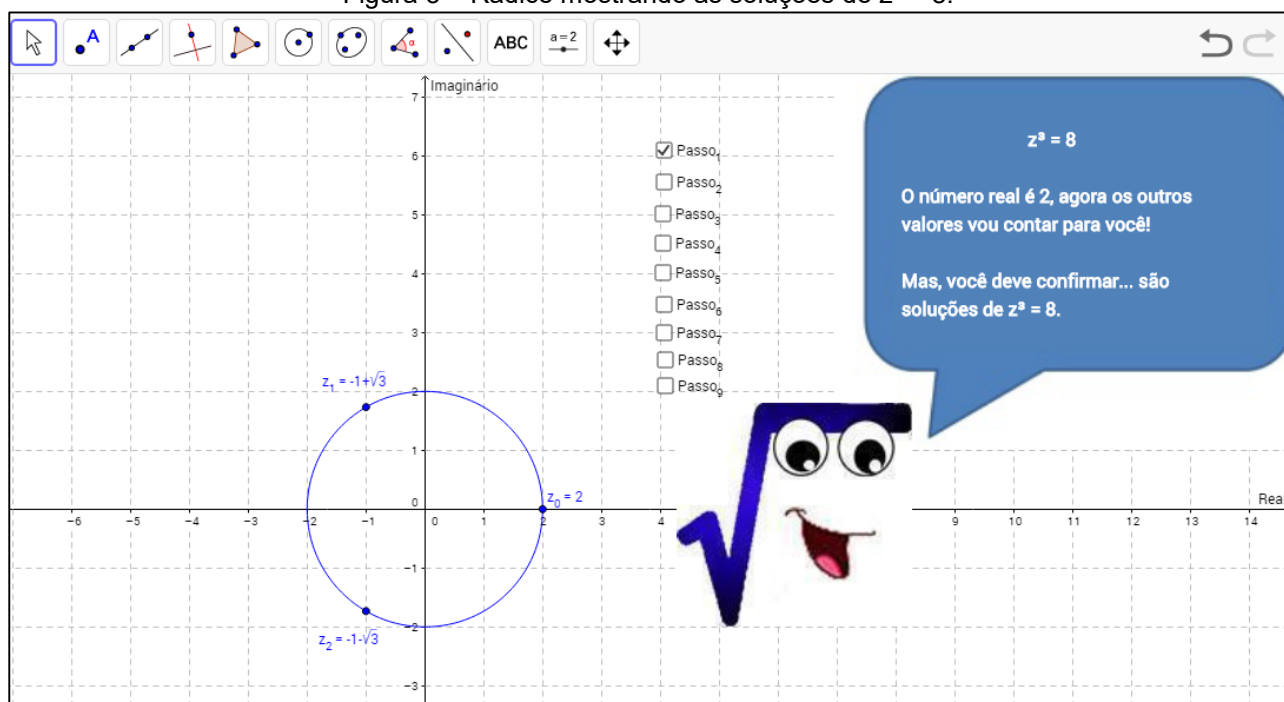
Fonte: Elaboração dos autores.

Com a representação das raízes como pontos da circunferência, o estudante percebe que as soluções a dividem em duas partes iguais. Conseqüentemente, os ângulos centrais são iguais. Terminada a interação nesse aplicativo, os estudantes vão para o ambiente de prática, onde *Radice* os desafiará a determinar as raízes cúbicas de “8”. Um dos valores é simples, o número real “2”, mas quais são os outros dois valores?

Provavelmente, somente com um exemplo, os estudantes não conseguirão criar um algoritmo para determinar as raízes enésimas de um número complexo. Assim, *Radice* apresenta as outras duas raízes, com a condição de que o estudante as teste, comprovando que são respostas

para a operação (Figura 3). Após o estudante conferir as respostas, *Radice* diz: “Olha que interessante! Em quantas partes foi dividida a circunferência? Em três partes iguais! Na janela anterior, quando calculamos a raiz quadrada, em quantas partes foi dividida a circunferência? Foram duas, certo?”. *Radice* mostra, de forma intuitiva, a relação do índice do radical com a quantidade de partes iguais em que uma circunferência é dividida. Ao unir as raízes por segmentos de reta, constituir-se-á um polígono regular que está inscrito na circunferência, cujo raio é igual à raiz cúbica do módulo do radicando. Determinada uma raiz, as outras têm o mesmo módulo e o argumento cresce em progressão aritmética, em que a razão é a medida do ângulo central, calculado através da divisão de 360° pelo índice do radical.

Figura 3 – Radice mostrando as soluções de $z^3 = 8$.



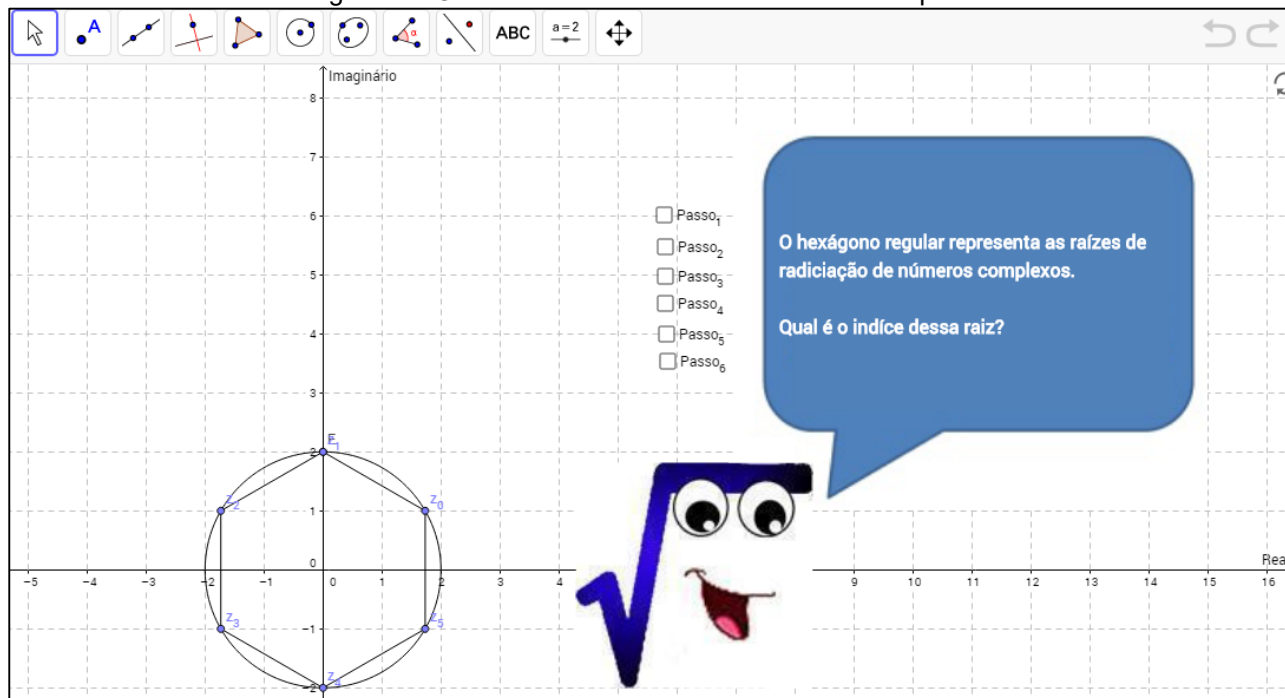
Fonte: Elaboração dos autores.

Após determinar a raiz cúbica, *Radice* sugere o cálculo de uma raiz quarta. Essa é uma estratégia para o professor averiguar se os estudantes conseguiram construir um algoritmo para a realização da operação. Caso não tenham compreendido, cabe ao professor intervir na investigação com perguntas, fazendo os estudantes refletirem sobre as relações. Para finalizar, é realizado o inverso: *Radice* apresenta as raízes de uma radiciação e o estudante tem que determinar o radicando e o índice da operação (Figura 4).

Nessa estratégia de aprendizagem, a abordagem da radiciação foi essencialmente geométrica, estabelecendo uma relação entre a raiz enésima de um número complexo e os vértices de um polígono regular. Esse método de resolução sugerido pelo personagem é simples: sabendo uma solução, fica fácil determinar as outras, já que os argumentos crescem aritmeticamente, conforme o ângulo central do polígono. Durante essa sequência didática, não foi apresentada nenhuma fórmula para os estudantes. Com a exploração geométrica, criou-se conjecturas que

foram testadas, descobrindo um algoritmo para extrair raízes enésimas de um número complexo e, somente no final da abordagem geométrica, da criação do algoritmo, foi apresentada a 2ª fórmula de Moivre.

Figura 4 – Cálculo da raiz sexta de um número complexo.



Fonte: Elaboração dos autores.

Realizadas as interações no OA para averiguar se os objetivos foram atingidos e se os estudantes aprenderam a efetuar tais operações, aplicou-se um questionário com exercícios sobre as operações estudadas.

Caso o professor sinta necessidade, acredita-se que possam ser feitas intervenções na sala de aula e mediação de diálogos, guiando o estudante, ajudando-o a estabelecer e a testar as conjecturas propícias para a aprendizagem da potenciação e radiciação de números complexos.

4. Resultados e discussões

Essa sequência didática foi aplicada quase no fim do ano letivo de 2014 para uma turma do terceiro ano do Ensino Médio, composta de dezoito estudantes. Desses, quinze eram também trabalhadores, exercendo alguma função em mercados, escolas de educação infantil, escritórios de contabilidade, ateliês de costura ou na lavoura, com seus pais. Essa realidade não foi novidade quando se iniciou a parte aplicada da pesquisa. Tinha-se consciência de que, devido ao cansaço pelo trabalho ou mesmo por desinteresse, alguns estudantes poderiam não fazer algumas das atividades propostas. No entanto, através de uma metodologia investigativa, tornando o estudante como sujeito da aprendizagem, todos se envolveram nos estudos com atenção e dedicação, creditando esse fato à metodologia proposta.

A potenciação não foi trabalhada especificamente, pois se acreditava que, compreendida a multiplicação de números complexos expressos na forma trigonométrica, os subsunçores dos estudantes dariam conta dessa operação. Essa hipótese foi confirmada. Todos os estudantes souberam expressar, em palavras, como efetuar a potenciação e a resolveram corretamente (Figura 5). Caso os estudantes não tivessem os subsunçores necessários, o OA tem aplicativos para preencher essa lacuna de aprendizagem, em que o *Radice* aborda de forma investigativa e construtiva os conceitos da forma trigonométrica e também da multiplicação.

Para a radiciação, o processo para compreender essa operação não é tão simples. Contudo, os aplicativos e a interação com o *Radice* auxiliaram os estudantes. A atividade foi desenvolvida em grupos e os estudantes interagiam nos aplicativos dialogando com os colegas, criando conjecturas e sanando dúvidas com o professor. Os estudantes conseguiram ótimos resultados.

Figura 5 – Respostas sobre potência de números complexos.

1. Ao resolver a potência de um número complexo, qual o procedimento para determinar a potência? Por exemplo, qual o valor de $2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)^6$?

1. Multiplicar-se os módulos e soma-se os ângulos.
 $2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)^6 \Rightarrow 2^6 = 64 \quad 30 \times 6 = 180$
 $64(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$

1. Se multiplica os módulos, soma-se os ângulos. $2^6 = 64$ e somamos 6 vezes o trinta = 180 $\rightarrow 64(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$.

Fonte: Dados da pesquisa.

A substituição dos conceitos algébricos por geométricos foi o método utilizado para motivar os estudantes a apresentarem uma aplicação desta operação (ROSA, 1998). Diz essa autora (1998, p. 78): “Relacionar a radiciação de números complexos com elementos dos polígonos regulares é um trabalho de aplicação desse conteúdo, bastante interessante para o aluno, que, a esta altura, têm a oportunidade de tratar números e geometria entrosadamente”. Ao focar em aspectos geométricos, os estudantes tiveram a oportunidade de, intuitivamente, desenvolver um algoritmo para calcular as raízes enésimas de qualquer número complexo.

Para começar os estudos de radiciação, o *Radice* desafiou os estudantes a calcularem os valores da raiz quadrada de um número complexo. Sem dúvida, a forma trigonométrica é a mais adequada para efetuar essa operação. Primeiro, extraíram a raiz quadrada do módulo do radicando, calculando o módulo para as duas raízes, pois a diferença entre elas está no argumento. Os estudantes se questionaram: “Como determinar o argumento dessas raízes?” Dando continuidade, *Radice* sugeriu que desenhassem uma circunferência centrada na origem e de raio igual ao módulo da raiz, pois assim estavam expressas todas as possíveis raízes. Desse modo, as raízes foram

expressas por pontos que pertencem à circunferência, faltando calcular o argumento de cada uma das raízes, para depois representá-las no plano.

Ao utilizar a radiciação como operação inversa da potenciação, os estudantes determinaram uma das soluções, dividindo o argumento do radicando pelo índice da raiz. O professor, percebendo que faltava algo para os estudantes determinarem a outra solução, questionou-os: “Se elevar -1 ao quadrado é o mesmo resultado que 1 ao quadrado? E se calcular -2 ao quadrado é o mesmo resultado que 2 ao quadrado? Existe alguma semelhança com as bases?”. Assim, os estudantes perceberam que a outra solução é o oposto: algebricamente, é a primeira raiz multiplicada por -1; geometricamente, é a raiz já calculada rotacionada em 180° . Ou seja, o argumento da primeira para a segunda raiz possui uma diferença de 180° (que é metade de 360°). Com a representação geométrica das raízes, como pontos da circunferência, ficaram visíveis que as soluções dividiram a circunferência em duas partes iguais.

Nessa etapa, os estudantes ainda não haviam conseguido criar um algoritmo para resolver a radiciação. Faltava mais um momento de reflexão, que aconteceu quando *Radice* os desafiou a determinar as raízes cúbicas de “8”. Com esse aplicativo, os estudantes concluíram que o índice do radical indica a quantidade de partes em que a circunferência é dividida. Ao dividir a circunferência em partes iguais, os argumentos crescem em progressão aritmética, tendo como razão a medida do ângulo central, que é determinada pela divisão de 360° pela quantidade de vezes que a circunferência será dividida, ou seja, pelo índice do radical. Portanto, calculado um argumento e sabendo o índice do radical, conseguiu-se determinar a razão de crescimento, sendo, assim, possível determinar todas as raízes enésimas de um número complexo.

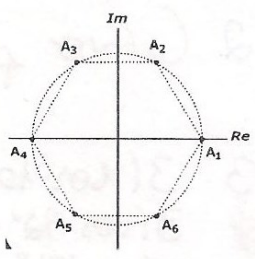
Porém, ainda faltava chegar à conclusão de Lima (2006, p. 175): “Se $r \neq 0$, as imagens dessas raízes são vértices de um polígono regular de n lados inscritos em uma circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{r}$. Se $r = 0$, é claro que todas as raízes são iguais a 0.” Esse aspecto foi atingindo somente quando os estudantes utilizaram o seu algoritmo para determinar a raiz quarta de um número complexo.

Esta estratégia de aprendizagem mostra que não é necessário sempre mostrar fórmulas para os estudantes, porque através da exploração geométrica criaram-se e analisaram-se conjecturas, desenvolvendo um algoritmo para calcular as raízes enésimas de um número complexo e, só no fim da abordagem geométrica, apresentou-se a 2ª fórmula de Moivre. Com essa abordagem, obtiveram-se ótimos resultados, pois todos souberam descrever como resolver a raiz enésima de um número complexo e executaram corretamente as operações. Isso se deve à metodologia adotada, em que conceitos algébricos foram deixados de lado para privilegiar os geométricos. Aprofundando mais o nível de compreensão, os estudantes souberam determinar o índice do radicando, por meio da representação geométrica. A Figura 6 mostra algumas perguntas realizadas para os estudantes.

Figura 6 – Perguntas sobre a radiciação de números complexos.

3. Qual o procedimento feito para determinar a $\sqrt[5]{243 (\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ)}$?

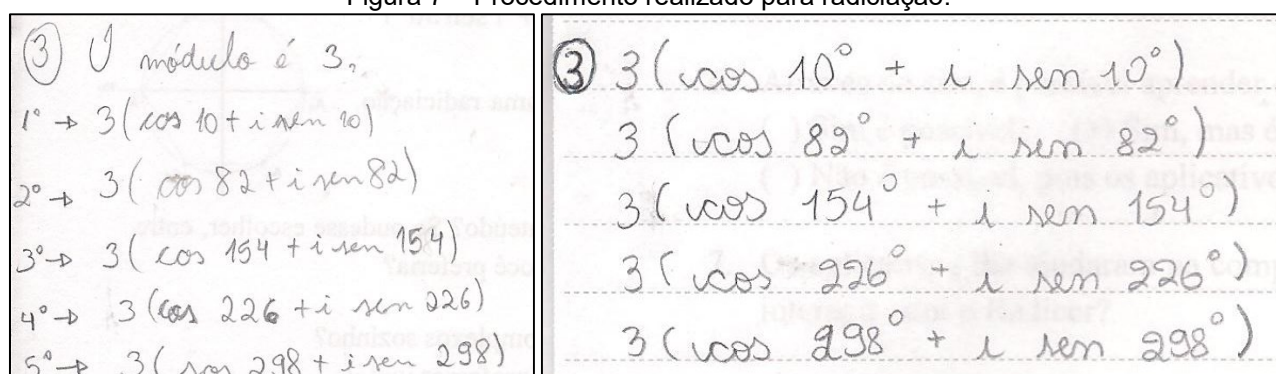
4. No desenho abaixo temos a representação do resultado de uma radiciação, qual é o índice do radicando dessa radiciação?



Fonte: Elaboração dos autores.

Na questão 3 (Figura 6), inicialmente, os estudantes determinaram o módulo: “3”. Percebendo que a circunferência seria dividida em cinco partes, dividiram o argumento, 50° , por cinco, resultando em 10° . Os próximos argumentos foram resultados de uma progressão aritmética, tendo como razão o ângulo central, 72° , pois é o resultado da divisão de 360° por 5. A Figura 7 apresenta as raízes da questão 3, determinadas através do procedimento do algoritmo, que foi descrito anteriormente. No caso da questão 4 (Figura 6), os estudantes souberam definir que o índice do radical, “6”, justificando que possuem seis raízes e que a circunferência está dividida em seis partes iguais.

Figura 7 – Procedimento realizado para radiciação.



③ O módulo é 3,
 $1^\circ \rightarrow 3(\cos 10 + i \sin 10)$
 $2^\circ \rightarrow 3(\cos 82 + i \sin 82)$
 $3^\circ \rightarrow 3(\cos 154 + i \sin 154)$
 $4^\circ \rightarrow 3(\cos 226 + i \sin 226)$
 $5^\circ \rightarrow 3(\cos 298 + i \sin 298)$

③ $3(\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ)$
 $3(\cos 82^\circ + i \sin 82^\circ)$
 $3(\cos 154^\circ + i \sin 154^\circ)$
 $3(\cos 226^\circ + i \sin 226^\circ)$
 $3(\cos 298^\circ + i \sin 298^\circ)$

Fonte: Dados da pesquisa.

Através das respostas dos estudantes têm-se indícios de que a representação geométrica auxiliou na compreensão da radiciação: sem utilização de fórmula, resolveram corretamente a operação. Os subsunçores estavam presentes e o conhecimento sobre os ângulos centrais foi fundamental para a assimilação da radiciação. Os estudantes estabeleceram uma relação entre polígonos regulares (conhecimento já presente na estrutura cognitiva) e a radiciação de números complexos (conhecimento novo). Portanto, apresentaram-se fortes indícios de ter ocorrido uma aprendizagem subordinada, em que os polígonos regulares e a progressão aritmética receberam um novo significado, sendo possível ancorar a operação da radiciação de números complexos, ampliando e enriquecendo esses subsunçores.

5. Considerações finais

Segundo dados do PISA (2012), de 65 países que participam dessa avaliação, em Matemática, o Brasil se encontra na 58ª posição. A média dos países é, na disciplina de Matemática, 494 pontos, porém, o Brasil atingiu somente 391 pontos. Constata-se que a educação brasileira está em crise, em especial a escola pública, pois não consegue formar cidadãos críticos e criativos, que saibam conviver em sociedade. Sem dúvida, a qualidade do ensino precisa, urgentemente, ser melhorada.

De acordo com as reflexões de Búrigo *et al.* (2012), uma das atitudes que o professor deve tomar para melhorar a qualidade no ensino é a reflexão sobre sua prática em sala de aula, com boa fundamentação no conhecimento sistematizado, tornando-se, assim, um professor-pesquisador. Refletir e repensar a prática do professor em sala de aula é um dos objetivos do Pacto Nacional pelo Fortalecimento do Ensino Médio (BRASIL, 2013), que visa qualificar o ensino nas escolas públicas. Dessa forma, decidiu-se compartilhar essa sequência didática construída, que foi organizada após muitos momentos de estudo e reflexão, procurando estimular o lado investigativo e o raciocínio lógico do estudante, compreendendo as operações de potenciação e radiciação, sem a utilização de fórmulas matemáticas.

Na criação da sequência didática, utilizou-se a teoria de aprendizagem significativa, que ressalta o estudante como o sujeito da construção da aprendizagem. Com ela, proporcionou-se um ambiente escolar que favoreceu a construção do conhecimento significativo, em que o papel do professor é de mediador, questionador e orientador dos seus estudantes. Por meio dos aplicativos digitais e do *Radice*, foi possível desafiar os estudantes, instigando-os e motivando-os a compreender as operações realizadas. Assim, os subsunçores dos estudantes ancoraram perfeitamente os novos conceitos trabalhados.

Os resultados apresentados mostram que os objetivos deste estudo, construção e investigação, foram alcançados. Além disso, de forma intuitiva, os estudantes utilizaram suas estruturas algébricas já construídas em seu domínio cognitivo para operar com os números complexos, criando algoritmos para estas operações, construindo novos conhecimentos na interação com o *Radice*, discutindo e refletindo sobre as próprias ações e conclusões com os colegas e com o professor, em uma proposta didática alinhada com as novas tendências educacionais.

Portanto, durante todo o trabalho, o professor foi o sujeito que promoveu as interações com o *Radice*, na medida do possível esclareceu as dúvidas dos estudantes, acompanhou o desenvolvimento da sequência didática planejada e a avaliou. Com a pesquisa, espera-se que outros docentes utilizem a sequência didática, adequando-a ao seu contexto, mas que possa ser aproveitada nas escolas para melhorar a qualidade do ensino, cujo objetivo é propiciar, cada vez mais, uma metodologia investigativa, em que o estudante seja sujeito na aprendizagem,

compreendendo os conceitos e as operações estudadas, destacando o professor como mediador no processo dessa aprendizagem ativa e significativa.

Referências

ALMEIDA, S. P. de. **Números complexos para o Ensino Médio**: uma abordagem com história, conceitos básicos e aplicações. 2013. 60 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2013. Disponível em: <<http://www.dme.ufcg.edu.br/PROFmat/TCC/Salomao.pdf>>. Acesso em: 1 fev. 2016.

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e retenção de conhecimento**: uma perspectiva cognitiva. Lisboa: Paralelo, 2003.

AUSUBEL, D.; NOVAK, J.; HANESIAN, H. **Psicologia educacional**. Trad. NICK, E.; RODRIGUES, H.; PEOTTA, L.; FONTES, M. A.; MARON, M. G. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

BORTONI-RICARDO, Stella Maris. **O professor pesquisador**: introdução à pesquisa qualitativa. São Paulo: Parábola, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. **Formação de Professores do Ensino Médio**: áreas de conhecimento e integração curricular. Curitiba: UFPR. 2013. Disponível em: <http://pactoensinomedio.mec.gov.br/images/pdf/cadernos/web_caderno_4.pdf>. Acesso em: 12 fev. 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN + Ensino Médio**: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, 2002.

BÚRIGO, E. Z.; GRAVINA, M. A.; BASSO, M. V. A.; GARCIA, V. C. V. (Orgs.). **A Matemática na escola**: novos conteúdos, novas abordagens. Porto Alegre: UFRGS, 2012.

DIAS, M. A. **Representação geométrica dos números complexos**: aplicações e possibilidades didáticas. 2013. 69 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do ABC, Santo André, 2013.

GRAVINA, M. A. Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 7., nov. 1996, Belo Horizonte. **Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação**. Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Computação, 1996. p. 1-13. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/pdf/maria-alice_geometria-dinamica1996-vii_sbie.pdf>. Acesso em: 6 fev. 2016.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. C. A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados. **Informática na Educação**: Teoria & Prática, v. 1, n. 2, p. 73-88, mai. 1999.

LIMA, E. L. **A Matemática do Ensino Médio**. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, [2003-2006]. 3 v. (Coleção do professor de Matemática; 13-15).

MELLO, J. L. P. **Matemática**: construção e significado. São Paulo: Moderna, 2005.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E. A. F. S. **Aprendizagem significativa**: a teoria de David Ausubel. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2006.

MOREIRA, M. A. **Teorias de aprendizagem**. 2. ed. ampl. São Paulo: EPU, 2011.

MORETTO, V. P. **Prova**: um momento privilegiado de estudo, não um acerto de contas. 7. ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2007.

PISA. **Programme for International Student Assessment (PISA)**: results from PISA 2012. OECD – Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico, 2012. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2013/country_note_brazil_pisa_2012.pdf>. Acesso em: 9 fev. 2016.

PUHL, Cassiano Scott. **Números complexos**: interação e aprendizagem. 2016. 244 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade de Caxias do Sul, 2016.

ROSA, M. S. **Números complexos**: uma abordagem histórica para aquisição do conceito. 1998. 170 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 1998.

VASCONCELLOS, C. dos S. **Avaliação**: concepção dialética-libertadora do processo de avaliação escolar. 13. ed. São Paulo: Libertad, 2001.