REMAT
Revista Eletrônica da Matemática
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul

# Ladrilhamentos no plano: uma atividade para o Ensino Médio

Leila Inês Pagliarini Mello
Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEMAT), Porto Alegre, RS, Brasil
by.leila@gmail.com

**Resumo**
Este trabalho apresenta uma experiência realizada com alunos do terceiro ano em uma escola do município de Canoas, tendo como foco o estudo dos possíveis ladrilhamentos no plano. Aliando a arte à Matemática, com o objetivo de tornar o estudo mais significativo e agradável, construiu-se todas as possíveis possibilidades de ladrilhamento no plano com os polígonos regulares, respeitando os conceitos relacionados ao ladrilhamento e ao Teorema de Kepler. Em cada possibilidade, definiu-se o seu padrão, trabalhando com ângulos de polígonos regulares e, ao final, apresentou-se o teorema de Kepler. A atividade possibilitou a utilização de materiais manipuláveis nas aulas de Matemática, o que contribuiu para uma aprendizagem eficaz e agradável e, também, favoreceu a compreensão dos conceitos relacionados com a generalização das combinações dos polígonos no ladrilhamento no plano.

**Palavras-chave:** Ladrilhamento. Polígonos Regulares. Teorema de Kepler.

**Resumen**
En este trabajo se presenta un experimento con estudiantes de tercer año en una escuela en Canoas, centrándose en el estudio del posible mosaico del plan. Combinando el arte a las matemáticas, a fin de hacer el estudio más significativo y agradable, construimos todas las oportunidades posibles para embaldosar el plano con polígonos regulares, respetando los conceptos relacionados con suelo de baldosas y Kepler teorema. En cada oportunidad que definir su nivel, trabajando con ángulos polígonos regulares y al final, se presenta el teorema de Kepler. La actividad permitió el uso de manipulativos en las clases de matemáticas que contribuyó a un aprendizaje eficaz y agradable y también favoreció la comprensión de los conceptos relacionados con el uso generalizado de las combinaciones de polígonos en el embaldosado del plan.

**Palabras clave**: Mosaico. Polígonos Regulares. Teorema de Kepler.

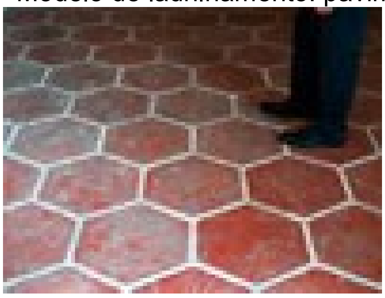
## 1. Introdução

Este trabalho pretende apresentar uma atividade que pode ser incluída no início do estudo de Geometria Espacial, pois o estudo dos padrões na Geometria oferece uma boa oportunidade ao professor para fazer uma "ponte" entre a Geometria Plana e a Espacial (CRESCENTI, 2006). Neste trabalho, o termo ladrilhamento é usado para o preenchimento do plano com polígonos regulares, mas sem sobreposições ou buracos. Consideramos que a sequência didática apresentada para o estudo de todos os ladrilhamentos possíveis no plano possibilita ao aluno a oportunidade de explorar, de testar e de construir as possíveis distribuições de polígonos regulares ao redor de um vértice no plano e, desta forma, conhecer e reconhecer o Teorema de Kepler.

## 2. Ladrilhamento no plano

O ladrilhamento é uma arte usada em diversas aplicações: papel de parede, pisos decorativos com cerâmicas ou pedras (Figura 1), pisos e forros de madeira, pisos de pedras, estamparia de tecidos, bordados, tricô e crochês, empilhamento de objetos iguais, entre outras. Na natureza, são encontrados em células de tecidos biológicos, nas colmeias (Figura 2), no arranjo das escamas de peixes, nas pinhas das coníferas, nos arranjos dos cristais, nas bolhas de sabão, por exemplo (VRECCHI, 2012).

Figura 1 – Modelo de ladrilhamento: pavimentação.



Fonte: http://www.uff.br/cdme/ppr/ppr-html/ppr-br.html.

Figura 2 – Modelo de ladrilhamento: colmeia.

Fonte: http://www.projetoamazonia.com.br/2014/06/os-beneficios-das-abelhas.

Ao proporcionar a experiência do ladrilhamento em sala de aula, o aluno é convidado a ladrilhar o plano. Segundo o dicionário Aurélio (FEREIRA, 2010, p. 455), “ladrilhar” seria “revestir com ladrilhos”, “azulejar”, neste caso, em particular, a arte de ladrilhar em Matemática, ocorre obedecendo as seguintes condições de bom comportamento (ALVES; DALCIN, 1999):

a) os ladrilhos são polígonos regulares: um ou mais tipos;

b) a intersecção dos ladrilhos, se existir, é sempre um lado ou um vértice;

c) a distribuição de ladrilhos ao redor de cada vértice é sempre a mesma.

Na busca pelos possíveis ladrilhamentos, o aluno é convidado a explorar as possibilidades, encaixando os polígonos regulares, manipulando-os para descobrir. O levantamento de conjecturas e a experimentação de hipóteses precedem as descobertas dos ladrilhamentos possíveis.

Nesse contexto, o estudo é construído pela investigação, sem se ocupar com memorização de definições e de padrões de ladrilhamento, a fim de que “os padrões” sejam deduzidos e/ou entendidos, de maneira significativa para o aluno. Para Ponte et al. (2006), as atividades de geometria são propícias a um ensino baseado em situações exploratórias e investigativas.

> As investigações geométricas contribuem para perceber aspectos essenciais da atividade matemática, tais como a formulação e teste de conjecturas e a procura e demonstração de generalizações. A exploração de diferentes tipos de investigação geométrica pode também contribuir para concretizar a relação entre situações da realidade e situações matemáticas, desenvolver capacidades, tais como a visualização espacial e o uso de diferentes formas de representação, evidenciar conexões matemáticas e ilustrar aspectos interessantes da história e da evolução da Matemática. (PONTE et al., 2006, p. 71)

Assim sendo, a investigação matemática favorece o desenvolvimento da capacidade de observação, além da argumentação e da validação de condições. Nela, o professor promove a curiosidade e incentiva os alunos a fazer a descoberta. Essas práticas levam ao exercício da análise e da reflexão.

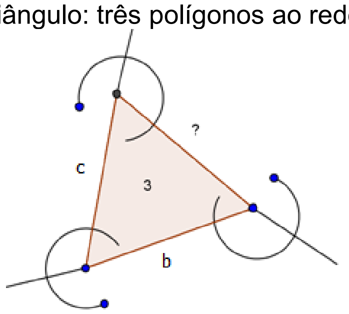
Nas subseções a seguir apresentam-se os casos de ladrilhamento possíveis para cobrir o plano utilizando-se exclusivamente polígonos regulares sujeitos às condições de bom comportamento. Mais detalhes podem ser encontrados nos trabalhos de Barbosa (1993), Silva et. al. (1994), Alves e Dalcin (1999), Santos (2006), Murari e Santos (2010), Dias(2013), entre outros.

### 2.1. Possibilidades com triângulos

#### 2.1.1. Três polígonos ao redor do vértice

Se um ladrilhamento tem padrão $(3, b, c)$, Figura 3, então $c = b$, ou seja, tem um padrão na forma $(3, b, b)$. Neste caso, $\frac{300°}{2} = 150°$. Portanto, o ladrilhamento deverá ter padrão $(3,12,12)$.

Figura 3 – Triângulo: três polígonos ao redor do vértice.




Fonte: Elaboração do autor.

#### 2.1.2. Quatro polígonos ao redor do vértice

Se o ladrilhamento tem padrão $(3, b, c, d)$, Figura 4, então $b = d$, ou seja, tem um padrão na forma $(3, d, c, d)$. Neste caso, $300° = 2x + y$, sendo $x$ e $y$ ângulos de polígonos regulares.

$x = 60° \Rightarrow y = 180°$, o que é impossível;

$x = 90° \Rightarrow y = 120°$, neste caso, padrão $(3,4,6,4)$;

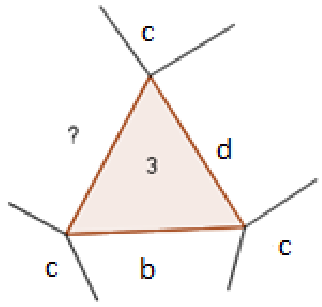
$x = 108° \Rightarrow y = 84°$, não há polígono regular com essa medida de ângulo;

$x = 120° \Rightarrow y = 60°$, neste caso, padrão $(3,6,3,6)$;

$x = 128{,}57°$ não convém, pois $x > 120° \Rightarrow y < 60°$.

Portanto, o ladrilhamento deverá ter padrão $(3,4,6,4)$ ou $(3,6,3,6)$.

Figura 4 – Triângulo: quatro polígonos ao redor do vértice.

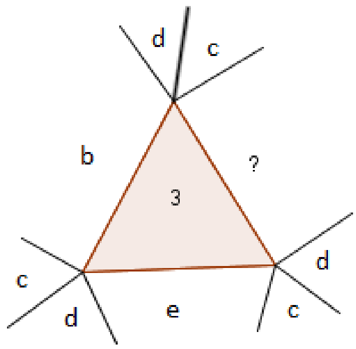



Fonte: Elaboração do autor.

### 2.1.3. Cinco polígonos ao redor do vértice

Se o ladrilhamento tem padrão $(3, b, c, d, e)$, Figura 5, então $b = e$, ou seja, tem um padrão na forma $(3, e, c, d, e)$. Observe que, se dentre os demais polígonos não houver outro triângulo, cada um deles terá, no mínimo, quatro lados. Sendo assim, a soma dos ângulos internos será, no mínimo, igual a: $60° + 90° + 90° + 90° + 90° = 420°$, ou seja, construção impossível. Pelo mesmo motivo, não existem ladrilhamentos desse padrão com dois triângulos. Eles têm que ter pelo menos três. Assim sendo, teremos: $180° + x + y = 360°$, ou, $x + y = 180°$. Logo, podemos concluir também que o ladrilhamento deverá ter padrão $(3,3,4,4,3)$ ou $(3,4,3,3,4)$ ou $(3,3,3,6,3)$.

Figura 5 – Triângulo: cinco polígonos ao redor do vértice.



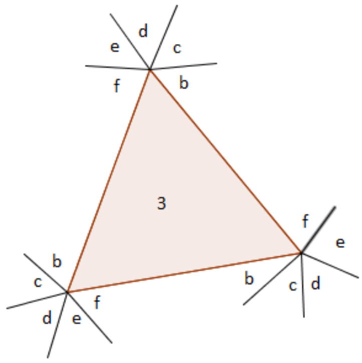

Fonte: Elaboração do autor.

### 2.1.4. Seis polígonos ao redor do vértice

Observe que, se dentre os demais polígonos não houver outro triângulo, cada um deles terá, no mínimo, quatro lados. Sendo assim, a soma dos ângulos internos será, no mínimo, igual a: $60° +$

$90° + 90° + 90° + 90° + 90° = 510°$, ou seja, construção impossível. Pelo mesmo motivo não existem ladrilhamentos desse padrão com dois, três, quatro ou cinco triângulos, eles têm que ter seis. Assim sendo, teremos: $6 \times 60° = 360°$. Logo, podemos concluir também que o ladrilhamento deverá ter padrão $(6{,}6{,}6{,}6{,}6{,}6)$ (Figura 6).

Figura 6 – Triângulo: seis polígonos ao redor do vértice.




Fonte: Elaboração do autor.

### *2.2.* Possibilidades com quadrados

#### 2.2.1. Três polígonos ao redor do vértice

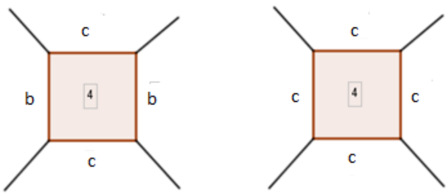
Se o ladrilhamento for feito com um quadrado, então teremos como padrão $(4, b, c)$, Figura 7, com $b = c$ ou $b \neq c$. Desta forma:

a) $b = c \Rightarrow 270° \div 2 = 135° \Rightarrow (4{,}8{,}8)$;

b) $b \neq c \Rightarrow 270° = 150° + 120° \Rightarrow (4{,}6{,}12)$.

Logo, podemos concluir que o ladrilhamento deverá ter padrão $(4{,}8{,}8)$ ou $(4{,}6{,}12)$.

Figura 7 – Quadrado: três polígonos ao redor do vértice.




Fonte: Elaboração do autor.

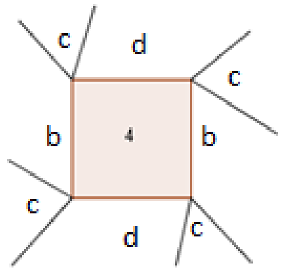
#### 2.2.2. Quatro polígonos ao redor do vértice

Se o ladrilhamento tem padrão $(4, b, c, d)$, então: $90° + x + y + z = 360°$, ou ainda, $x + y + z = 270°$. Como não há triângulos, temos, pelo menos, um outro quadrado. Atribuindo $x = 90°$, temos $y + z = 180°$, o que só será possível se $x = y = 90°$. Portanto, não há possibilidades para cinco ou mais polígonos ao redor do vértice, sendo um deles o quadrado.

No pentágono também teremos $a = b$, assim como em todos os polígonos formados por um número **ímpar** de lados. Neste caso: $360° - 108° = 252° \div 2 = 126°$. Portanto, não há nenhum ladrilhamento com o pentágono.

Observe que, a partir do hexágono, há a necessidade de uso de polígonos menores, em número de lados e ângulos internos que ele mesmo. Fim das possibilidades.

Figura 8 – Quadrado: quatro polígonos ao redor do vértice.




Fonte: Elaboração do autor.

O astrônomo Joannes Kepler (1580–1630) publicou, em 1619, uma obra chamada *Harmonices Mundi* (Harmonia do Mundo), nela explorou três aspectos: geometria, música e astronomia. Nesse escrito, apresentou o seguinte resultado, que resume a investigação (COELHO, 2014):

**Teorema de Kepler**: *Existem exatamente onze maneiras de se cobrir o plano utilizando-se exclusivamente polígonos regulares sujeitos às condições de bom comportamento.*

## 3. Metodologia

Para realizar a investigação, confeccionaram-se os polígonos regulares que seriam os “ladrilhos” dos possíveis ladrilhamentos no plano. A utilização de material concreto pode ser um estímulo à exploração e pode contribuir na elaboração de conjecturas para a aprendizagem. Ponte et al. (2006, p. 87), afirmam:

> Está hoje bastante difundido material manipulável diverso, adequado ao estudo de vários conceitos e relações geométricas como simetrias, pavimentações ou cortes em poliedros. Esse material constitui um importante ponto de partida que entusiasma os alunos a fazer explorações, apoia a obtenção de dados e a formulação de conjecturas.

A partir dessa etapa, iniciou-se a atividade de construção dos ladrilhamentos regulares. A primeira atividade foi “Investigue quais ladrilhos podem ser usados para ladrilhar o plano usando apenas um único tipo polígono regular. Explique cada descoberta usando a soma dos ângulos internos adjacentes a cada vértice.” A seguir, os alunos foram convidados a escrever o tipo de ladrilhamento em dada uma de suas descobertas, ou seja, o padrão de ladrilhamento.

Na sequência, os alunos foram desafiados a investigar se “há um limite máximo e mínimo de polígonos regulares ao redor de cada vértice de um ladrilhamento, e, neste caso, determiná-los.”

Neste momento, começaram a descobrir os ladrilhamentos com mais de um tipo de polígono regular. Com isso os alunos foram convidados a construir todos os ladrilhamentos possíveis no plano, de acordo com os resultados obtidos sobre a soma dos ângulos internos adjacentes de cada vértice, utilizando os ladrilhos confeccionados.

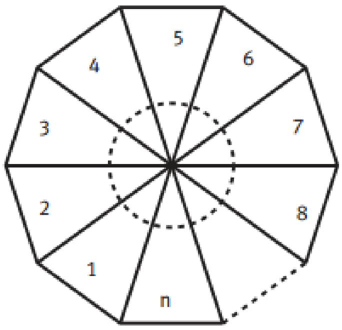
## 4. O contexto da aula

Como planejado, a proposta foi feita em grupo, cada grupo com quatro alunos. Os grupos foram previamente formados e também foi solicitado o material: folhas de papel colorido ou cartolina (uma cor para cada grupo), régua e tesoura.

Com os grupos já dispostos pela sala, foi retomado o conceito de polígonos regulares e foi decidido por qual polígono cada grupo se responsabilizaria, na construção dos ladrilhos. Cada grupo recebeu um molde de um ladrilho. Ao final da tarefa, um conjunto de polígonos regulares foi confeccionado, composto de: triângulos, quadrados, pentágonos, hexágonos, octógonos e dodecágonos.

Cada grupo foi desafiado a determinar a medida dos ângulos internos de cada ladrilho confeccionado. Dos sete grupos, cinco usaram o transferidor, os outros dois grupos partiram para o cálculo de cada ângulo pela "triangularização" dos polígonos construídos, conforme Figura 9.

Figura 9 - Polígono regular de $n$ lados particionado em $n$ triângulos congruentes.




Fonte: Elaboração do autor.

Os dois grupos que usaram esse procedimento foram convidados a explicar para a turma o raciocínio. Eles disseram: "Pegamos um ponto central do polígono e unimos com os vértices, assim temos os triângulos. Multiplicamos essa quantidade e multiplicamos por 180° depois diminuímos 360°, que é esse círculo interno, que não nos interessa". Essa partilha foi importante, pois os alunos demonstraram interesse e entendimento. Um dos alunos que explicava afirmou: "a quantidade de triângulos sempre é igual ao número de lados do polígono." Aproveitou-se esse momento para, dessa constatação, construir com a turma a fórmula do ângulo interno de um polígono. Foi solicitado que atribuíssem a variável $n$ ao número de triângulos, assim sendo:

$$\frac{(180°n - 360°)}{n} = \frac{180°(n-2)}{n} = 180°\left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

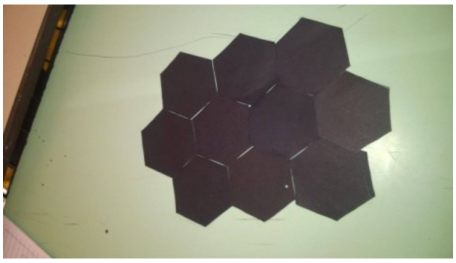
A tarefa seguinte foi descobrir quais ladrilhos poderiam ser usados para ladrilhar o plano usando apenas um único tipo de polígono regular. Cada descoberta foi argumentada usando a soma dos ângulos internos adjacentes a cada vértice. O registro foi feito pelo padrão de distribuição dos polígonos ao redor do vértice. Os ladrilhamentos feitos foram fotografados para o relatório final, com as atividades desenvolvidas na aula.

Os grupos concluíram que podemos ter, ao redor de cada vértice, um mínimo de 3 polígonos e um máximo de 6 polígonos regulares, sendo, neste último caso, o ladrilhamento regular de padrão $(3,3,3,3,3,3)$, o único existente. Constaram ainda que é impossível ladrilhar um plano usando apenas pentágonos regulares, pois ele não atende às regras, há sobreposições ou buracos no plano.

Na busca pelos ladrilhamentos regulares possíveis, os grupos seguiram o caminho do esgotamento das possibilidades, iniciando com três polígonos, depois quatro, cinco e, por último seis ao redor do vértice. Assim, o estudo dos ladrilhamentos no plano levou em conta a distribuição relativa dos ladrilhos e os ângulos internos dos polígonos envolvidos.

Os grupos foram testando todas as combinações possíveis de polígonos e, assim, determinaram todas as possibilidades dos ladrilhamentos no plano. A avaliação ocorreu através das observações feitas e do relatório final que foi entregue na aula seguinte. Nas figuras a seguir apresentam-se imagens do trabalho produzido por alguns grupos, e trechos dos relatórios entregues.

Figura 10 – Ladrilhamento produzido pelo Grupo A, padrão (6,6,6).



Fonte: Arquivo pessoal.

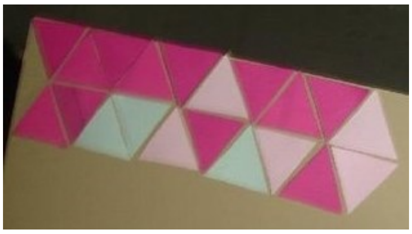
Comentário do Grupo A: “Três hexágonos formam um ladrilhamento regular, pois a soma dos ângulos em torno do vértice forma $360°$, sem precisar de qualquer outro ‘polígono’ para a expansão do ladrilhamento no plano. PADRÃO: (6,6,6)”.

Figura 11 – Ladrilhamento produzido pelo Grupo B, padrão (4,4,4,4).

Fonte: Arquivo pessoal.

Comentário do Grupo B: “É ladrilhamento regular, porque tem a mesma distribuição (quatro quadrados ao redor do vértice) com ângulos de $90°$, formando $360°$. PADRÃO: $(4,4,4,4)$”.

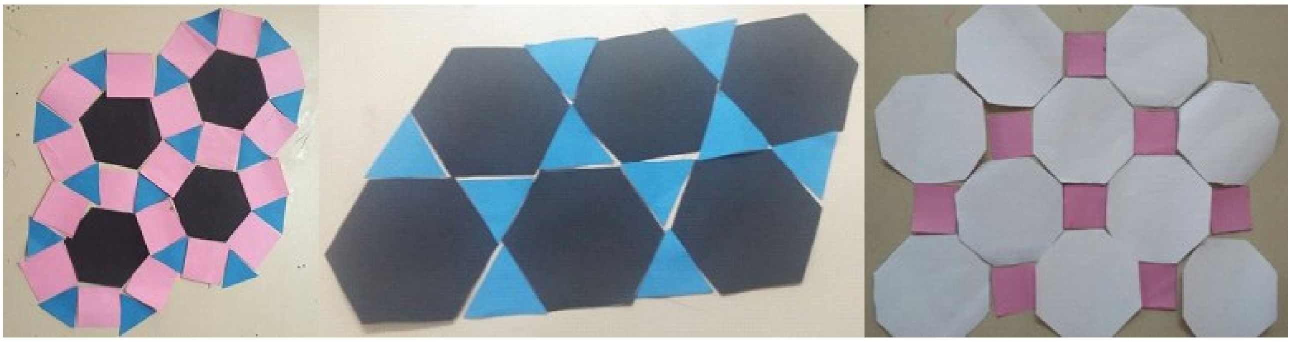
Figura 12 – Ladrilhamento produzido pelo Grupo C, padrão (3,3,3,3,3,3).



Fonte: Arquivo pessoal.

Comentário do Grupo C: “É ladrilhamento regular porque a soma dos seus SEIS ângulos de 60° forma uma volta completa $(360°)$, tornando o ladrilhamento regular. PADRÃO: (3,3,3,3,3,3)”.

Figura 13 – Ladrilhamentos produzido pelos grupos F (padrão (6,4,3,4)), D (padrão (6,3,6,3)) e G (padrão (8,8,4)), respectivamente.



Fonte: Arquivo pessoal.

## 5. Considerações finais

A utilização de materiais manipuláveis torna o processo de ensino mais interessante, visto que faz com que o aluno participe da construção do conhecimento, pois possibilita a visualização, a manipulação e a comparação, o que favoreceu o levantamento de conjecturas e a experimentação de hipóteses que antecederam as definições.

A motivação e as atitudes da turma permite afirmar que o uso de investigações geométricas proporcionou momentos de aprendizagem nos quais os alunos puderam criar e testar hipóteses, desenvolvendo as competências para intuir e deduzir a fim de encontrar respostas. Essas foram fomentadas por reflexões e discussões, na busca do esgotamento de possibilidades de ladrilhar um plano. Os alunos perceberam e construíram as regularidades, os padrões de ladrilhamento, chegando à conclusão de que são 11 as possibilidades de se ladrilhar um plano, utilizando-se, exclusivamente, polígonos regulares sujeitos às condições de bom comportamento.

O Teorema de Kepler ficou conhecido e reconhecido pela vivência da construção das possibilidades, os alunos perceberam a união possível entre a Matemática e a arte, o que contribuiu para estimular a aprendizagem e o gosto pela Matemática.

## Referências

ALVES, Sérgio; DALCIN, Mário. Mosaicos do plano. **Revista do Professor de Matemática**, v. 40, p. 3, 1999.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo padrões em mosaicos**. São Paulo: Atual, 1993.

COELHO, André. **Estudos dos polígonos por intermédio da pavimentação do plano**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Goiás, Regional Catalão, Departamento de Matemática, 2014.

CRESCENTI, Eliane Portalone. **Os professores de matemática e a geometria**: opiniões sobre a área e seu ensino. Tese (Doutorado). Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, UFSCar, 2006.

DIAS, Cláudio Carlos. **Desafio Geométrico**: módulo 1. Cuiabá: Central de Texto, 2013.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Mini Aurélio**: o dicionário da língua portuguesa. 8. ed. Curitiba, 2010.

MURARI, Claudemir; SANTOS, Marli Regina dos. Pavimentações do plano por polígonos regulares e visualização em caleidoscópios. In: **X Encontro Nacional de Educação Matemática, Educação Matemática Cultura e Diversidade**, Salvador, 2010. Disponível em: <http://www.lematec.net/CDS/ENEM10/artigos/MC/T12_MC1750.pdf>. Acesso em: 26 set. 2015.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

SANTOS, Marli Regina dos. **Pavimentações do plano**: um estudo com professores de matemática e artes. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual Paulista, Campus de Rio Claro, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2006.

SILVA, E. A.; LOURENÇO, M. L; MARTINS, L. C. J. Uma introdução à pavimentação arquimediana do plano. **Boletim de Educação Matemática**, ano 9, n. 10, p. 53-66, 1994.

VRECCHI, Rosângela Aparecida da Cunha. Das artes às embalagens: buscando caminhos para aprender Geometria. In: Secretaria da Educação. Governo do estado do Paraná. **O professor PDE e os desafios da escola pública paranaense**, 2012. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2012/2012_uem_mat_artigo_rosangela_aparecida_da_cunha_vrecchi.pdf>. Acesso em: 29 set. 2015.