



REMAT

Revista Eletrônica da Matemática

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul



Interpolação por splines cúbicos paramétricos no Maple para a segmentação do contorno do ventrículo esquerdo humano

José Sérgio Domingues
Instituto Federal de Minas Gerais (IFMG), Formiga, MG, Brasil
sergio.domingues@ifmg.edu.br

Resumo

O coração humano é dividido em quatro câmaras: átrio direito, ventrículo direito, átrio esquerdo e ventrículo esquerdo. Através de um incrível processo de sincronia elas recebem e impulsionam o sangue para ser oxigenado e para levar oxigênio a todas as células do corpo. Muitas doenças cardíacas podem ter seu diagnóstico realizado de forma mais satisfatória a partir de uma análise detalhada do contorno do ventrículo esquerdo. Existem vários métodos de segmentação desse contorno, desde manual até complexas implementações computacionais que realizam esse trabalho de forma semiautomática e que são fortemente dependentes de um modelamento matemático. O objetivo desse artigo é mostrar o ajuste que o método numérico de splines cúbicos paramétricos apresenta na segmentação do contorno do ventrículo esquerdo humano. Para isso, faz-se uma breve introdução do funcionamento do coração e do método de interpolação por splines cúbicos paramétricos através do *software* Maple. Utilizou-se uma imagem real do contorno ventricular, que foi colocada no plano cartesiano, e se fez a escolha de 26 pontos nos contornos superior e inferior, obtendo-se em seguida suas coordenadas. Fez-se também a divisão do intervalo de variação do parâmetro t em 25 subintervalos de mesmo comprimento. Com isso, obtiveram-se todos os dados necessários para a determinação dos splines. Os resultados obtidos mostram que o método matemático utilizado pode ser eficiente na modelagem do contorno ventricular esquerdo, concluindo que essa aplicação pode ser mais uma possibilidade de melhoria dos métodos já existentes, mostrando a importância que a Matemática tem ao ser aplicada em outras áreas do conhecimento humano.

Palavras-chave: Splines Cúbicos Paramétricos. Modelagem Matemática. Métodos Numéricos. Ventrículo Esquerdo.

Abstract

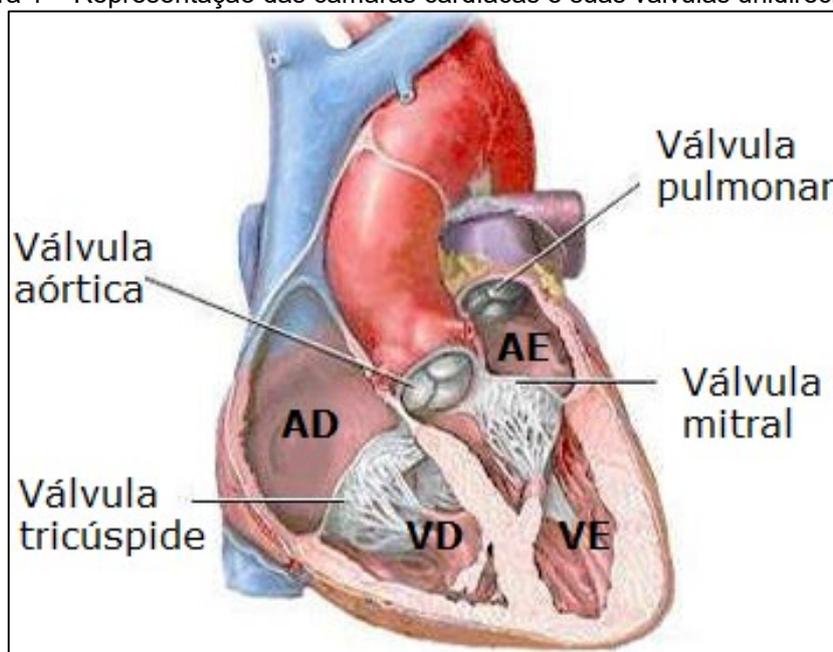
The human heart is divided in four chambers: right atrium, right ventricle, left atrium and left ventricle. Through an amazing process of sync, they receive and drive the blood to be oxygenated and to deliver oxygen to all the body cells. Many heart diseases may be diagnosed more satisfactorily from a detailed analysis of the left ventricular contour. There are many methods of this contour segmentation, from manual to complex computer implementations that perform this work in a semi-automatic manner and that are strongly dependent on a mathematical modeling. The aim of this article is to show the adjustment the numerical method of parametric cubic spline has presented in the contour segmentation of the human left ventricle. Thus, it is presented a brief introduction of the functioning of the heart and the interpolation method by parametric cubic splines by Maple software. It is used a real image of the ventricular contour, which is placed in the Cartesian Plane, and it makes the choice of 26 points in the upper and lower contours, getting then their coordinates. Also make up the subdivision of the range of the variation of t parameter in 25 subintervals of equal length. Therefore, all the necessary data to determine the splines are obtained. The results show that the mathematical method can be effective in modeling the left ventricular contour, concluding that this application may be one more possibility of improving existing methods, showing the importance that Mathematics may have when applied in other areas of human knowledge.

Keywords: Parametric Cubic Spline. Mathematical Modeling. Numerical Methods. Left Ventricle.

1. Introdução

O coração humano é composto por quatro câmaras, denominadas átrio direito (AD), ventrículo direito (VD), átrio esquerdo (AE) e ventrículo esquerdo (VE). A passagem do sangue por essas câmaras e também para a sua entrada e saída do coração é feita em um incrível processo de sincronia que conta com o importante controle de válvulas unidirecionais, denominadas válvulas aórtica, pulmonar, tricúspide e mitral. As válvulas mitral e tricúspide se encontram abertas na diástole (período de relaxamento do músculo cardíaco), para que ocorra a passagem de sangue dos átrios para os ventrículos. Quando ocorre a contração dos ventrículos, ou seja, na sístole cardíaca, essas válvulas se fecham, impedindo o refluxo do sangue. Para que a passagem de sangue para os pulmões e também para a circulação sistêmica ocorra de forma adequada, entram em ação as válvulas pulmonar e aórtica, também conhecidas como válvulas semilunares. É na sístole que ocorre a abertura dessas válvulas, permitindo que o fluxo sanguíneo seja expulso do coração para a circulação pulmonar, com a finalidade de se efetuar a oxigenação sanguínea, e para a circulação sistêmica, que é responsável por levar sangue rico em oxigênio e nutrientes, do VE através da Artéria Aorta, ao corpo inteiro (FEIJÓ, 2007; GUYTON, 2012; PINHEIRO, 2012; DOMINGUES *et al.*, 2013). A representação dessas câmaras e válvulas é apresentada na Figura 1.

Figura 1 – Representação das câmaras cardíacas e suas válvulas unidirecionais.



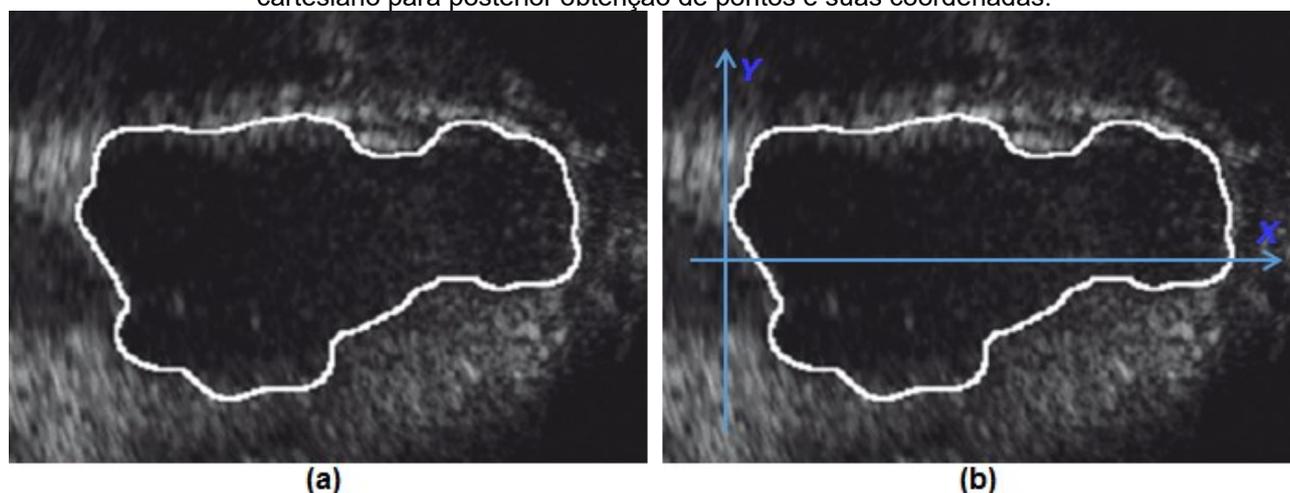
Fonte: Adaptado de <http://www.auladeanatomia.com/cardiovascular/coracao.htm>.

Muitas doenças cardíacas podem ter seu diagnóstico realizado de forma mais satisfatória a partir de uma análise detalhada do contorno do ventrículo esquerdo, pois essa câmara é uma das mais afetadas por uma grande quantidade de doenças, que alteram seu tamanho normal e sua

geometria original (REIS, 2007). As formas de obtenção desse contorno são denominadas métodos de segmentação. Atualmente existem vários métodos de segmentação, desde manual até complexas implementações computacionais que realizam esse trabalho de forma semiautomática ou automática, com a finalidade de evitar subjetividades que podem ocorrer manualmente. No caso das segmentações que envolvem recursos computacionais, o modelamento matemático é fundamental para a realização dessa tarefa. Com o uso de imagens bidimensionais vários parâmetros importantes para a determinação da qualidade cardíaca podem ser determinados, entre eles destacam-se o volume e a área do VE durante a diástole e sístole finais. Sendo assim, uma adequada segmentação da cavidade ventricular se faz necessária (ANDRADE *et al.*, 2004; ANDRADE *et al.*, 2006; SILVA JÚNIOR *et al.*, 2010).

Exemplos da utilização de segmentação podem ser obtidos nos trabalhos de Andrade *et al.* (2006) e de Melo Júnior *et al.* (2010). A Figura 2 mostra uma segmentação automática.

Figura 2 – Resultado de uma segmentação automática em (a) e em (b) essa segmentação inserida no plano cartesiano para posterior obtenção de pontos e suas coordenadas.



Fonte: Adaptado de Andrade *et al.* (2006).

O objetivo desse artigo é apresentar a utilização do método de splines cúbicos paramétricos a partir do *software* Maple¹, versão 13, para a tarefa de segmentação do ventrículo esquerdo humano, baseando-se não na determinação de um alto número de pontos desse contorno, mas na obtenção de um pequeno e suficiente número de pontos, que possam determinar curvas que representem bem o contorno desejado.

A escolha desse método veio do fato de os splines cúbicos apresentarem baixo custo computacional em relação aos métodos de segmentação baseados em Heurísticas computacionais e por esse método ser notadamente conhecido por se ajustar bem a um conjunto de dados que precisam de interligações suaves e sem grandes oscilações, o que já permite descartar a utilização de interpolação polinomial com polinômios de grau elevado. Além disso, pela geometria normal do VE, percebe-se que interpolações lineares não são adequadas, pois

¹ Endereço para acesso à página oficial do *software* Maple: <https://www.maplesoft.com/products/maple/>.

cada interpolação será feita por um segmento de reta, descaracterizando assim a geometria ventricular.

Mas por que usar splines cúbicos de forma paramétrica? A resposta a essa pergunta pode ser compreendida facilmente com uma rápida análise da Figura 2. Observa-se que mesmo ao se colocar a região segmentada no plano cartesiano, nem o contorno superior e nem o inferior ao eixo X representam funções $x \rightarrow f(x)$, bastando-se para isso, aplicar o teste das retas verticais, pois em ambos os contornos é possível obter pontos que são imagens de um mesmo x_i em X. Sendo assim, não é possível obter funções $x \rightarrow f(x)$ e $x \rightarrow g(x)$ que sejam representadas pelos contornos completos, superior e inferior, respectivamente, fazendo com que uma interpolação paramétrica seja uma opção para evitar essa impossibilidade.

2. Fundamentação teórica para o método de interpolação utilizado

2.1. Curvas planas parametrizadas

Quando uma curva plana C não pode ser descrita por uma equação do tipo $y = f(x)$, uma forma de representá-la é fazer com que seus pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sejam dados em função de uma terceira variável t , denominada *parâmetro*. Sendo assim, deve-se ter $x = x(t)$ e $y = y(t)$, que são denominadas *equações paramétricas* de C . Então, cada valor de t determina um ponto no plano e quando t varia o ponto $(x(t), y(t))$ varia, traçando a curva C , que geralmente é denominada por *curva parametrizada* (STEWART, 2011; PINTO; MORGADO, 2005).

De maneira geral, em \mathbb{R}^2 é possível definir uma curva parametrizada da seguinte forma:

Definição: Seja um intervalo conexo $I \subset \mathbb{R}$. Uma curva parametrizada diferenciável de todas as ordens, no plano, é uma aplicação $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ que para cada $t \in I$ associa $\alpha(t) = (x(t), y(t))$.

O conjunto $\alpha(I) = \{(x(t), y(t)); t \in I\}$, que é a imagem da função α , é denominado traço da curva (TENENBLAT, 2008; CARMO, 2010).

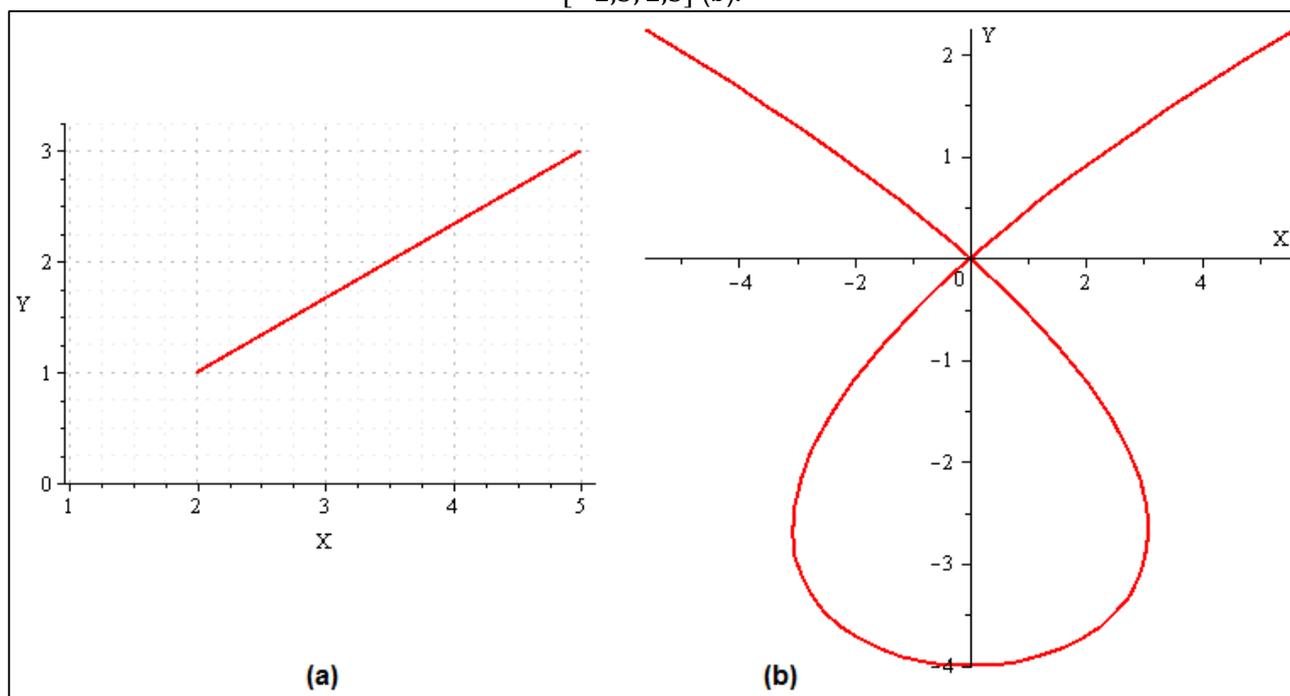
É comum se interpretar o parâmetro t como tempo e $(x(t), y(t))$ como a posição de um ponto no instante t , que se desloca no plano. A curva α é a trajetória descrita pelo ponto. Sendo assim, é possível se obter mais de um par de equações paramétricas para uma curva, já que um percurso pode ser feito de várias formas. Além disso, se o parâmetro t varia no intervalo $[a, b]$, segue que $(x(a), y(a))$ e $(x(b), y(b))$ representam, respectivamente, o ponto inicial e o ponto final da curva, indicando que ela pode ser tratada de forma orientada. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1: Uma parametrização do segmento de reta orientado de origem $A = (x_1, y_1)$ e término em $B = (x_2, y_2)$ é $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, sendo que $x(t) = x_1(1 - t) + x_2t$ e $y(t) = y_1(1 - t) +$

y_2t , com $t \in [0, 1]$ (LIMA, 2008). Logo, se $A = (2,1)$ e $B = (5,3)$, por exemplo, segue que $x(t) = 3t + 2$ e que $y(t) = 2t + 1$ sendo que $0 \leq t \leq 1$. A Figura 3 (a) apresenta o traço do segmento AB.

Exemplo 2: O traço da curva parametrizada α , dada por $\alpha(t) = (t^4 - 4t, t^2 - 4)$ é apresentado na Figura 3 (b). Observa-se que, nesse caso, o traço da curva não representa uma função $x \rightarrow f(x)$, o que significa que seria impossível obter uma representação do tipo $y = f(x)$ para essa curva, tornando a representação paramétrica muito útil.

Figura 3 – Traço da curva $\alpha(t) = (3t + 2, 2t + 1)$ com $t \in [0, 1]$, que é uma parametrização do segmento de reta de origem em $A = (2,1)$ e extremo $B = (5,3)$ (a). Traço da curva $\alpha(t) = (t^4 - 4t, t^2 - 4)$ para $t \in [-2,5; 2,5]$ (b).



Fonte: Visualização no Maple.

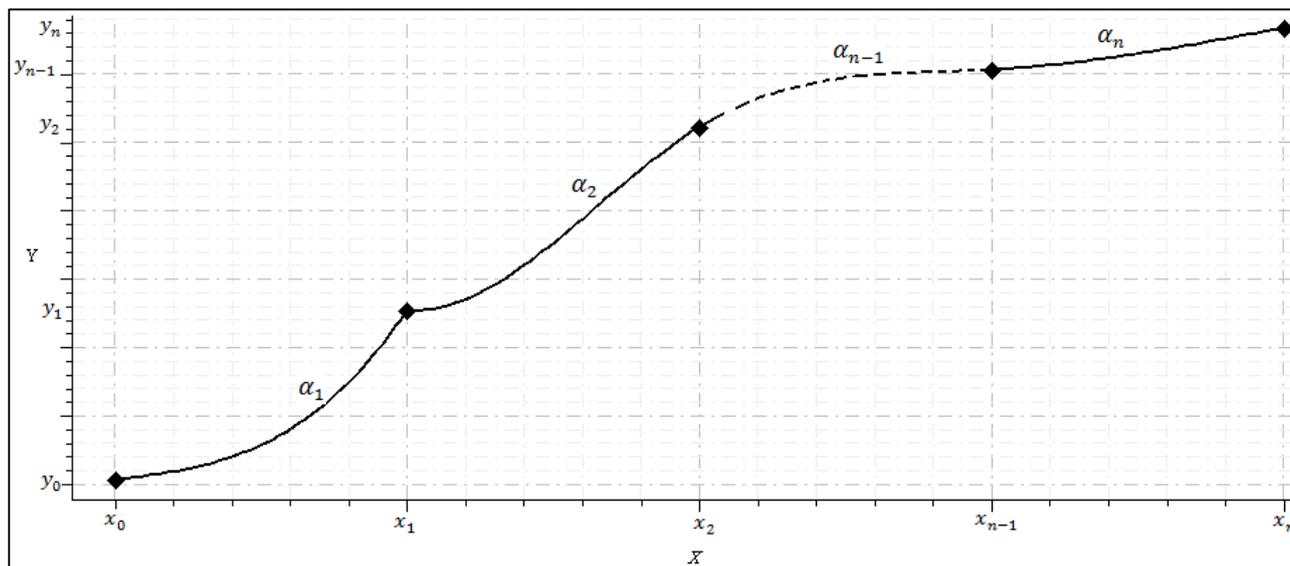
2.2. Splines cúbicos paramétricos e sua obtenção no Maple

Suponha-se que sejam conhecidas as coordenadas (x_i, y_i) de $(n + 1)$ pontos em \mathbb{R}^2 , igualmente espaçados no eixo X. Um segmento de spline cúbico paramétrico que interpola os pontos consecutivos (x_i, y_i) e (x_{i+1}, y_{i+1}) , com $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, é uma cúbica em função do parâmetro $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$, descrita por

$$\begin{aligned} \alpha_j(t) &= \left(\sum_{i=1}^4 a_i t^{i-1}, \sum_{i=1}^4 b_i t^{i-1} \right) \\ &= (a_{1j} + a_{2j}t + a_{3j}t^2 + a_{4j}t^3, b_{1j} + b_{2j}t + b_{3j}t^2 + b_{4j}t^3), \end{aligned}$$

sendo que α_j , com $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, representa a cúbica paramétrica com início em (x_{j-1}, y_{j-1}) e término em (x_j, y_j) , conforme se observa na Figura 4.

Figura 4 – Representação de um spline cúbico paramétrico genérico para um conjunto com $(n + 1)$ pontos em \mathbb{R}^2 .



Fonte: Visualização no Maple.

A equação a seguir, aqui considerando que o intervalo total do parâmetro t é $[0, 1]$ define um spline cúbico paramétrico para esse conjunto genérico de $(n + 1)$ pontos em \mathbb{R}^2 , onde cada uma de suas partes será parametrizada no intervalo $\left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]$, conforme descrito nessa equação.

$$\alpha(t) = \begin{cases} (a_{11} + a_{21}t + a_{31}t^2 + a_{41}t^3, & b_{11} + b_{21}t + b_{31}t^2 + b_{41}t^3), & t \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ (a_{12} + a_{22}t + a_{32}t^2 + a_{42}t^3, & b_{12} + b_{22}t + b_{32}t^2 + b_{42}t^3), & t \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \\ \vdots & \vdots \\ (a_{1n} + a_{2n}t + a_{3n}t^2 + a_{4n}t^3, & b_{1n} + b_{2n}t + b_{3n}t^2 + b_{4n}t^3), & t \in \left[\frac{n-1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

A forma de obtenção dos coeficientes a_{ij} e b_{ij} é consequência das condições extras, ou condições de fronteira, que um spline cúbico paramétrico deve ter. Elas podem ser obtidas detalhadamente em Hughes (1990), Arnand (1993), Farin (1997) e Amirouche (2004).

O Maple, versão 13, permite apresentar esse tipo de parametrização. Uma forma simples de obtê-la é apresentada no Exemplo 3.

Exemplo 3: Para os pontos $A = (1; 1)$, $B = (2; 2,5)$, $C = (3; 2,25)$ e $D = (3,5; 2,75)$ do plano, o spline cúbico paramétrico obtido no Maple, considerando o parâmetro t variando em $[0, 1]$, pode ser obtido declarando-se o vetor X das coordenadas das abscissas dos pontos, ou seja:

$$> X = [1, 2, 3, 3.5]:$$

Em seguida, declara-se o vetor Y com os valores das ordenadas dos pontos:

$$> Y := [1, 2.5, 2.25, 2.75]:$$

Como se têm 4 pontos, segue que $n + 1 = 4$, ou seja, $n = 3$. Logo, $j \in \{1, 2, 3\}$ e, por isso, o intervalo $[0, 1]$ deve ser subdividido em 3 intervalos seguindo a relação $\left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]$, que são: $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Esses intervalos podem ser representados pelo conjunto de pontos declarados da seguinte forma:

$$> T := \left[0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right]:$$

Declara-se então o comando a seguir, para que o Maple utilize os vetores T e X para obter a parametrização referente ao eixo das abscissas do spline cúbico paramétrico:

$$> Xt := \text{spline}(T, X, t, 3);$$

Da mesma forma, para a parametrização referente ao eixo das ordenadas usa-se o comando a seguir, sendo que os resultados obtidos para Xt e Yt podem ser visualizados na Figura 5.

$$> Yt := \text{spline}(T, Y, t, 3);$$

Figura 5 – Resultados obtidos no Maple, versão 13, para as parametrizações Xt e Yt do spline cúbico paramétrico que interpola os pontos A, B, C e D.

$$Xt := \begin{cases} 1. + 2.89999999999999990 t + 0.9000000000699999969 t^3 & t < \frac{1}{3} \\ 0.933333333 + 3.20000000000000016 t + 0.900000000480000062 \left(t - \frac{1}{3}\right)^2 - 4.50000000300000025 \left(t - \frac{1}{3}\right)^3 & t < \frac{2}{3} \\ 1.466666667 + 2.29999999999999982 t - 3.60000000102000016 \left(t - \frac{2}{3}\right)^2 + 3.60000000000000008 \left(t - \frac{2}{3}\right)^3 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$Yt := \begin{cases} 1. + 6.04999999999999982 t - 13.949999999999994 t^3 & t < \frac{1}{3} \\ 2.033333333 + 1.39999999999999990 t - 13.9500000042900024 \left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + 22.500000000000000 \left(t - \frac{1}{3}\right)^3 & t < \frac{2}{3} \\ 2.516666667 - 0.400000000999999994 t + 8.55000000321000008 \left(t - \frac{2}{3}\right)^2 - 8.55000000300000096 \left(t - \frac{2}{3}\right)^3 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Fonte: Visualização no Maple.

Antes de construir o gráfico do spline cúbico paramétrico que interpola os quatro pontos dados nesse exemplo, pode-se facilitar a sua construção fazendo com que as partes correspondentes de Xt e Yt fiquem agrupadas de acordo com seus respectivos intervalos de parametrização. Para isso, basta usar os seguintes comandos:

$$> \text{alfa1} := \left[Xt, Yt, t = 0.. \frac{1}{3}\right]:$$

$$> \text{alfa2} := \left[Xt, Yt, t = \frac{1}{3}.. \frac{2}{3}\right]:$$

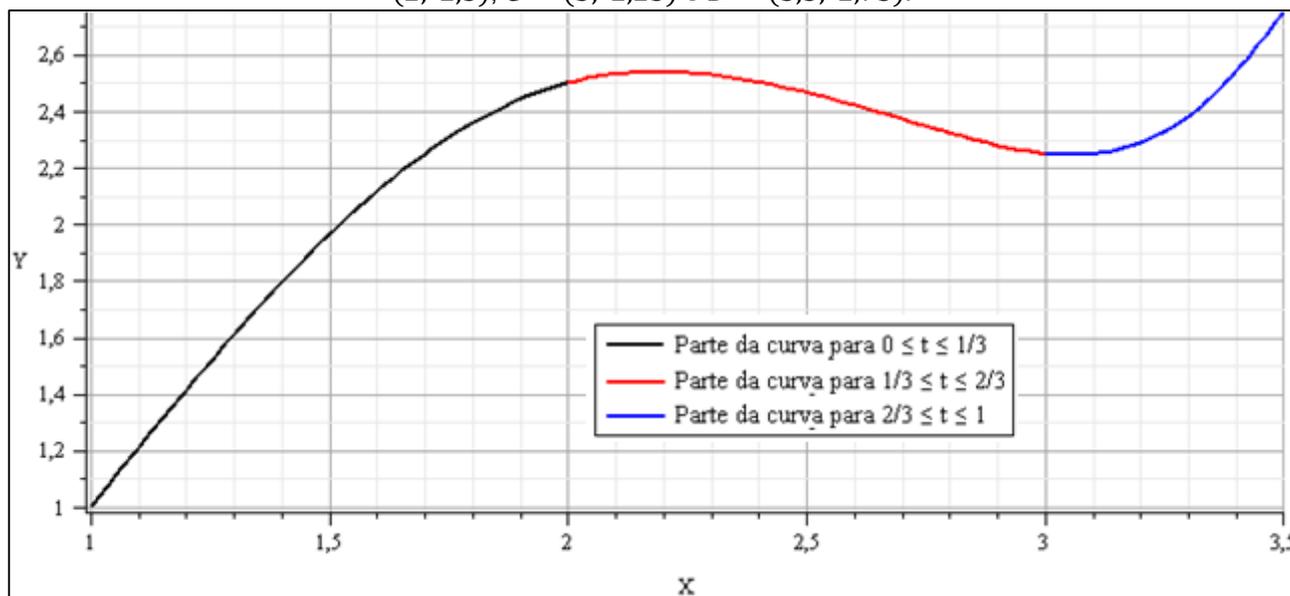
$$> \text{alfa3} := \left[X_t, Y_t, t = \frac{2}{3}..1 \right];$$

Finalizando, constrói-se facilmente o gráfico da curva procurada com o comando:

$$> \text{plot}(\{\text{alfa1}, \text{alfa2}, \text{alfa3}\});$$

O resultado é apresentado na Figura 6, onde percebe-se que a curva obtida realmente interpola entre dois pontos consecutivos na ordem dada.

Figura 6 – Traço do spline cúbico paramétrico obtido para a interpolação dos pontos $A = (1; 1)$, $B = (2; 2,5)$, $C = (3; 2,25)$ e $D = (3,5; 2,75)$.



Fonte: Visualização no Maple.

3. Metodologia

Nesse trabalho, não há preocupação com as dimensões reais de um VE humano, mas sim com as dimensões da imagem impressa, já que o objetivo não é reproduzir o contorno do VE em tamanho real, mas sim, observar se os splines cúbicos paramétricos são capazes de reproduzir a geometria desse contorno de maneira satisfatória.

Sendo assim, para obter o spline procurado para um contorno ventricular esquerdo humano, a imagem apresentada em Andrade *et al.* (2006) foi impressa por uma impressora Epson XP-214 e colocada no plano cartesiano manualmente, da forma apresentada na Figura 2 (b), sendo que o eixo das abscissas foi inserido paralelamente aos lados maiores da figura e de forma que intersectasse o ponto médio aórtico (que é o ponto central da válvula aórtica, a qual fica na saída do VE). Já o eixo das ordenadas foi inserido perpendicularmente ao eixo das abscissas, de forma que tocasse o ponto mais à esquerda da imagem.

Posteriormente, na Figura 2 (b), foram escolhidos visualmente 26 pontos do contorno superior e outros 26 pontos do contorno inferior, e suas respectivas coordenadas foram obtidas utilizando uma régua milimetrada. Para declarar as abscissas, superior e inferior, respectivamente, foram construídos os vetores $X1$ e $X2$. Da mesma forma, a declaração das ordenadas dos pontos

dos contornos superior e inferior, foram respectivamente descritas pelos vetores $Y1$ e $Y2$. Além disso, para fazer-se a correspondência entre as coordenadas obtidas e o parâmetro t , o intervalo $[0,1]$ foi subdividido em 25 subintervalos de mesmo passo, gerando um vetor T de 26 coordenadas paramétricas. Todos esses vetores podem ser observados na Figura 7.

Figura 7 – Coordenadas obtidas para os contornos superior e inferior, e também para o intervalo do parâmetro t , com base na imagem apresentada na Figura 2 (b).

$$\begin{aligned}
 &> X1 := \left[\frac{4}{10}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}, 0, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{9}{10}, \frac{5}{4}, \frac{17}{10}, 2, \frac{12}{5}, \frac{11}{4}, \frac{61}{20}, \frac{13}{4}, \frac{345}{100}, \frac{19}{5}, \frac{41}{10}, \frac{43}{10}, \frac{19}{4}, \frac{51}{10}, \frac{28}{5}, \frac{29}{5}, \frac{59}{10}, 6 \right]; \\
 &> X2 := \left[\frac{4}{10}, \frac{45}{100}, \frac{1}{2}, \frac{4}{10}, \frac{1}{2}, \frac{9}{10}, \frac{115}{100}, \frac{7}{5}, \frac{175}{100}, \frac{21}{10}, \frac{12}{5}, \frac{27}{10}, \frac{29}{10}, \frac{292}{100}, \frac{305}{100}, \frac{33}{10}, \frac{365}{100}, \frac{39}{10}, \frac{21}{5}, \frac{445}{100}, \frac{47}{10}, \frac{505}{100}, \frac{535}{100}, \frac{565}{100}, \frac{585}{100}, 6 \right]; \\
 &> Y1 := \left[0, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{7}{10}, \frac{19}{20}, \frac{11}{10}, \frac{7}{5}, \frac{17}{10}, \frac{17}{10}, \frac{17}{10}, \frac{33}{20}, \frac{17}{10}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \frac{17}{10}, \frac{3}{2}, \frac{33}{25}, \frac{13}{10}, \frac{13}{10}, \frac{3}{2}, \frac{33}{20}, \frac{29}{20}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 0 \right]; \\
 &> Y2 := \left[0, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{5}, -\frac{7}{10}, -\frac{98}{100}, -\frac{115}{100}, -\frac{6}{5}, -\frac{148}{100}, \frac{3}{2}, -\frac{145}{100}, -\frac{145}{100}, -\frac{145}{100}, -\frac{125}{100}, -\frac{98}{100}, -\frac{85}{100}, -\frac{78}{100}, -\frac{63}{100}, -\frac{42}{100}, -\frac{28}{100}, -\frac{28}{100}, -\frac{3}{10}, -\frac{35}{100}, -\frac{35}{100}, -\frac{35}{100}, -\frac{18}{100}, 0 \right]; \\
 &> T := \left[0, \frac{1}{25}, \frac{2}{25}, \frac{3}{25}, \frac{4}{25}, \frac{5}{25}, \frac{6}{25}, \frac{7}{25}, \frac{8}{25}, \frac{9}{25}, \frac{10}{25}, \frac{11}{25}, \frac{12}{25}, \frac{13}{25}, \frac{14}{25}, \frac{15}{25}, \frac{16}{25}, \frac{17}{25}, \frac{18}{25}, \frac{19}{25}, \frac{20}{25}, \frac{21}{25}, \frac{22}{25}, \frac{23}{25}, \frac{24}{25}, 1 \right];
 \end{aligned}$$

Fonte: Visualização no Maple.

Em seguida foram usados os comandos:

$> X1t := \text{spline}(T, X1, t, 3);$

$> Y1t := \text{spline}(T, Y1, t, 3);$

$> X2t := \text{spline}(T, X2, t, 3);$

$> Y2t := \text{spline}(T, Y2, t, 3);$

para se obter os splines cúbicos paramétricos $\alpha(t) = (X1t, Y1t)$ e $\beta(t) = (X2t, Y2t)$, para os contornos superior e inferior, nessa ordem.

Fazendo $> G1 := \text{plot}([X1t, Y1t, t = 0..1])$ e $> G2 := \text{plot}([X2t, Y2t, t = 0..1])$, o gráfico das duas curvas pode ser plotado pelo comando:

$> \text{plots}[display]([G1, G2]);$

que permite a obtenção da curva interpoladora parametrizada por splines cúbicos que representa o contorno ventricular esquerdo humano, para a imagem considerada. Para cada um desses comandos (que foram implementados em um notebook Dell Inspiron 14 com processador Intel CORE i7), foi determinado o tempo de CPU com o comando

$> \text{tempoCPU}i := \text{time}();$

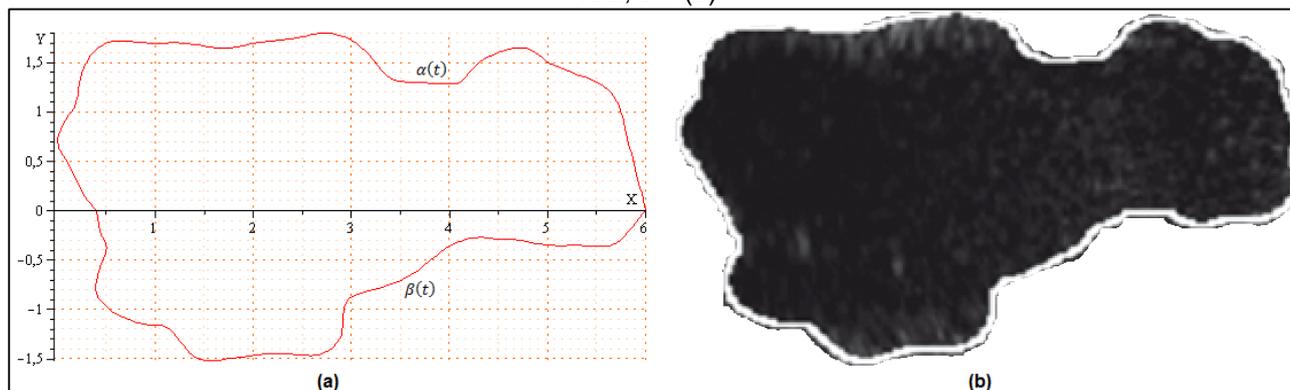
4. Resultados e discussão

O tempo computacional, total, registrado para a execução de todos os comandos utilizados foi de 8,649 segundos.

Como resultado da parametrização feita, o último comando apresentado na seção anterior permitiu a construção do gráfico apresentado na Figura 8 (a). Ele representa a união dos traços

das parametrizações obtidas e que interpolam os pontos considerados nos contornos superior e inferior, descritas respectivamente por $\alpha(t) = (X1t, Y1t)$ e $\beta(t) = (X2t, Y2t)$, sendo que cada um desses traços representa a junção de 25 curvas parametrizadas pelo parâmetro t em um determinado intervalo de passo $1/25$.

Figura 8 – Comparação entre o gráfico que representa as parametrizações realizadas, em (a), e o contorno real, em (b).



Fonte: Elaboração do autor em (a) e uma adaptação de Andrade *et al.* (2006) em (b).

Percebe-se uma grande semelhança entre o gráfico da parametrização obtida e o contorno real utilizado, o que mostra que os splines cúbicos paramétricos podem se adaptar bem quando utilizadas para se fazer a segmentação do contorno ventricular humano.

As pequenas diferenças entre as duas imagens da Figura 8 podem ser justificadas pela quantidade de pontos analisados e também pela localização de alguns desses pontos. Por exemplo, os pontos do contorno que representam mudança de concavidade das curvas são muito importantes, pois determinam com mais precisão a geometria do contorno. Logo, se algum desses pontos não for considerado, é possível que a geometria obtida pela parametrização não represente tão fielmente o contorno original.

5. Considerações finais

Este trabalho apresenta uma aplicação para o método de interpolação por splines cúbicos paramétricos. O ajuste obtido em comparação com o contorno original deixa claro que o método utilizado, se for estudado com mais detalhes em trabalhos futuros e também implementado computacionalmente para deixar o processo de obtenção dos splines e dos gráficos pelo menos semiautomático, pode ser útil em aplicações médicas e, com isso, servir para auxiliar na melhoria da precisão na obtenção de alguns parâmetros clínicos importantes relacionados às dimensões e geometria do VE, facilitando o diagnóstico de doenças e seu tratamento.

Além disso, este trabalho também permite uma visão mais ampla das possíveis aplicações da Matemática em outras áreas do conhecimento humano, em especial na cardiologia, onde pouquíssimos estudantes de Matemática tanto da licenciatura quanto do bacharelado, e até mesmo matemáticos experientes, conseguem imaginar essa interseção de áreas. Portanto, ele

pode servir como divulgador dessa aplicação e, conseqüentemente, como um motivador para que mais estudantes percebam que existe uma vasta gama de possibilidades de pesquisa na área de Matemática Aplicada.

Referências

AMIROUCHE, F. M. **Principles of computer-aided design and manufacturing**. 2. ed. Prentice Hall, 2004.

ANDRADE, M. M.; MACCHIAVELLO, B.; NASCIMENTO, F. A. de O.; ROCHA, A. F. da; CARVALHO, H. S.; VASCONCELOS, D. F. Segmentação automática do ventrículo esquerdo em imagens de ecocardiografia bidimensional. In: CONGRESSO LATINO-AMERICANO DE ENGENHARIA BIOMÉDICA, 3., 2004, João Pessoa. **Anais do III Congresso Latino-Americano de Engenharia Biomédica**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Engenharia Biomédica, 2004.

ANDRADE, M. M. de; ESPINOZA, B. L. M.; NASCIMENTO, F. A. de O.; ROCHA, A. F. da. Algoritmo híbrido para segmentação do ventrículo esquerdo em imagens de ecocardiografia bidimensional. **Revista Brasileira de Engenharia Biomédica**, v. 22, n. 1, p. 23-33, abr. 2006.

ARNAND, V. B. **Computer graphics and geometric modeling for Engineers**. John Wiley, 1993.

CARMO, M. P. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. 4 ed. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Textos Universitários, 2010.

DOMINGUES, J. S., BARBOSA, M. P., VALE, M. P. Mathematical model for partial ventriculectomy. In: PORTUGUESE BIOENGINEERING MEETING, 3., 2013, Braga, Portugal. **Anais do 3rd Portuguese Bioengineering Meeting**. Braga: Universidade do Minho, 2013.

FARIN, G. **Curves and Surfaces for CAGD: a practical guide**. Academic Press, 1997.

FEIJÓ, V. **Modelagem do fluxo sanguíneo na aorta abdominal utilizando interação fluido-estrutura**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2007.

GUYTON, A. C.; HALL, J. E. **Tratado de fisiologia médica**. 12. ed. Elsevier, 2012.

HUGHES, J. F.; DAM, A. V.; MCGUIRE, M.; SKLAR, D. F.; FOLEY, J. D.; FEINER, S. K.; AKELEY, K. **Computer graphics: principles and practice**. 3. ed. Addison-Wesley, 1990.

LIMA, E. L. **Curso de análise**. v. 2. 10 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

MELO JÚNIOR, S. A.; MACCHIAVELLO, B.; ANDRADE, M. M.; CARVALHO, J. L. A.; CARVALHO, H. S.; VASCONCELOS, D. F.; BERGER, P. A.; ROCHA, A. F.; NASCIMENTO, F. A. O. Semi-automatic algorithm for construction of the left ventricular area variation curve over a complete cardiac cycle. **Biomedical Engineering OnLine**, v. 9, n. 5, p. 1-12, 2010.

PINHEIRO, P. Mitral valve prolapse: symptoms and treatment. **MD Saúde**, 2012.

PINTO, D.; MORGADO, M. C. F. **Cálculo diferencial e integral de funções de várias variáveis**. 3. ed. Rio de Janeiro: UFRJ, 2005.

REIS, M. C. **Detecção semiautomática da borda do ventrículo esquerdo**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Universidade de Brasília, Brasília, 2007.

SILVA JÚNIOR, J. A. C.; CAVALCANTE, T. S.; ALEXANDRIA, A. R.; ABREU, J. S. Análise da segmentação do ventrículo esquerdo em imagens digitais de ecocardiograma por diferentes métodos de contornos ativos. In: CONGRESSO DE PESQUISA E INOVAÇÃO NORTE NORDESTE DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA, 5., 2010, Maceió. **Anais do V Congresso de Pesquisa e Inovação Norte Nordeste de Educação Tecnológica**. Rede Norte Nordeste de Educação Profissional e Tecnológica, Secretaria de Educação Tecnológica, 2010.

STEWART, J. **Cálculo**. v. 2. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

TENENBLAT, K. **Introdução à geometria diferencial**. 2 ed. São Paulo: Edgar Blucher, 2008.