REMAT
Revista Eletrônica da Matemática
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul

Recorte de resultados de formação continuada desenvolvida com professores acerca de práticas relacionadas à resolução de problemas de contagem

Paulo Jorge Magalhães Teixeira
Universidade Federal Fluminense (UFF), Niterói, RJ, Brasil
paulojorge@id.uff.br

Resumo
Este trabalho é o recorte de uma situação-problema que foi proposta em uma sequência de ensino de uma pesquisa que envolveu a formação continuada de 20 professores os quais ensinam Matemática na Educação Básica, em uma rede estadual de ensino. O propósito foi identificar possibilidades acerca da re-significação da prática docente em relação ao desenvolvimento de atividades que estimulem o exercício do raciocínio combinatório enquanto representações gráficas são construídas e exploradas em conjunto com os dois Princípios Fundamentais da Contagem, de modo a obter todos os agrupamentos-solução (ou o quantitativo destes) que satisfazem à solução de um problema de contagem, sem a aplicação de fórmulas. Os professores trabalharam em grupos, refletiram acerca dos enunciados dos problemas e discutiram sobre as soluções. O pesquisador mediou discussões acerca da validação ou não das soluções e das questões colocadas em discussão e a análise dos resultados obtidos pelos professores, relacionadas à viabilidade de propor a alunos do Ensino Fundamental. Identificou-se a prevalência por soluções via representações numéricas comparadas à construção de uma representação gráfica, não obstante seu uso ter sido incentivado pelo pesquisador. Faltou ao grupo mobilizar novas estratégias de resolução frente ao desafio de resolver problemas cujos enunciados não davam pistas diretas do tipo de agrupamentos-solução envolvidos.

Palavras-chave: Problemas de Contagem. Análise Combinatória. Formação de Professores de Matemática. Educação Matemática.

Abstract
This work is the cut of a problem-situation that was proposed in an educational sequence following a research which involved the continued training of 20 teachers who teach Mathematics in Basic Education, at a state school system. The purpose was to identify possibilities about the teaching practice reframe for the development of activities that encourage the exercise of combinatorial reasoning while graphical representations are built and operated in conjunction with the two (2) Fundamental Principles of Counting, in order to obtain all solution-groupings (or the amount thereof) that meet the solution of a counting problem, without the application of formulas. The teachers worked in groups, reflected about the statements of the problems and discussed about the solutions. The researcher mediated discussions about the validation or not of the solutions and the questions under discussion and the analysis of results obtained by teachers, regarding the feasibility of proposing it to elementary school students. Solutions through numerical representations prevailed compared to building graphical representation, regardless of their use was encouraged by the researcher. The group failed in mobilizing new strategies for resolution to the challenge of solving problems whose statements did not give direct clues to the type of solution-groupings involved.

Keywords: Counting Problems. Combinatorial Analysis. Formation of the Mathematics Teacher. Mathematics Education.

1. Introdução

Segundo Morgado et al. (1991, p. 4), a Análise Combinatória tem tido um crescimento explosivo nas últimas décadas. A importância de problemas de enumeração tem crescido enormemente devido a necessidades de modelar problemas interessantes como problemas da Teoria dos Grafos (problemas de pesquisa operacional, de armazenamento de informações em bancos de dados nos computadores e também problemas de Matemática pura - como o “Problema das 4 Cores”), em Análise de Algoritmos, entre outros.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), para a compreensão efetiva da multiplicação é preciso explorar quatro diferentes grupos de atividades, dentre os quais a *ideia de combinatória* (BRASIL, 1997, p. 109-112). De modo geral, embora a proposição de situações que envolvam a soma de parcelas iguais formadas por números naturais, uma vez que envolve um registro multiplicativo que dá ênfase ao número de repetições na soma e a indicação da parcela que se repete, seja relevante como ponto de partida para a compreensão e a apropriação do conceito de multiplicação, não deve ser a única maneira a ser desenvolvida com os alunos e com a qual o professor deva tomar como base para dar sentido ao conceito de multiplicação.

É preciso considerar outras abordagens como, por exemplo, não deixar de relacionar o conceito de multiplicação com a ideia de produto cartesiano, e que outras atividades que envolvem os quatro significados para o conceito de multiplicação sejam exploradas de maneira a evitar que mais tarde os alunos tenham dificuldades para identificar esta operação em situações diversas.

O ensino tradicional de análise combinatória na Educação Básica, e no Ensino Superior, baseia-se unicamente na apresentação oral e na escrita no quadro, pelo professor, por meio de uma abordagem que inicia pela definição formal de cada um dos três conceitos básicos entre os objetos envolvidos nos enunciados de problemas combinatórios básicos: arranjos, permutações (simples ou com repetição) e combinações simples. Em prosseguimento, é feita a demonstração (ou apenas a apresentação) de fórmulas que determinam a totalidade de agrupamentos-solução, contando com o uso massificado das fórmulas como ferramentas únicas usadas na resolução de exemplos e exercícios, em parte descontextualizados, por meio de cálculos combinatórios e expressões combinatórias em estreita relação com as operações combinatórias (TEIXEIRA, 2012).

Além disso, propõe-se listas de exercícios de fixação e de aplicação, presentes nos livros didáticos, parecidos em sua forma (mudanças apena nos tipos: algarismos, pessoas, letras, entre outros, e nas quantidades dos objetos envolvidos), com as respostas apresentadas ao final de cada seção do capítulo (correspondente unicamente ao tipo do agrupamento de objetos em questão), normalmente sob a forma de um numeral, de modo que o aluno confronte o resultado quantitativo das possibilidades (soluções) que obteve (TEIXEIRA, 2015b). Essa metodologia didática, que infelizmente ainda está presente nos dias atuais, tem-se mostrado ineficaz e desencorajadora para que os alunos (e professores) gostem e se interessem por estudar combinatória.

Fischbein (1994, p. 232) argumenta que o conhecimento de componentes formais não garante o necessário para o enfrentamento de quaisquer problemas, e que o domínio de técnicas e procedimentos, isento do conhecimento de argumentos que justificam a utilização dessas técnicas, pode não ser suficiente para a resolução de problemas que fogem ao padrão.

A combinatória ainda é considerada difícil tanto por alunos quanto por professores (para compreender e para ensinar), e estes por vezes preferem ignorar a importância da temática ou não tratar de seu ensino aprendizagem por completo e em profundidade.

Alunos que por vezes tinham/têm o desconforto de aplicar uma fórmula (apenas, e repetidamente) que envolve a contagem de possibilidades acerca daquele tipo de agrupamento de objetos para resolver um conjunto de alguns poucos exercícios parecidos, quando estão diante do insucesso na resolução de algum problema em que somente a fórmula não dá conta de resolvê-lo, não sabem o que fazer, pois não foram estimulados a exercitar o raciocínio combinatório e a mobilizar outras estratégias de resolução, pelo seu professor.

Felizmente esse quadro desfavorável tem se modificado nos últimos anos, tanto por conta do surgimento dos PCNs no final do século passado, das Diretrizes Curriculares Nacionais e das novas propostas curriculares que têm sido prescritas e implementadas desde então, quanto por conta dos resultados de algumas pesquisas feitas com alunos e/ou professores, que tratam de questões relacionadas com o ensino aprendizagem de combinatória na Educação Básica.

Analisando o desenvolvimento dos conteúdos associados ao raciocínio combinatório, o autor entende que deve haver uma busca pela aproximação entre o conteúdo escolar e o universo da cultura matemática ao longo do Ensino Fundamental, desde o 3º Ano/4ª Série. Tal aproximação deve proporcionar condições para que haja uma ampliação conceitual qualitativa à aprendizagem dos alunos, indispensável para a apropriação e a sistematização dos conteúdos de análise combinatória de modo que o aluno se prepare para compreender outros conteúdos no Ensino Médio, por exemplo, Probabilidade e Estatística (TEIXEIRA, 2014).

Mesmo considerando que tal ampliação conceitual já exista em algumas regiões do nosso país, é preciso que o professor reflita acerca da prática que exercita em sala de aula, com respeito ao que está prescrito nos currículos estaduais e municipais, e em relação à sua formação ao longo de sua trajetória profissional.

2. Referencial teórico

Segundo Tall e Vinner (1981, p. 2), como resultado e por meio de experiência de todos os tipos que uma pessoa se vê envolvida ao longo do tempo a imagem de um conceito vai se constituindo e se transformando continuamente quando ela passa pelo enfrentamento de novos estímulos.

Como o foco da pesquisa foi o Conhecimento Profissional Docente, ela tem como base os estudos de Shulman (1986). O autor chama a atenção para o que ele identificou como “paradigma perdido", o conhecimento do conteúdo, salientando que o domínio dos conteúdos é imprescindível para o ensino de toda e qualquer disciplina. O autor busca, em suas pesquisas, discutir os conhecimentos que servem de base para formação e a atuação docente. Ele propôs um domínio especial de conhecimento do professor, que chamou de conhecimento pedagógico do conteúdo, que faria uma "ponte" entre o conhecimento do conteúdo e a prática do ensino.

Segundo Shulman (1986, p. 8), "o conhecimento pedagógico do conteúdo é a categoria mais provável de distinguir o entendimento do especialista do conteúdo do entendimento de um pedagogo". Além disso, de acordo com o mesmo, existe um conhecimento de conteúdo exclusivo para o ensino: o conhecimento específico do profissional.

Shulman (1986, p. 8) argumenta que "o mero conhecimento do conteúdo é provável de ser tão inútil pedagogicamente quanto à experiência sem conteúdo" e que "saber um assunto para ensiná-lo requer mais do que saber os seus fatos e conceitos".

Assim, os professores devem também entender os princípios organizadores, as estruturas e as regras para estabelecer o que é legítimo a fazer e dizer em uma área de ensino. Segundo Shulman (1986, p. 8), "o professor não deve entender que alguma coisa é assim, o professor deve entender mais profundamente porque uma coisa é assim, em que bases a sua garantia pode ser afirmada e sob quais circunstâncias a nossa crença na sua justificativa pode ser enfraquecida ou negada".

Valemo-nos de resultados de pesquisas desenvolvidas por Vergnaud (1991), criador da Teoria dos Campos Conceituais, a qual leva em conta uma série de fatores que influenciam e interferem quando se procura identificar, formar e desenvolver determinado conceito.

O trabalho com situações-problema de contagem mostrou-se significativo pois o conhecimento conceitual emergiu a partir do desenvolvimento das atividades, contando em certos momentos com a manipulação de blocos lógicos, para a construção e exploração de árvores de possibilidades.

Segundo Vergnaud (1991) o estudo para o desenvolvimento de determinado campo conceitual exige do pesquisador a visão segundo a qual um conceito é formado pela tríade (S, I, R), onde S é um conjunto de diferentes situações que permitem ao conceito ser significativo para ser explorado, I é um conjunto de invariantes (objetos, relações entre si e propriedades que os relacionam entre si) que podem ser identificados e utilizados pelo aluno de modo que ele tenha condições de analisar e compreender essas situações, e R é um conjunto de diferentes representações que podem ser usadas para fazer emergir e representar os invariantes da situação e, deste modo, tornar possível representar as situações e os mecanismos necessários para utilizar esses invariantes.

3. Metodologia

Os professores foram distribuídos em grupos menores de até quatro componentes levando em conta as afinidades pessoais e sem a interferência do pesquisador. As situações-problema foram propostas em fichas de atividades e os professores deveriam refletir e resolver sozinhos cada uma; depois discutir com os colegas de grupo acerca de dúvidas, encaminhamentos e resultados e, em seguida, um deles apresentar no quadro a solução de consenso do grupo para reflexões e discussões com todo o grupo com a mediação do pesquisador, de maneira que todo o grupo refletisse e discutisse acerca de possíveis soluções distintas e equivalentes, bem como acerca dos procedimentos e estratégias que foram utilizados na resolução e na adequação de cada uma para a apropriação dos conceitos por alunos do Ensino Fundamental.

A pesquisa envolveu a formação continuada de 20 professores que ensinam Matemática na Educação Básica, que se apresentaram como voluntários, pertencentes a uma rede estadual de ensino, de uma grande capital, durante oito encontros de quatro horas cada.

As diversas situações-problema de contagem propostas na pesquisa tiveram o propósito de identificar possibilidades acerca de re-significar a prática docente do grupo em relação ao desenvolvimento dos conteúdos básicos de contagem com alunos do Ensino Fundamental. Além disso, oportunizar um olhar diferenciado que incentive o exercício constante do raciocínio combinatório quando da construção de uma representação gráfica como um procedimento básico adequado para resolver problemas de contagem. Com o auxílio dessas ferramentas combinatórias, oportunizar também que o aluno se aproprie e exercite constantemente do raciocínio combinatório.

A dinâmica prossegue até que o aluno considere que, para um problema de contagem com um quantitativo razoavelmente elevado de objetos a “combinar”, fazer a construção de uma representação gráfica se mostra inadequada e, portanto, considere que seria conveniente fazer uso de uma representação numérica (TEIXEIRA, 2013a). Para tal, será preciso que a quantidade de ações que são necessárias para construir uma representação gráfica, deva ter registro nessa nova representação numérica, de maneira que os procedimentos estejam em consonância com os dois princípios básicos de contagem: multiplicativo e aditivo.

O momento em que o aluno toma consciência dessa necessidade e toma a iniciativa de fazer uso de uma representação numérica, representa uma ruptura com o modelo construtivo dos agrupamentos-solução para o cômputo das possibilidades. Consideramos importante que essas questões possam ser conhecidas por professores e alunos e que, de algum modo, elas contribuam para a melhoria da prática docente relativa à temática (TEIXEIRA, 2012).

4. Resultados e discussões

As considerações que se seguem relacionam-se à seguinte situação-problema proposta: de quantas maneiras é possível que a sequência de gols de uma partida de futebol tenha ocorrido se o placar final da partida foi Vasco 4 x 3 Flamengo? (TEIXEIRA, 2013c).

Alguns sujeitos da pesquisa apresentaram resultados iniciais via representações numéricas: $4 \times 3 = 12$; $4^2 = 16$; $3^2 = 9$; $4! \times 3!$; $7!$; $4! + 3!$, mas outros interpretaram a pergunta com respeito às possibilidades de resultados de placares intermediários e do placar final, como se pode identificar nas quatro respostas presentes no Quadro 1.

Quadro 1- Respostas dos sujeitos da pesquisa à situação-proposta.

Resp. A	Resp. B	Resp. B	Resp. C	Resp. C	Resp. D	Resp. D	Resp. D	Resp. D	Resp. D
2X1	1X1	4X2	0X0	3X2	0X0	1X3	0X2	3X2	3X4
3X1	2X1	1X3	1X1	4X2	1X1	1X4	1X2	3X3	
4X1	3X1	2X3	2X1	1X3	2X1	2X0	3X2	4X3	
3X2	4X1	3X3	3X1	2X3	3X1	2X1	4X2	0X3	
4X2	2X2	4X3	4X1	3X3	4X1	2X2	3X0	1X3	
4X3	3X2		2X2	4X3	1X2	2X3	3X1	2X3	

Fonte: Elaboração do autor.

Diante das respostas que foram apresentadas no quadro, o pesquisador pediu que os professores fizessem uma releitura do enunciado da situação-problema, questionando-os do porquê de não terem se utilizado de uma representação gráfica para obter a solução.

Após um novo período de tempo para que todos encontrassem a solução alguns dos professores ficaram impacientes pelo fato de não encontrarem a resposta correta e de não saberem como e quais estratégias deveriam mobilizar para obter a solução.

Assim, constantemente, insistiam em perguntar ao pesquisador o que era preciso ser feito. Diante da negativa do pesquisador e da assertiva de que eles teriam condições de encontrar a solução, o pesquisador os motivou dizendo que era preciso que estivessem calmos e fizessem uma leitura atenta do enunciado de modo a compreenderem o que era necessário fazer e considerassem quais seriam os procedimentos e as estratégias que eles deveriam mobilizar. Em seguida, um professor apresentou, no quadro, uma árvore de possibilidades incompleta, pois, como afirmou: “se perdeu” durante a sua construção.

Devido ao quadro de impaciência frente aos insucessos, os professores começaram a fazer críticas ao fato de que a árvore de possibilidade que o colega começou a construir seria muito trabalhosa para construir e que talvez o enunciado não estivesse escrito de maneira correta e clara, uma vez que eles não sabiam o que deveriam fazer. De imediato o pesquisador contestou essa versão e lembrou-os de que em outras situações-problema, a construção de parte de uma árvore de possibilidades era suficiente para dar pistas de como eles poderiam mobilizar uma estratégia de resolução a partir dessa ideia inicial.

Assim, uma vez que a árvore de possibilidades incompleta estava desenhada no quadro, o pesquisador pediu que refletissem acerca das ações construtivas da árvore necessárias de ser feitas e do exercício do raciocínio combinatório aí imbricado para identificar de que maneira os agrupamentos-solução poderiam ser obtidos e computados. Mesmo assim, os professores não lograram êxito em descobrir pistas de como encontrar a solução.

Assim, o pesquisador começou por indagar: se o que se quer é determinar o total de maneiras de os gols da partida poderem ter ocorrido, cada sequência de gols pode ser representada por meio de uma séptupla formada pelas indicações dos nomes dos dois clubes, V e F, correspondentemente aos gols que cada clube poderia ter feito em uma particular sequência dos gols da partida, considerando que o Vasco marcou quatro gols e o Flamengo marcou três gols. Após cerca de cinco minutos, um professor apresentou a resposta por meio de uso de fatorial: $\frac{7!}{4!3!} = 35$. A resposta ao problema é o total de sequências distintas que podem ser formadas obedecendo às condições estabelecidas no enunciado: sequências de gols dos dois times, em um total de sete gols. Em seguida, outro professor complementou a árvore de possibilidades que estava desenhada no quadro, mostrando os 35 agrupamentos-solução.

Essa situação-problema foi proposta com a intenção de determinar o quantitativo de possibilidades de uma sequência de objetos em que pelo menos um dos objetos estava repetido, servindo de motivação para que os professores se apropriassem do conceito de permutações nos casos em que nem todos os objetos são distintos.

O pesquisador refletiu com os professores acerca de encontrar uma representação numérica que desse conta do resultado, diferentemente do uso de uma fórmula, como a que foi utilizada pelo colega, pois o propósito era o de trabalhar com alunos do Ensino Fundamental.

Para tal, foram discutidas as seguintes questões: Indicam-se os gols do Vasco por V e os gols do Flamengo por F. O total de modos distintos de gols da partida terem ocorrido é igual ao valor total de ordenações entre as letras V, V, V, V, F, F e F. Como há quatro letras V iguais e três letras iguais F, vamos distinguir, provisoriamente, uma letra V de outra V e uma letra F de outra letra F, indicando-as como V_1, V_2, V_3 e V_4, F_1, F_2 e F_3. Assim, para efeito de uma contagem maior, há “quatro letras distintas”: V_1, V_2, V_3, V_4, F_1, F_2 e F_3 e o total de ordenações entre elas é de $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$. Uma ordenação considerada na contagem seria: (F_1, V_1, V_2, V_3, F_3, V_4, F_2).

Na realidade, cada uma das ternas de “distintas” possibilidades das permutações entre as letras F que poderiam ser representadas conforme acima indicam a mesma possibilidade de os gols da partida terem ocorrido, pois, por exemplo, (F_1, F_3, F_2) representam a sequência de gols FFF, tal qual a sequência indicada por (F_2, F_1, F_3), por exemplo. O mesmo se aplica para o caso das letras V. Portanto, como a ordenação (F_1, V_1, V_2, V_3, F_3, V_4, F_2) é a mesma ordenação de (F_2, V_4, V_1, V_2, F_1, V_3, F_3) (pois, na verdade, não há V_1 e V_2 ou F_1 e F_2) em relação à sequência de gols possivelmente ocorrida na partida, essa contagem de $3 \times 2 \times 1 = 6$ para as letras F e $4 \times 3 \times 2 \times$

$1 = 24$ para as letras V, combinadas entre si, totalizando $3 \times 2 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ é o total de ordenações que foi feita a maior em virtude de se considerar as letras como distintas. Para o cálculo correto de todas as possibilidades, deve-se, portanto, desfazer essa contagem feita no início em excesso. Mas esse resultado será aproveitado e requer escrever uma proporcionalidade, como a indicada a seguir:

$(3 \times 2 \times 1) \times (4 \times 3 \times 2 \times 1)$ ordenações do tipo (F_1, V_1, V_2, V_3, F_3, V_4, F_2) em que as letras estão nas mesmas posições e apenas os índices são trocados: correspondem a uma ordenação do tipo (F, V, V, V, F, V, F).

$(7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)$ ordenações do tipo (F_1, V_1, V_2, V_3, F_3, V_4, F_2) em que todas as letras são consideradas distintas entre si: correspondem a X ordenações do tipo (F, F, V, F, V, V, V).

Logo, $(3 \times 2 \times 1) \times (4 \times 3 \times 2 \times 1)X = (7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)1$.

Então, $X = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2 \times 1) \times (4 \times 3 \times 2 \times 1)} = 35$ sequências de gols. O leitor deve atentar para o fato de que o fator do denominador indicado por $(3 \times 2 \times 1)$ deve-se ao fato de terem ocorrido três gols do Flamengo, ou seja, a letra F se repete três vezes na sequência de gols e o fator do denominador indicado por $(4 \times 3 \times 2 \times 1)$ deve-se ao fato de terem ocorrido quatro gols do Vasco.

Se a partida apresentasse o placar Vasco 4 x 2 Flamengo, o total de possibilidades de os gols da partida terem ocorrido seria de $\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(4 \times 3 \times 2 \times 1) \times (2 \times 1)} = 15$ distintos modos de os gols da partida terem ocorrido, pois a letra V se repete quatro vezes e a letra F se repete duas vezes na sequência de gols.

O leitor deve observar que uma característica presente na formação de ordenações de elementos em que pelo menos um deles se repete, em conjuntos de objetos, cores, números, entre outros, é a presença da operação de divisão, na qual o numerador representa o total de ordenações, considerando que todos os elementos são distintos entre si (sem repetição) e o denominador representa o total de ordenações possíveis entre os elementos que se repetem (cada um dos elementos repetitivos por vez), combinando as ordenações de cada um deles entre si.

5. Considerações finais

Este artigo apresentou um recorte sucinto acerca dos resultados e da análise de uma situação-problema proposta em uma sequência de ensino, parte integrante de uma formação continuada de professores, cujo autor atuou como pesquisador e mediador das reflexões pessoais e das discussões coletivas enquanto os sujeitos da pesquisa estavam envolvidos na sua resolução. Pelas respostas e a postura dos sujeitos da pesquisa identifica-se uma prevalência dos aspectos algorítmico (uso de fórmulas) e formal (aspectos acerca dos tipos de agrupamentos de objetos) mesmo considerando que a proposta de trabalho, desde o início, era não fazer uso de uma fórmula para resolver um problema de contagem e que o raciocínio combinatório deveria ser exercitado.

Ademais, também identificou-se o abandono da construção de uma representação gráfica pelos sujeitos da pesquisa, ferramenta que foi utilizada desde as primeiras situações-problema propostas, para dar vez a representações numéricas que mostram uma relação direta com alguma fórmula ou ao tipo de agrupamento de objetos. Essa postura dos professores sugere que eles ainda não veem a construção de uma representação gráfica como uma alternativa viável para determinar a solução para um problema de contagem, talvez por conta de crenças decorrentes da formação docente. Além disso, a situação-problema mostrou, sem que esse fosse o propósito do pesquisador, que o conhecimento de fórmulas para a resolução de problemas de contagem não garante necessariamente que a solução seja obtida.

Tomando por base os resultados obtidos com a investigação, o desenvolvimento das atividades iniciais deve considerar um número reduzido de objetos que podem ser "combinados" para formar os agrupamentos-solução que atendem à solução, uma vez que permitem ao aluno apropriar-se, exercitar e desenvolver o raciocínio combinatório, quando da construção de uma representação gráfica que mostre todas as possibilidades que atendem à solução de um problema de contagem, e em seguida contá-las diretamente a partir daí. Ressalte-se que essa opção metodológica também permite ao aluno apropriar-se dos dois princípios básicos de contagem: multiplicativo e aditivo, diretamente imbricados nas resoluções de problemas de contagem por meio da construção de uma representação gráfica, uma árvore de possibilidades, por exemplo, sem que o professor precise apresentar formalmente e de imediato cada princípio de contagem.

Ademais, essa sugestão também permite que o aluno tenha um olhar diferenciado para a resolução de problemas de contagem de maneira atraente e desafiadora uma vez que ele poderá manipular objetos, como as peças dos blocos lógicos" (TEIXEIRA, 2013b), e utilizar-se de alguma representação gráfica para obter todas as possibilidades ou servir de base para escrever uma representação numérica, além de fazer com que o aluno sinta necessidade de exercitar constantemente o raciocínio combinatório para construir a representação, levantar hipóteses, tomar decisões, escolher a estratégia e os procedimentos mais adequados para a resolução e generalizar resultados. O incentivo ao exercício constante do raciocínio combinatório para determinar a quantidade de possibilidades que satisfazem à solução para um problema de contagem ou para a enumeração de todas as possibilidades, também permite que o aluno se aproprie de outras habilidades como: raciocinar de maneira crítica; desenvolver habilidades cognitivas; permitir que conheça e utilize procedimentos, estratégias e competências, os quais, por sua vez, passam a fazer parte da ampliação conceitual acerca das possibilidades de resolução de outras diferentes classes de problemas de combinatória (TEIXEIRA, 2015a; 2015c).

Mais tarde, essas ferramentas combinatórias também servirão de base para a formalização de novos conceitos e a generalização de resultados. É importante ressaltar que não é necessário fazer uso de fórmulas para resolver um problema básico de contagem. Por essa razão, recomendamos que o professor não faça a dedução de fórmulas; ou apenas que as apresente no quadro ou, ainda, que não faça uso de alguma durante o desenvolvimento e a apropriação dos conceitos básicos de combinatória com alunos do Ensino Fundamental.

Acreditamos que a resolução de problemas de contagem que toma o raciocínio combinatório como ferramenta combinatória, durante a fase de apropriação dos conceitos e de construção de uma árvore de possibilidades, constitui-se de forte e importante aliado para que o aluno o exercite com frequência e, por conta disso possa identificar quais procedimentos e estratégias são apropriadas para a resolução deste ou daquele problema. A experiência com o tratamento de tais procedimentos metodológicos, próprios da prática docente, é, portanto, imprescindível, pois contribui de modo decisivo para a formação de cidadãos críticos, autônomos e intervenientes – tarefa que professores têm de abraçar em qualquer nível de escolaridade com seus alunos. Conceitos matemáticos têm significado para o aluno, quando são identificados por ele a partir de uma variedade (tão extensa quanto necessário for) de situações nas quais sua importância pode ser percebida. Por outro lado, uma situação-problema pode apresentar diferentes conceitos envolvidos, ou seja, ela comporta mais de um conceito para ser compreendida, analisada e resolvida. Assim, um único conceito fechado em si e uma única situação-problema não são suficientes para dar conta da aquisição de um dado conhecimento, de forma plena e consistente, capaz de garantir segurança do correto uso, em diferentes contextos.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática, 1º e 2º ciclos. Brasília: MEC/SEB, 1997.

FISCHBEIN, E. The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity. In: **Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline**. Mathematics Education Library. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.

MORGADO, A.C. de O.; CARVALHO, J. B. P. de; CARVALHO; P. C. P.; FERNADEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, v. 12, p. 151-169, 1981.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães. **Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de Matemática para a exploração de problemas de contagem no Ensino Fundamental**. Tese (Doutorado), Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2012.

______. Professores de Matemática e problemas de contagem no Ensino Fundamental. **Anais do XI ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática**. Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas. PUC-PR, Curitiba, 2013.

______. Os Blocos Lógicos e o desenvolvimento do raciocínio combinatório. **Anais do XI ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática**. Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas. PUC-PR. Curitiba, 2013.

______. O que você sabe sobre médias? **Revista CÁLCULO**: Matemática para todos, São Paulo, ed. 35, ano 3, dez. 2013.

______. **Resolvendo problemas de análise combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2014.

______. **Práticas acerca do raciocínio combinatório no Ensino Fundamental**. São Paulo: Novas Edições Acadêmicas, 2015.

______. **Ensino de Análise Combinatória na Educação Básica: uma trajetória**. São Paulo: Novas Edições Acadêmicas, 2015.

______. **Resolvendo problemas de análise combinatória nos anos finais do Ensino Fundamental**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2015 (no prelo).

SHULMAN, Lee Seel. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

VERGNAUD, Gèrard. **El niño, las matemáticas y la realidad**: problemas de la enseñanza de las matemática en la escuela primária. México: Editorial Trillas,1991.