REMAT
Revista Eletrônica da Matemática
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul

# Por que apenas 5 poliedros de Platão?

Leila Inês Pagliarini Mello
Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, RS, Brasil
by.leila@gmail.com

Juliana Mercedes Rheinheimer
Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, RS, Brasil
jurheinheimer@gmail.com

**Resumo**
Este trabalho baseia-se no relato de uma experiência realizada com alunos do terceiro ano em uma escola do município de Canoas, tendo como foco o estudo dos poliedros de Platão. O objetivo é fazer o estudo de todas as possibilidades de construção de poliedros regulares. Em cada possibilidade definiu-se o padrão, trabalhando ângulos de polígonos regulares, quantidade de arestas, faces e vértices. Aliada a arte à matemática, foram construídos com origamis os cinco Poliedros de Platão.

**Palavras-chave:** Material Concreto. Ensino de Matemática. Geometria Espacial. Sólidos Regulares.

**Abstract**
This paper reports an experiment with third-year students in a school in Canoas, focusing on the study of polyhedra of Plato. The goal is to study all regular polyhedra, building possibilities. At every chance, it is defined the standard, working with regular polygons, angles, number of edges, faces and vertices. Combined art with mathematics and using origami, we built the five polyhedra of Plato.

**Keywords:** Concrete Material. Math Education. Geometry Space. Regular Solid.

## 1. Introdução

No estudo da geometria espacial, os alunos do 3º ano em geral apresentam dificuldade na identificação e compreensão das quantidades de faces, vértice, arestas e nas possibilidades de construção dos poliedros regulares, bem como em sua aplicação na resolução de situações-problema. Com isto em vista, este trabalho pretende apresentar uma atividade de investigação matemática envolvendo poliedros de Platão. Pretende-se que essa sequência didática possibilite aos alunos a oportunidade de explorar, testar e construir as possíveis distribuições de polígonos regulares ao redor de cada vértice do poliedro e, desta forma, conhecer e reconhecer a última proposição ou teorema dos elementos de Euclides (século III a. C.). A atividade proposta visa ainda que o aluno possa construir e compreender de forma consistente os conceitos e relacioná-los a exemplos práticos de seu cotidiano.

Para tanto, esta proposta de atividade prevê que os alunos construam sólidos regulares com recortes de polígonos regulares. A utilização de material concreto pode contribuir na aprendizagem quando utilizado de forma adequada. Sobre isso, Novello (2015, p. 4-5) afirma:

> Utilizar o material concreto por si só, não garante aprendizagem, é fundamental o papel do professor nesse processo, enquanto mediador da ação e articulador das situações experienciadas no material concreto e os conceitos matemáticos, para uma posterior abstração e sistematização.

## 2. Platão

Segundo Eves (2008), Platão nasceu em Atenas, ou próximo, em 427 a. C., período em que Atenas encontrava-se em conflito com Esparta, a chamada Guerra de Peloponeso, iniciada em 431 a. C. No início, Atenas foi considerada vitoriosa, porém, o surgimento de uma peste devastadora, matou cerca de um quarto da população; com isso, em 404 a. C. aceitou a derrota. Neste período de conflitos, pouco se produziu em Atenas para o desenvolvimento da geometria; os avanços vieram da Magna Grécia. Com o fim da guerra, Atenas, mesmo fragilizada politicamente, retomou sua liderança cultural.

Eves (2008) ainda afirma que, a busca pelo saber de Platão iniciou-se em Atenas, onde estudou filosofia com Sócrates, após, percorreu o mundo à procura de novos conhecimentos, realizando investigações matemáticas junto a Teodoro de Cirene e Arquitas. Ao retornar para Atenas, em 387 a.C, fundou seu próprio centro de estudos, denominado Academia, que visava a investigação científica e filosófica. Platão dirigiu a Academia por todo sua vida, falecendo em Atenas no ano de 347 a. C., com cerca de oitenta anos de idade. Em outro momento, Eves (2008) ressalta que a maior parte dos trabalhos matemáticos de grande importância da época foram desenvolvidos por amigos ou discípulos de Platão, demonstrando a importância da Academia, que funcionou como elo para a matemática dos pitagóricos, com a posterior escola de Alexandria. As principais contribuições de Platão não se devem a uma descoberta, e sim, por sua busca incansável pelo estudo e reconhecimento da matemática, oferecendo estudo de qualidade e cultivando a busca pela aprendizagem, explicando o lema que se encontrava na entrada da Academia: *Que aqui não adentrem aqueles não-versados em geometria*.

## 3. Sólidos regulares

Conforme Eves (2008), diz-se que um poliedro é regular se suas faces são polígonos regulares congruentes e se seus ângulos poliédricos são todos congruentes. Tais poliedros são conhecidos como poliedros de Platão. A descoberta dos poliedros regulares não está devidamente documentada pois, segundo Luna (2014), percebe-se que Platão não demonstrou a existência de nenhum dos poliedros regulares. Eves (2008) afirma que o nome *Timeu* de Platão é do Pitagórico Timeu de Locri, com quem possivelmente Platão encontrou-se na Itália. Timeu associa misticamente os quatro sólidos mais simples de construir – o tetraedro, o octaedro, o icosaedro e o cubo – a quatro elementos – fogo, ar, água e terra. Platão demonstrava uma atenção especial ao dodecaedro, devido à dificuldade de apresentá-lo, o associava ao Universo: “Deus usou-o para pintar os animais [estrelas ou constelações, o zodíaco] do universo” (LUNA, 2014, p. 24). A descoberta do tetraedro, do cubo e do dodecaedro se deve aos pitagóricos, enquanto Teeteto foi quem de fato descobriu o octaedro e o icosaedro.

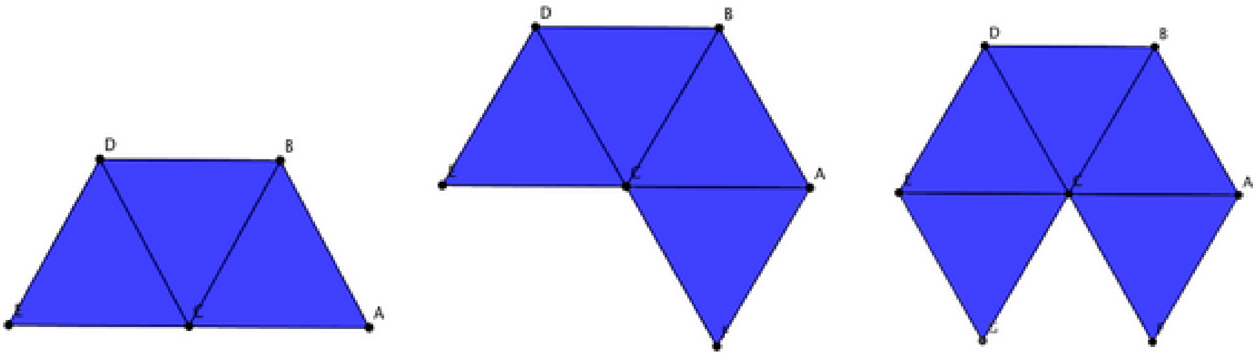
Os poliedros são nomeados de acordo com o seu número de faces, como o tetraedro, que conta com quatro faces triangulares, o hexaedro ou cubo, com seis faces quadradas, o octaedro com oito faces triangulares, o dodecaedro com 12 faces pentagonais e o icosaedro com vinte faces triangulares (REIS, 2013). A principal pergunta acerca do tema é *por que apenas cinco poliedros de Platão?*

A última proposição ou teorema dos elementos de Euclides (século III a. C.) (SILVA, 2014) trata de demonstrar por que existem apenas cinco poliedros de Platão. A demonstração é baseada no fato de que os ângulos planos que rodeiam cada vértice de um poliedro têm soma menor que 360°.

De cada vértice partem, no mínimo, 3 arestas e, no máximo 5 arestas, visto que as faces são polígonos regulares. Os casos possíveis serão analisados a seguir.

Inicialmente será analisado um poliedro composto por triângulos (Figura 1). Assim sendo, cada ângulo interno de uma face mede 60° e, deste modo, em cada vértice do poliedro podem ter três, quatro ou cinco faces triangulares.

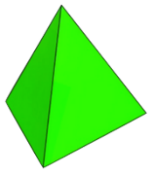
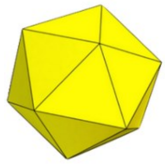
Figura 1 – Faces de um poliedro composto por triângulos.




Fonte: Elaboração dos autores.

Isso ocorre porque 3x60°, 4x60° e 5x60° são produtos menores que 360°, o que já justifica o fato de haver menos do que 6 triângulos ao redor de um vértice. Observe: 6x60°=360° o que determina um plano, não sendo vértice de poliedro e tampouco mais do que 6 triângulos, pois passaria de 360°. Portanto, são três poliedros platônicos possíveis, de faces triangulares (Quadro 1).

Quadro 1 – Poliedros platônicos de faces triangulares.

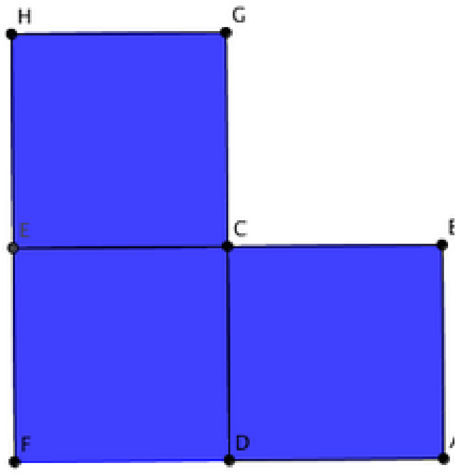
| I. Tetraedro | II. Octaedro | III. Icosaedro |
|---|---|---|
|  |  |  |
| (3,3,3) | (3,3,3,3) | (3,3,3,3,3) |

Fonte: Elaboração dos autores.

Estudadas todas as possibilidades com o triângulo, será analisado o segundo caso possível: quadrados ao redor do vértice.

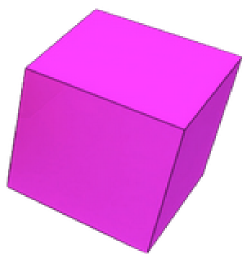
Se as faces são quadradas, cada ângulo interno de uma face mede 90° e, deste modo, em cada vértice do poliedro podem ter apenas três faces quadradas (Figura 2). Isso ocorre porque 3x90° é um produto menor que 360°. Observe: 4x90°=360° o que determina um plano, não sendo vértice de poliedro e tampouco mais do que 4 quadrados, pois passaria de 360°. Portanto, há somente um poliedro platônico possível, com faces quadradas (Quadro 2).

Figura 2 – Faces de um poliedro composto por quadrados.




Fonte: Elaboração dos autores.

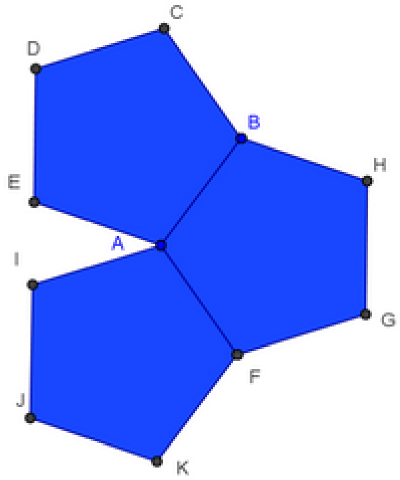
Quadro 2 – Poliedro platônico com faces quadradas.

| IV Hexaedro |
|---|
|  |

Fonte: Elaboração dos autores.

A próxima face, seguindo a ordem proposta, é a pentagonal. Se o poliedro for composto de faces pentagonais, cada ângulo interno de uma face mede 108° e, deste modo, em cada vértice do poliedro pode ter, no máximo, três faces pentagonais (Figura 3). Isso ocorre porque 3x108° é um produto menor que 360°. Observe: 4x108°>360° o que impossibilita a construção. Portanto, há apenas um poliedro platônico possível com faces pentagonais (Quadro 3).

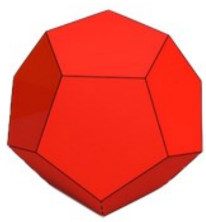
Figura 3 – Faces de um poliedro composto por pentágonos.




Fonte: Elaboração dos autores.

Quadro 3 – Poliedro platônico com faces pentagonais.

V. Dodecaedro



Fonte: Elaboração dos autores.

Na sequência, a próxima face a ser estudada é a hexagonal. Se o poliedro for composto de faces hexagonais, cada ângulo interno de uma face mede 120° e, em cada vértice concorrem ao menos três polígonos, tem-se no mínimo 3x120° e o produto será no mínimo igual a 360°, o que impossibilita a construção.

De maneira análoga, percebe-se que não será possível para nenhuma outra face, sendo essa maior que o pentágono. Logo, são apenas cinco os poliedros de Platão.

## 4. Metodologia

Este trabalho foi desenvolvido com os alunos do 3º ano da Escola Estadual Margot Terezinha Noal Giacomazzi, sendo-lhes solicitado que trouxessem o material que seria utilizado: folhas de papel colorida ou cartolina (uma cor para cada grupo), régua e tesoura.

A turma de 24 alunos foi dividida em grupos de quatro pessoas e cada grupo construiu um conjunto de polígonos regulares (triângulos, quadrados, pentágonos e hexágonos). A partir deles, iniciaram o processo de verificação de quantos graus há em cada ângulo interno de um polígono regular, o que foi fundamental para que construíssem os sólidos regulares a partir das figuras formadas e de acordo com os resultados obtidos no estudo dos ângulos internos.

## 5. O contexto da aula

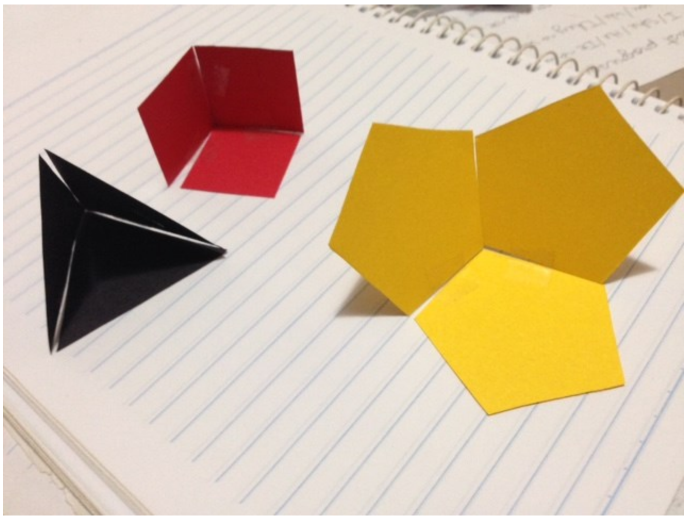
Com os grupos já dispostos pela sala e retomado o conceito de polígonos regulares, cada grupo construiu um conjunto de triângulos, quadrados, pentágonos e hexágonos, com 4 cm de lado. O primeiro questionamento que surgiu foi sobre como fariam para confeccionar os polígonos com lados iguais. Neste momento, retomou-se a construção com o uso do compasso e transferidor. A construção favoreceu a memorização do cálculo para a determinação de quantos graus têm cada ângulo interno de um polígono regular.

A partir da construção (Figura 4), os alunos foram desafiados a descobrir qual o menor número de polígonos que podem ser dispostos ao redor de um vértice sem sobreposição. Um dos alunos afirmou que seriam no mínimo três e, neste caso, seria uma pirâmide. Essa afirmação foi encarada com estranhamento pelos colegas; o aluno, ao ser convidado a explicar o seu raciocínio, levantou-se com algumas das peças em nas mãos e explicou: "– com duas peças é plano, precisa de três para formar a terceira dimensão!". Neste momento, a professora lhe perguntou: "– você mencionou pirâmide, em que pensou?" Ele explicou que havia pensado em um sólido formado por quatro peças triangulares. Ao dizer isso, também afirmou que se fosse com quadrados, então não seria pirâmide e, sim, cubo. Aproveitando o raciocínio do aluno, foi solicitado que tentassem montar todos os possíveis "cantos", com três peças idênticas ao redor de um vértice. Os grupos concluíram que havia apenas três possibilidades: três triângulos, três quadrados e três pentágonos (Figura 5). E que com três hexágonos não seria possível, porque juntos somam 360°, impossibilitando a terceira dimensão.

Figura 4 – Polígonos regulares construídos pelos alunos.

Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 5 – Possibilidades de montagem com três peças idênticas ao redor de um vértice.

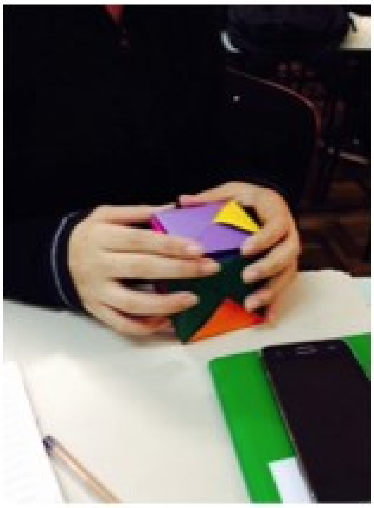


Fonte: Arquivo pessoal.

A tarefa seguinte era construir vértices com quatro polígonos regulares. Neste caso, o único possível foi com triângulos. Os grupos concluíram, facilmente, que os quatro quadrados somariam 360°e formariam um plano! Neste momento, também já perceberam que “aumentar a quantidade de peças em cada canto”, só era possível com triângulos. Foi solicitado que construíssem todos os possíveis vértices com um número maior de 3 polígonos. Assim, a turma concluiu que eram apenas cinco os possíveis “cantos”. A partir das construções, os alunos fizeram no quadro uma tabela com os números de faces, o esboço plano das faces concorrentes em cada vértice e a soma das amplitudes dos ângulos internos em torno do mesmo vértice para os cinco poliedros platônicos.

Para finalizar o estudo, os grupos construíram os quadrados, os triângulos equiláteros e as peças de ligações que servirão para montar os cinco poliedros de Platão através de origami.

Figura 6 – Montagem de origamis.



Fonte: Arquivo pessoal.

Após a construção, os origamis foram expostos no saguão da escola.

## 6. Considerações finais

As principais contribuições de Platão foram a sua busca incansável pelo estudo e o reconhecimento da matemática, com o objetivo de proporcionar a busca pela aprendizagem, o estudo de possibilidades e descobertas.

A experiência relatada mostrou-se importante em diversos aspectos, especialmente com relação à motivação dos alunos por se tratar de uma aula prática, na qual puderam construir seus próprios sólidos geométricos. Este tipo de atividade faz com que os alunos interajam, ajudando uns aos outros. Além disso, a abordagem da última proposição ou teorema dos elementos de Euclides na Geometria Espacial foi enriquecedora, pois através do esgotamento de possibilidades, os alunos perceberam e construíram as relações entre os ângulos dos vértices, chegando à conclusão que era possível obter apenas cinco sólidos regulares.

Acredita-se que a construção dos poliedros pelo origami coroou a atividade, mostrando aos alunos que é possível a união entre a matemática e a arte, o que contribui para estimular a aprendizagem e o gosto pela disciplina.

## Referências

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. 2. ed. Campinas: UNICAMP, 2008.

LUNA, Marcelo de Oliveira. **Estudo dos Origamis dos Poliedros de Platão**. Monografia (Licenciatura em Matemática), Universidade Federal de Pernambuco, 2014. Disponível em: <http://www.academia.edu/6129805/Monografia_Origamis_dos_poliedros_de_Plat%C3%A3o>. Acesso em: 29 set. 2015.

NOVELLO, T. P.; SILVEIRA, D. S.; LUIZ, V. S.; COPELLO, G. B.; LAURINO, D. P. **Material concreto:** uma estratégia pedagógica para trabalhar conceitos matemáticos. IX Congresso Nacional de Educação – EDUCERE, III Encontro Sul Brasileiro de Psicopedagogia, 26 a 29 de outubro de 2009. Disponível em: <http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2009/anais/pdf/3186_1477.pdf>. Acesso em: 01 out. 2015.

SILVA, José Kilmer Tavares. **Um estudo complementar dos poliedros voltado para professores e alunos do ensino básico**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat), Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2014.

REIS, Edvaldo Araújo dos. **Os poliedros de Platão**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat), Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2013.