



**REMAT**

*Revista Eletrônica da Matemática*

*Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul*



## **O ensino de Matemática em uma perspectiva investigativa: a construção de alguns números irracionais**

Caroline Maffi

Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUC-RS), Porto Alegre, RS, Brasil  
[caroline.maffi@acad.pucrs.br](mailto:caroline.maffi@acad.pucrs.br)

Francieli Bandeira de Fraga

Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUC-RS), Porto Alegre, RS, Brasil  
[francieli.fraga@acad.pucrs.br](mailto:francieli.fraga@acad.pucrs.br)

Diego de Vargas Matos

Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUC-RS), Porto Alegre, RS, Brasil  
[diego.matos@acad.pucrs.br](mailto:diego.matos@acad.pucrs.br)

### **Resumo**

Esta oficina tem como objetivo principal apresentar uma sequência de atividades enfatizando a prática da investigação matemática em sala de aula, envolvendo números reais e em especial os números irracionais para estudantes do Ensino Fundamental. Para tanto, são desenvolvidas três atividades. A primeira sugere uma exploração da reta numérica e aproximações sucessivas de radicais. Na segunda atividade, é proposto a construção da espiral pitagórica. Finalmente, na terceira atividade, utiliza-se o Tangran como recurso para explorar medidas que envolvam números irracionais. Busca-se discutir e ampliar o conjunto dos números reais, por meio das atividades de investigação matemática. Além disso, evidencia-se que o conceito de número irracional, quando construído por meio de atividades investigativas e considerando os aspectos históricos, torna-se mais compreensível e significativo. A abordagem por meio de investigações matemáticas torna o processo de aprendizagem mais dinâmico e mais interessante para os estudantes.

**Palavras-chave:** Números Irracionais. Investigações Matemáticas. Ensino. Aprendizagem.

### **Resumen**

Este taller tiene como objetivo principal presentar una secuencia de actividades enfatizando la práctica de investigación matemáticas en clase, utilizando números reales, en especial los números irracionales, para estudiantes de primaria. Para ello se desarrollarán tres actividades. La primera sugiere explorar la recta numérica y aproximaciones sucesivas de radicales. En la segunda actividad, se propone la construcción de la espiral pitagórica. Por último, la tercera actividad, se utiliza el Tangran como recurso para explorar medidas que engloben a los números irracionales. Se busca discutir y ampliar el conjunto de los Reales, a través de las actividades de investigación matemáticas. Además, se hace evidente que el concepto de número irracional, si es construido por medio de actividades investigativas, considerando los aspectos históricos, se torna más comprensible y con significado. El abordaje por medio de investigaciones matemáticas torna el proceso de aprendizaje más dinámico y más interesante para los estudiantes.

**Palabras clave:** Números Irracionales. Investigaciones Matemáticas. Enseñanza. Aprendizaje.

### **1. Introdução**

O objetivo desta oficina é propor uma sequência de atividades enfatizando a prática da investigação matemática, envolvendo números reais, em especial os números irracionais. Neste

texto, descreve-se algumas considerações sobre o ensino e a aprendizagem do conceito de número irracional, as contribuições das atividades de investigação matemática em sala de aula e o desencadeamento dessas atividades.

Um dos procedimentos indicados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) (BRASIL, 1998) para se desenvolver o bloco de conteúdos matemáticos “Números e Operações” no Ensino Fundamental é: “Análise, interpretação, formulação e resolução de situações problema, compreendendo diferentes significados das operações, envolvendo números naturais, inteiros, racionais e irracionais aproximados por racionais” (BRASIL, 1998, p. 87).

Com esta oficina, busca-se desenvolver o conceito de número irracional, estimulando a autonomia e o pensamento crítico dos estudantes.

## 2. Aportes teóricos

Nos anos finais do Ensino Fundamental os estudantes têm a oportunidade de ampliar os conhecimentos sobre os conjuntos numéricos, percebendo a existência dos números irracionais. Na perspectiva de Mendes (2012), este fato é preocupante devido à pouca abordagem do tópico nos livros didáticos. Além disso, os professores têm dificuldade de relacioná-los com o cotidiano.

Os PCNs (BRASIL, 1998) enfatizam que o estudante deve ampliar e aprofundar a noção de número, por meio de situações em que os números racionais não sejam suficientes para encontrar a solução, fazendo-se necessário a utilização dos números irracionais.

Nesse sentido, Brito et al. (2009, p. 270) afirmam que deve-se evitar que os irracionais sejam compreendidos como “[...] um amontoado de regras de operar com radicais, as quais acabam sendo vistas pelos estudantes como um conhecimento pouco significativo, pouco desafiador e desligado dos demais temas [...]”.

A aproximação de números irracionais é um assunto pouco desenvolvido e merece ser valorizado. Uma sugestão é que o ensino dos números irracionais esteja articulado ao desenvolvimento de conteúdos referentes à geometria e às medidas (BRASIL, 1998).

Ainda sobre o ensino dos números irracionais, é necessário que o estudante “[...] identifique o número irracional como um número de infinitas ‘casas’ decimais não-periódicas, identifique esse número com um ponto na reta, situado entre dois racionais apropriados, reconheça que esse número não pode ser expresso por uma razão de inteiros [...]” (BRASIL, 1998, p. 83). Segundo Machado (1990, p. 43-44), a única via de acesso a um número irracional

[...] é a utilização de aproximações sucessivas através de números racionais. [...] Ainda hoje, [isto] parece desconcertar todos os que enfrentam os irracionais. [...] Há muito se sabe, no entanto, que a maioria absoluta, a quase totalidade dos números reais existentes é constituída por números irracionais.

A maneira como as aulas de Matemática são planejadas e ministradas interferem de modo significativo na compreensão e na aprendizagem dos estudantes. Nesse sentido, Mendes (2012) defende que o professor não deve limitar o ensino de Matemática à aplicação de fórmulas prontas

e sem significado. A autora ainda propõe que o professor deve apresentar a evolução histórica da Matemática, favorecendo o entendimento de que o conhecimento é um processo contínuo de transformação.

Além disso, é responsabilidade do “[...] professor de Matemática aprofundar seus próprios conhecimentos, ser um pesquisador inquieto, para incentivar seus alunos a exercer a prática investigativa.” (MENDES, 2012, p. 55).

Corroborando essa ideia, Ponte et al. (2013, p. 23) afirmam que a investigação matemática como atividade de ensino e de aprendizagem convida o aluno “[...] a agir como matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com seus colegas e o professor.”.

Nesse sentido, Fiorentini e Cristovão (2006, p. 29) afirmam que:

As aulas exploratório-investigativas são aquelas que mobilizam e desencadeiam, em sala de aula, tarefas e atividades abertas, exploratórias e não-diretivas do pensamento do aluno e que apresentam múltiplas possibilidades de alternativa de tratamento e significação. Essas aulas servem, geralmente, para introduzir um novo tema de estudo ou para problematizar e produzir significados a um conceito matemático.

Ainda segundo esses autores, as tarefas de exploração e investigação buscam em sala de aula atividades que não são diretivas do pensamento do aluno, e que apresentam várias possibilidades de tratamento e significado.

### 3. Metodologia

A perspectiva metodológica deste trabalho baseia-se em atividades de investigações matemáticas que, segundo Ponte et al. (2013, p. 22), “[...] constituem uma das atividades que os alunos podem realizar e que se relacionam, de muito perto, com a resolução de problemas.”. Ainda para os autores,

[...] investigar em matemática assume características muito próprias, conduzindo a formulação de conjecturas que se procuram testar e provar, se for o caso. As investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos, e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo de conjectura-teste-demonstração. (PONTE et al., 2013, p. 10).

Para os autores, na introdução da tarefa o professor faz a proposta para a turma. Na segunda fase, os estudantes realizam a investigação, aos pares, grupos ou individualmente. Por fim, na terceira e última fase ocorre a discussão no grande grupo. “Uma atividade de investigação desenvolve-se habitualmente em três fases: introdução da tarefa, realização da investigação, e discussão dos resultados.” (PONTE et al., 2013, p. 25).

Essa oficina propõe três atividades que visam à construção do conceito de número irracional. É possibilitado ao estudante investigar situações envolvendo a Matemática, de modo a perceber que o conceito desenvolvido aproxima-se da realidade.

Enfatiza-se que as atividades devem ser desenvolvidas em grupos para possibilitar a comunicação matemática, a criação de estratégias e a construção do conceito de modo autônomo.

#### 4. Delineamento da oficina

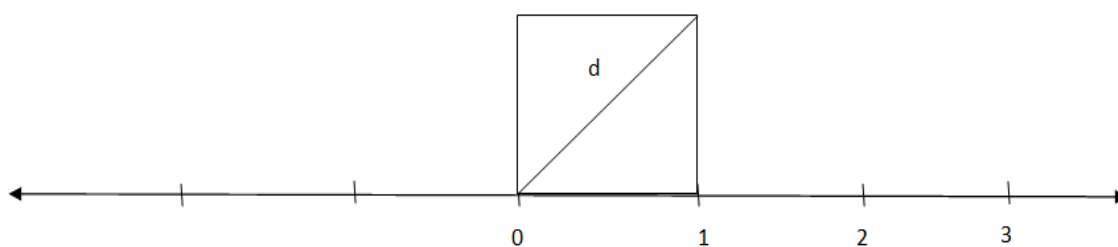
As três atividades propostas na oficina são: Explorando a reta numérica; Espiral pitagórica; Aprendendo com o Tangran. Considerando a perspectiva metodológica desta proposta, sugere-se que cada uma das atividades seja desenvolvida conforme as fases da investigação matemática.

##### 4.1. Atividade 1: Explorando a reta numérica

**Objetivos:** Utilizar o Teorema de Pitágoras para calcular a diagonal do quadrado; identificar  $\sqrt{2}$  como um número irracional; construir o conceito de número irracional explorando a reta numérica.

**Procedimentos:** Orientar os estudantes para que primeiramente desenhem uma reta na folha. Em seguida, construam um quadrado de lado 1 entre os pontos 0 e 1, como mostra a Figura 1. Na sequência, solicitar que os estudantes descubram a medida da diagonal do quadrado utilizando o Teorema de Pitágoras.

Figura 1 – Quadrado de lado 1.



Fonte: Elaboração dos autores.

**Considerações:** Nessa primeira fase de introdução da atividade será possível descobrir que a diagonal do quadrado de lado 1 vale  $\sqrt{2}$ . É importante fazer a contextualização: Até determinado momento, na História da Matemática, acreditava-se que com os números racionais a reta estava toda preenchida não existindo nenhum "buraco", até que, ao calcular a diagonal de um quadrado, constataram que sua medida era  $\sqrt{2}$ . Mas afinal,  $\sqrt{2}$  é um número racional?

Para que os estudantes façam a investigação, com o objetivo de descobrir se  $\sqrt{2}$  é um número racional ou irracional, que é a segunda fase da atividade, deve-se orientá-los do seguinte modo: Primeiramente calcular o valor de  $\sqrt{2}$  na calculadora e anotar, depois multiplicar este valor por ele mesmo e verificar se a resposta foi 2. Conforme a calculadora que os estudantes estiverem utilizando os resultados poderão ser diferentes. Desse modo, o professor deverá conduzir uma discussão a cerca desse valor para que os estudantes percebam que a resposta da calculadora é uma aproximação.

Para tentar alcançar o verdadeiro valor de  $\sqrt{2}$ , os estudantes devem fazer a investigação por meio de cálculos de aproximações sucessivas, como mostra o Quadro 1.

Quadro 1 – Aproximações sucessivas para  $\sqrt{2}$ .

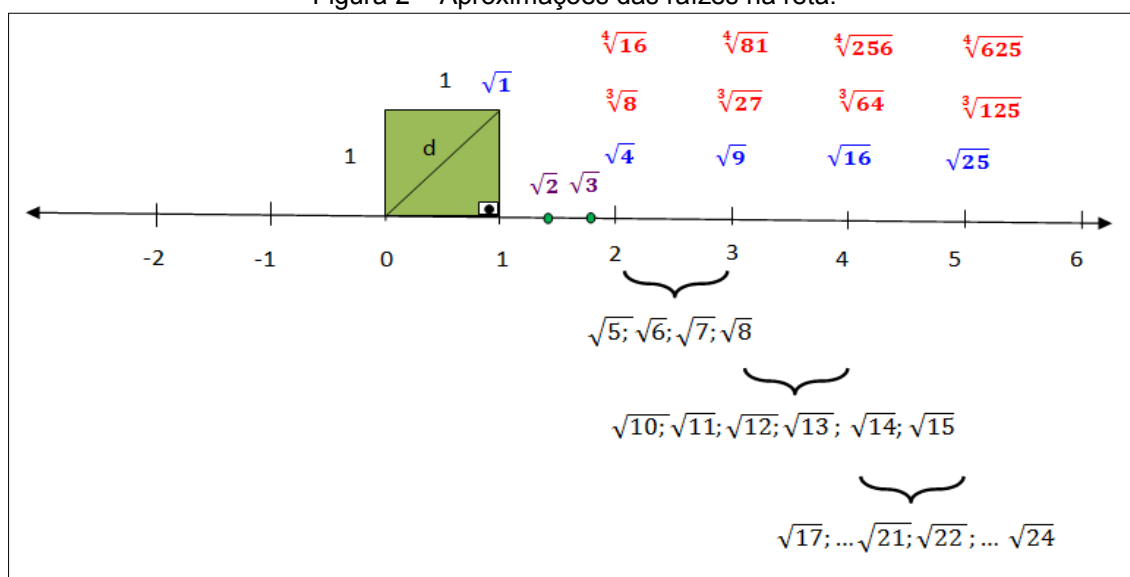
Vamos tentar com 1,5. Eleve ao quadrado. Qual o resultado?	$(1,5)^2 = 2,25$ é maior que 2
Tente 1,4. Eleve ao quadrado. Qual o resultado?	$(1,4)^2$ é maior que 2
Tente 1,45. Eleve ao quadrado. Qual é o resultado?	$(1,45)^2$ é maior que 2
Tente 1,41. Eleve ao quadrado. Qual é o resultado?	$(1,41)^2$ é maior que 2
Tente 1,415. Eleve ao quadrado. Qual é o resultado?	$(1,415)^2$ é maior que 2
Tente 1,414. Eleve ao quadrado. Qual é o resultado?	$(1,414)^2$ é maior que 2
Tente 1,414214. Eleve ao quadrado. Qual é o resultado?	$(1,414214)^2$ é maior que 2
...	...
O que é possível constatar? Encontramos um período?	

Fonte: Elaboração dos autores.

**Considerações:** Na segunda fase, será possível verificar que não é possível encontrar um número exato de casas decimais para  $\sqrt{2}$  e nem um período. Nesse momento, são necessárias algumas explicações: os números na reta são chamados de números reais. Entre eles, existem números racionais, escritos na forma de uma razão  $\frac{a}{b}$ , onde  $a$  e  $b$  são números inteiros e  $b \neq 0$ . Todos os racionais podem ser escritos na forma decimal exata ou periódica.

Os números reais cuja forma decimal não é exata e nem periódica são os irracionais.  $\sqrt{2}$  é um exemplo de número irracional. Todas as raízes não exatas e não periódicas de números inteiros positivos são irracionais. Por exemplo:  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{6}$ ,  $\sqrt{7}$ ,  $\sqrt{8}$ , etc. Desse modo, deve-se voltar para a reta numérica e fazer as aproximações das raízes, como mostra a Figura 2.

Figura 2 – Aproximações das raízes na reta.



Fonte: Elaboração dos autores.

**Considerações:** Na terceira fase da atividade, será possível fazer aproximações das raízes na reta numérica. Por exemplo: sabe-se que  $\sqrt{4}$  é igual a 2 e que  $\sqrt{9}$  é igual a 3. Logo, as raízes  $\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}$  estão compreendidas entre 2 e 3. As aproximações também podem ser feitas com raízes cúbicas e quartas. São importantes as discussões e a participação ativa dos estudantes na comunicação de suas descobertas, dúvidas e opiniões.

#### 4.2. Atividade 2: Espiral Pitagórica

**Objetivos:** Utilizar o Teorema de Pitágoras para descobrir os valores das hipotenusas dos triângulos na espiral; Perceber a beleza da Matemática na natureza.

**Procedimentos:** Apresentar para os estudantes imagens de espirais que encontramos na natureza e deixar que observem e façam discussões no próprio grupo. Em seguida, propor um momento de discussão sobre as figuras a partir de alguns questionamentos: O que vocês percebem nas figuras? O que as imagens têm de relação com a Matemática? Na natureza, podemos “encontrar Matemática”? Qual é o formato destas figuras? Como esta curva é construída?

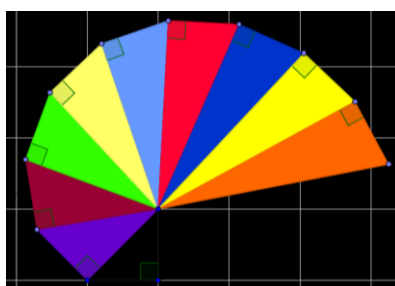
**Considerações:** Na primeira fase da atividade, na qual a tarefa é introduzida, é importante essa sensibilização por meio das imagens e dos questionamentos, e assim os estudantes são estimulados a fazer a investigação e a construção da espiral.

Pode-se iniciar com a seguinte contextualização: “[...] há milhões de anos na região da atual Líbia, o filósofo e matemático, Teodoro de Cirene, estudou a irracionalidade das raízes dos números inteiros não quadrados e mostrou geometricamente através da construção de vários triângulos em forma de espiral que o valor de cada hipotenusa era exatamente  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}$ , etc.” (MENEZES et al., 2011, p. 1). Ele também desenvolveu a prova de que  $\sqrt{2}$  era irracional, a partir do Teorema de Pitágoras, atividade que foi realizada anteriormente.

Para a construção da espiral:

- Desenhar um triângulo retângulo de catetos 1 e 1, e descobrir a hipotenusa.
- Desenhar um segmento de medida 1 formando um ângulo de  $90^\circ$  com o triângulo anterior.
- Calcular a hipotenusa deste novo triângulo retângulo que surgiu, e assim segue sucessivamente, como demonstrado na Figura 3. Enfatizar a descoberta das raízes como valores das hipotenusas.

Figura 3 – Espiral Pitagórica.



Fonte: Elaboração dos autores.

**Considerações:** A construção é a segunda fase da atividade. Desse modo é importante que os estudantes utilizem o Teorema de Pitágoras para calcular a hipotenusa de cada novo triângulo e que percebam o surgimento dos radicais, representando medidas. Deixar os estudantes utilizarem a criatividade para enfeitar a espiral construída e solicitar que observem se há existência de alguma regularidade. Por fim, é importante a socialização de cada grupo, na qual devem manifestar-se expondo as descobertas, opiniões e os conceitos matemáticos trabalhados.

### 4.3. Atividade 3: Aprendendo com o Tangran

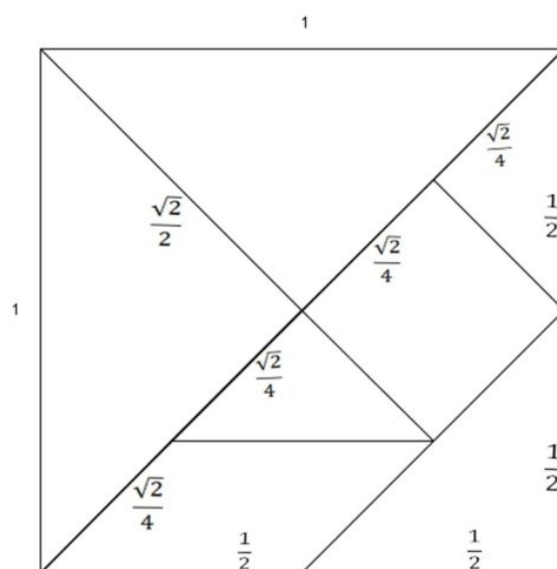
**Objetivos:** Conhecer a origem do Tangran; reconhecer as figuras geométricas formadas por meio da dobradura; fazer relações entre as figuras para descobrir a medida dos seus lados; utilizar a soma de radicais para calcular o perímetro das figuras do Tangran.

**Procedimentos:** Inicialmente, contar a lenda do Tangran, discutir e comentar que existem várias lendas sobre o seu surgimento, e que não se sabe ao certo como foi originado.

No segundo momento, realizar a construção do Tangran. Disponibilizar para os estudantes uma folha de ofício e solicitar que tracem um quadrado de  $15\text{cm}$  por  $15\text{cm}$ , e esta será a unidade de medida (cada  $15\text{cm}$  do lado do quadrado representa 1 unidade de medida).

O Tangran será construído em conjunto com os estudantes por meio de dobraduras, conforme as instruções de Souza et al. (2006). Após, solicitar que observem todas as figuras formadas e respondam ao questionamento: Quais os nomes das figuras? Desafiar os estudantes para que façam a investigação da medida dos lados e do perímetro das figuras conforme Figura 4.

Figura 4 – Tangran.



Fonte: Elaboração dos autores.

**Medidas dos lados:** Para encontrar as medidas os estudantes deverão fazer relações entre os lados das peças. Como já se sabe que a diagonal do quadrado de lado 1 é  $\sqrt{2}$  e que o encontro

das duas diagonais é o centro do quadrado e também o ponto médio dessas duas retas, pode-se constatar que um lado do triângulo grande é a diagonal dividida pela metade. Assim, as medidas dos lados do triângulo grande são:  $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$ .

Ao traçar o triângulo médio, encosta-se o vértice no centro do quadrado. Com isso, o lado do Quadrado que tem medida 1 dividi-se ao meio. Desse modo, temos que as medidas dos lados do triângulo médio são  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$ . E por meio dessas relações é possível encontrar as medidas das outras figuras: triângulo pequeno:  $\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}$ ; paralelogramo:  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}$ ; quadrado:  $\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}$ .

**Medidas dos perímetros:** Para calcular o perímetro, soma-se todos os lados da figura. Desse modo, as medidas dos perímetros das figuras são: triângulo pequeno:  $\frac{2\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$ ; triângulo médio:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; triângulo grande:  $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \sqrt{2} + 1$ ; paralelogramo:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; quadrado:  $\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = 4 \frac{\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$ .

**Considerações:** Nessa atividade, os estudantes utilizaram o Tangran como recurso. Após realizada sua construção, deve-se incentivar a descoberta das medidas dos lados de cada peça. Quando solicitado que descubram o perímetro, os estudantes precisarão utilizar seus conhecimentos sobre a soma de radicais. Caso apresentem dificuldades, lembrar o que são radicais semelhantes e as condições para a soma de radicais.

Na última fase da atividade de investigação é importante fazer a sistematização do que foi trabalhado e ressaltar a presença dos radicais na representação de medidas e a relação com a geometria. Desse modo, torna-se mais perceptível a relação de um conteúdo matemático com o cotidiano, pois os números irracionais podem representar medidas e estão presentes em diversas situações do dia a dia.

## 5. Considerações finais

É evidente, por meio desta oficina, que os conceitos matemáticos precisam ser construídos com a participação ativa dos estudantes e que cada sujeito consiga ser autor do seu processo de investigação e descoberta.

O conceito de número irracional, quando construído por meio de atividades investigativas e considerando os aspectos históricos, torna-se mais compreensível e significativo. A abordagem por meio de investigações matemáticas torna o processo de aprendizagem mais dinâmico e mais interessante para o estudante.

Assim, pode-se concluir que o professor ao utilizar em sala de aula atividades semelhantes às apresentadas nesta oficina, com a mesma perspectiva metodológica, oportuniza aos seus estudantes uma aprendizagem mais significativa sobre o conjunto dos números irracionais.



## Referências

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRITO, Arlete de Jesus; MIGUEL, Antônio; CARVALHO, Dione Lucchesi de. **História da Matemática em atividades didáticas**. São Paulo: Livraria de Física, 2009.

FIORENTINI, Dario; CRISTOVÃO, Eliane M. **Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática**. Campinas: Alínea, 2006.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e Língua Materna: Análise de uma impregnação mútua**. São Paulo: Cortez, 1990.

MENDES, Sônia Cristina da Cruz. **Práticas pedagógicas para o ensino dos números irracionais**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2012.

MENEZES, Daniel Brandão; FREITAS, Antônio Airton; MAIA, Evaldo Oliveira; PEREIRA, Artur Teixeira. O Mistério da Espiral de Cirene. **III Encontro de Educação Matemática**. 2011.

Disponível em:

<[http://www.sbemrn.com.br/site/III%20erem/relatos/doc/RE\\_Menezes\\_Freitas\\_Maia\\_e\\_Pereira.pdf](http://www.sbemrn.com.br/site/III%20erem/relatos/doc/RE_Menezes_Freitas_Maia_e_Pereira.pdf)

>. Acesso em: 23 dez. 2015.

PONTE, João Pedro da; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

SOUZA, Eliane Reame de; DINIZ, Maria Ignez S. Vieira; OCHI, Fusako Hori. **A Matemática das sete peças do Tangram**. 4. ed. São Paulo: IME-USP, 2006.